Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическая физика и вычислительная математика»

В.А. Игрицкий

РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Электронное учебное издание

Методические указания к выполнению домашнего задания

по дисциплине «Надежность оборудования комплексов»

Москва

УДК 629.7.08, 62-192, 624.072.2

Рецензент: к.т.н., доц., Ольга Петровна Матвеева

Игрицкий В.А.

Расчет прочности конструкций методами теории надежности. Электронное учебное издание. - М.: МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2012. 26 с.

Методические указания посвящены методике и основным требованиям к выполнению домашнего задания «Проектирование с учетом надежности», выполняемого студентами кафедры «Стартовые ракетные комплексы» при изучении курса «Надежность оборудования комплексов» для формирования компетенций в области применения методов теории надежности при расчете прочности конструкций. Приведены основные расчетные зависимости, таблицы исходных данных и требования по оформлению результатов домашнего задания с примерами расчетных схем и результатов расчетов.

Для студентов кафедры «Стартовые ракетные комплексы», изучающих дисциплину «Надежность оборудования комплексов».

Рекомендовано учебно-методической комиссией факультета «Специальное машиностроение» МГТУ им. Н.Э. Баумана

Электронное учебное издание

Игрицкий Владимир Александрович

РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Оглавление

Введение

На современном этапе развития техники дальнейший прогресс в разработке более совершенных конструкций наземного оборудования ракетных комплексов чаще всего сдерживается не трудностями проведения расчетов, которые обычно вполне обеспечиваются современной вычислительной техникой, а погрешностями имеющихся исходных данных. Такие погрешности являются неустранимыми в процессе расчетов и порождаются разбросом характеристик применяемых материалов, погрешностями изготовления конструкций, а также недостаточным знанием о действующих нагрузках. Все это требует увеличения коэффициентов запаса и, как следствие, увеличения массы и габаритов проектируемых систем.

Влияние неустранимых погрешностей может быть уменьшено путем проведения соответствующих экспериментов, что, как правило, является достаточно дорогостоящим мероприятием, и все равно не позволяет устранить их полностью. Поэтому необходимо минимизировать влияние неустранимых погрешностей на результаты расчетов, что обеспечивается применением методов теории надежности. Они позволяют проектировать конструкции наземного оборудования с учетом всей имеющейся информации о соответствующих погрешностях и проектировать в результате более легкие и компактные конструкции.

Данное домашнее задание посвящено изучению применения методов теории надежности на примере расчета прочности балки.

1. Прочность конструкции с точки зрения теории надежности

Условием работоспособности конструкции, подверженной силовому нагружению, в общем случае является то, что выраженная в каких-либо единицах прочность конструкции R должна быть больше нагрузки N, воспринимаемой этой конструкцией. Обозначив их разность как запас прочности Z, запишем это условие как:

$$Z = R - N \geq 0 \quad (1)$$

В реальных системах из-за наличия неустранимой погрешности запас прочности Z всегда является случайной величиной. Неустранимая погрешность возникает вследствие погрешностей исходных данных, типичными из которых являются погрешности свойств материалов, погрешности размеров, и погрешности прилагаемых нагрузок. При этом вероятность работоспособности конструкции P, как и вероятность отказа Q, заключающегося в разрушении конструкции, определяются свойствами распределения случайной величины Z, и численно равны площадям под положительной и отрицательной ветвями графика плотности вероятности f(Z) соответственно (рисунок 1).

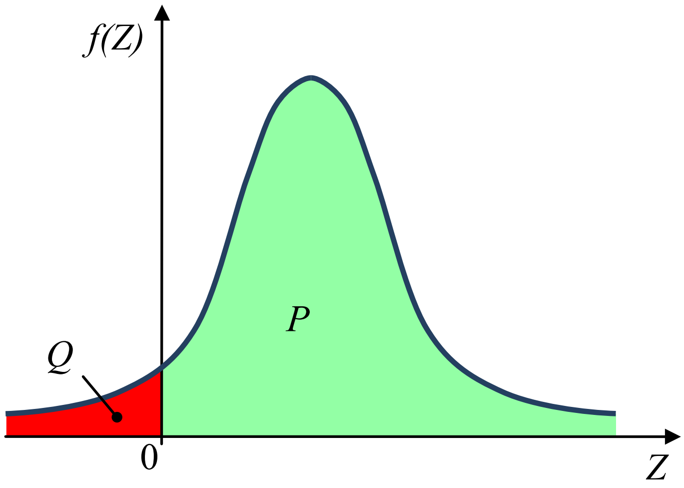


Рисунок 1 Распределение запаса прочности

Это сводит задачу проверочного расчета конструкции на прочность к сравнению величины вероятности безотказной работы P с ее допустимым значением $[P]$, а при конструкторском расчете – к подбору таких параметров конструкции, при которых достигается требуемая вероятность безотказной работы $P \geq [P]$.

В случае нормального распределения величины Z условие (1) может быть выражено как [1]:

$$\overline{Z} + u_Q \sigma_z \geq 0 \qquad (2)$$

где $\overline{Z}$ - математическое ожидание запаса прочности; u_Q – квантиль стандартного нормального распределения для допустимой вероятности отказа $[Q] = 1 - [P]$; σ_z – среднеквадратическое отклонение запаса прочности.

В реальных задачах при $[P] > 0{,}5$ величина квантиля u_Q получится отрицательной, поэтому зависимость (2), с учетом свойств симметричности нормального распределения, удобнее представлять в виде:

$$\overline{Z} - u_P \sigma_z \geq 0$$

или

$$\overline{Z} \geq u_P \sigma_z \qquad (3)$$

В задачах, связанных с прочностью на изгиб, запас прочности (1) удобно рассматривать в виде разности моментов:

$$Z = M_R - M_N$$

В этом случае, используемом в данном домашнем задании, прочностью будет являться максимальный изгибающий момент, который фактически может выдержать конструкция M_R, а нагрузкой – максимальный изгибающий момент, который может возникнуть в конструкции под действием заданной нагрузки M_N. Обе эти величины в общем случае будут являться случайными.

Соответственно, левая часть уравнения (3) примет вид:

$$\overline{Z} = \overline{M_R} - \overline{M_N}.$$

где $\overline{M_R}$ – математическое ожидание максимального изгибающего момента, который фактически может выдержать конструкция; $\overline{M_N}$ – математическое ожидание максимального изгибающего момента, который может возникнуть в конструкции под действием заданной нагрузки.

Для расчета правой части уравнения (3) рассмотрим влияние задаваемых значений исходных данных на запас прочности. Для этого представим все исходные данные (и коэффициенты) в виде случайных величин со своими функциями распределения. Влиянием других погрешностей расчетов (кроме неустранимых) пренебрежем.

В этом случае решение задачи моделирования для каждого набора фиксированных исходных данных порождает следующую функциональную зависимость:

$$Z = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{14}$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ - фиксированные значения исходных данных.

При расчете погрешностей вводятся следующие допущения:

1. Значения исходных данных являются независимыми случайными величинами.
2. Значения исходных данных имеют нормальные законы распределения.
3. Зависимости результатов расчетов от изменения отдельных параметров расчета в пределах допустимых погрешностей можно считать линейными.
4. Зависимости результатов расчетов от изменения отдельных параметров расчета не изменяются от изменения других параметров расчета в пределах их погрешностей.

На практике для задания погрешностей случайных исходных данных x_i часто используется не их среднеквадратические отклонения σ_{x_i}, а коэффициент вариации ν_{x_i}:

$$\nu_{x_i} = \frac{\sigma_{x_i}}{\overline{x_i}},$$

где $\overline{x_i}$ – математическое ожидание случайной величины x_i.

Еще чаще используется допуск случайной величины. В случае, если центр поля допуска совпадает с математическим ожиданием, применяется запись:

$$x_i = \overline{x_i} \pm \Delta x_i$$

где считается, что значение x_i с некоей доверительной вероятностью P_i попадет в интервал минимального$x_i{}^{min} = \overline{x_i} - \Delta x_i$ и максимального $x_i{}^{max} = \overline{x_i} - \Delta x_i$ значений x_i, а Δx_i называют погрешностью x_i.

Величина доверительной вероятности P_i при этом определяется принятыми процедурами контроля качества и на практике часто либо задается в виде значений, содержащих кратное число девяток после запятой (0,999; 0,9999; …) либо задается равной 0,997, с тем, чтобы выполнялось соотношение

$$\Delta x_i = 3\sigma_{x_i},$$

которое называют «правилом трех сигм». Иногда, в частности, в артиллерии, используются и другие аналогичные правила, в частности вероятным отклонением x_i называется такое Δx_i при котором $P_i = 0{,}5$.

В общем случае для нормального распределенной величины x_i:

$$\Delta x_i = u_{P'_i}\sigma_{x_i},$$

где $u_{P'_i}$ – квантиль стандартного нормального распределения для вероятности

$$P' = 1 - (1 - P_i)/2$$

При принятых допущениях имеют место соотношения:

$$\overline{x_i} - x_i{}^{min} = x_i{}^{max} - \overline{x_i} = u_{P'_i}\sigma_{x_i}$$

$$\sigma_z = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(F(x_i{}^{max}) - F(\overline{x_i})\right)u_{P'_i}\right]^2}$$

где $F(x_i{}^{max})$, $F(\overline{x_i})$ - значения результатов расчетов, полученные для максимального значения i-го исходного параметра (при средних значениях остальных параметров) и для среднего значения всех параметров:

$$F(\overline{x_i}) = F(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$$

$$F(x_i{}^{max}) = F(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_{i-1}}, x_i{}^{max}, \overline{x_{i+1}}, \dots, \overline{x_n})$$

В случае, если доверительные вероятности для параметров расчета x_i и запаса прочности заданы одинаковыми:

$$P'_1 = P'_2 = \ldots = P'_n = P$$

то можно использовать следующее соотношение:

$$\Delta Z = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(F(x_i^{\max}) - F(\overline{x_i})\right)^2} \quad (4)$$

где ΔZ - погрешность запаса прочности.

При этом, в случае использования для задания погрешностей правила «трех сигм» вероятность безотказной работы балки составит $P = 0{,}99865$.

Если, сохраняя допущения 3 и 4, заменить допущения 1 и 2 (о независимости и нормальном распределении случайных величин) на допущение 5 о том, что все случайные исходные данные xi могут изменяться только строго в пределах от $x_i^{\min}$ до $x_i^{\max}$, то можно получить зависимость для расчета погрешности результатов наихудшего случая:

$$\Delta Z = \sum_{i=1}^{n}\left|F(x_i^{\max}) - F(\overline{x_i})\right|$$

В общем случае, если для части случайных исходных данных можно принять допущение 2, а для других – допущение 5, используется следующая зависимость:

$$\Delta Z = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(F(x_i^{\max}) - F(\overline{x_i})\right)^2} + \sum_{j=m+1}^{n}\left|F(x_j^{\max}) - F(\overline{x_j})\right|$$

При проведении реальных вычислений полученный результат (19) означает, что для оценки погрешности расчета помимо среднего значения результата $\overline{Z} = F(\overline{x})$ должны быть вычислены $\mathrm{F}(\mathrm{x}_\mathrm{i}^{\max})$ (или $\mathrm{F}(\mathrm{x}_\mathrm{i}^{\min})$) для каждой i-й случайной величины. Таким образом, длительность расчетов возрастает пропорционально первой степени количества случайных исходных данных. Заметим, что при отказе от допущения 4 (о независимости погрешностей, вносимых различными исходными данными) длительность расчетов возрастала бы экспоненциально при увеличении числа учитываемых случайных исходных данных.

В данном домашнем задании все исходные данные будут приняты нормально распределенными, что позволяет записать:

$$\Delta Z = u_P \sigma_z = \sqrt{\Delta M_R{}^2 + \Delta M_N{}^2}$$

где ΔM_R и ΔM_N вычисляются по зависимостям аналогичным зависимости (4):

$$\Delta M_R = \sqrt{\sum_i \left(M_{R_i} - \overline{M_R}\right)^2}$$

$$\Delta M_N = \sqrt{\sum_i \left(M_{N_i} - \overline{M_N}\right)^2}.$$

Из этих зависимостей, в частности, следует, что уменьшение погрешностей как нагрузки, так и прочностных параметров уменьшает необходимый запас прочности, поэтому эти погрешности следует, по возможности, уменьшать.

Уравнение (3) при этом примет вид

$$\overline{M_R} - \overline{M_N} = \sqrt{\Delta M_R{}^2 + \Delta M_N{}^2}$$

или

$$\left(\overline{M_R} - \overline{M_N}\right)^2 = \Delta M_R{}^2 + \Delta M_N{}^2 \qquad (5)$$

В случае, если требуется провести расчет при

$$P \neq P'_1 = P'_2 = \ldots = P'_n$$

Уравнение (5) примет вид

$$\frac{u_{P'_i}}{u_P}\left(\overline{M_R} - \overline{M_N}\right)^2 = \Delta M_R{}^2 + \Delta M_N{}^2. \qquad (6)$$

При этом с повышением заданной вероятности безотказной работы прочность конструкции при неизменной нагрузке необходимо будет увеличивать.

Заметим, что приведенные зависимости справедливы не только для расчетов на прочность и могут быть использованы и при проведении других видов расчетов при соблюдении соответствующих допущений.

На практике полученные методами теории надежности решения, как правило, все же не учитывают всех источников погрешностей. Поэтому в расчетах обычно используют также коэффициенты запаса, которые в этом случае назначаются минимальными, что оформляется соответствующим стандартом или нормами, принятыми на конкретном предприятии.

2. Постановка задачи и исходные данные

В данном домашнем задании необходимо методами теории надежности произвести проектировочный расчет балки под действием изгибающего момента, для чего определить величину параметра d сечения бвалки при заданных вероятностях безотказной работы $P = 0{,}99865$ и $P = 0{,}99999$. Сделать выводы о влиянии заданной вероятности безотказной работы на требуемые размеры сечения балки.

Каждый вариант домашнего задания образуется сочетанием букв и цифр, каждая из которых позволяет найти в таблицах П.1…П.6 Приложения все необходимые исходные данные.

Все задаваемые величины считать нормально распределенными. Во всех случаях, кроме прочности материала считать симметричный допуск величины равным трем ее среднеквадратическим отклонениям.

В схемах сечений размеры с одинаковыми индексами (например, два размера A_1) считать идентичными, а с разными (например, A_1 и A_2) – считать независимыми случайными величинами. В остальном считать, что приведенные выше допущения 1…4 полностью выполняются.

3. Порядок выполнения домашнего задания

Поскольку при выполнении такого рода расчетов необходимо вычитать близкие значения, во избежание потери точности расчетов результаты промежуточных вычислений округлять не рекомендуется.

1) Расчет допуска предела пропорциональности материала.

Значения погрешностей прочностных параметров материалов в общем случае можно узнать либо из справочников по надежности [2], либо по результатам проведения соответствующих испытаний. Испытания при этом дают намного более надежные результаты, но в рамках данного домашнего задания мы будем пользоваться данными из справочника [2], считая что среднее значение предела пропорциональности материала равно номинальному.

В Таблице П.1 Приложения для материалов приведен придел пропорциональности $\sigma_{0.2}$ и коэффициент вариации прочности (в пределах одной плавки) $\nu_{\text{м}}$. Симметричный допуск предела пропорциональности материала принимаем равным трем его среднеквадратическим отклонениям:

$$\Delta\sigma_{0.2} = 3\nu_{\text{М}}\sigma_{0.2}.$$

2) Расчет прочности конструкции

Для подбора размеров сечения балки необходимо в соответствии с приведенными в Приложении сечениями и соотношениями их размеров построить функцию зависимости прочности (максимального изгибающего момента, который фактически может выдержать конструкция M_R) от размера *d:*

$$M_R(d) = \sigma_{0.2} W_x$$

где момент сопротивления W_x определяется методами теории сопротивления материалов [1].

В зависимости от заданной схемы сечения количество и состав случайных величин, от которых зависит M_R, может изменяться.

Необходимо определить математическое ожидание M_R:

$$\overline{M_R} = M_R(\overline{\sigma_{0.2}}, \overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots)$$

И значения M_R для смещенного значения каждой из переменных:

$$M_{R_1} = M_R(\overline{\sigma_{0.2}} + \Delta\sigma_{0.2}, \overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots)$$

$$M_{R_2} = M_R(\overline{\sigma_{0.2}}, \overline{A_1} + \Delta A_1, \overline{A_2}, \dots.)$$

$$M_{R_3} = M_R(\overline{\sigma_{0.2}}, \overline{A_1}, \overline{A_2} + \Delta A_2, \dots)$$

$$\cdots,$$

на основании которых рассчитывается погрешность M_R:

$$\Delta M_R = \sqrt{\sum_i \left(M_{R_i} - \overline{M_R}\right)^2}.$$

При этом $\overline{M_R}$ и ΔM_R получаются некоторыми функциями от характерного размера d.

3) Расчет нагрузки

Необходимо построить заданную расчетную схему по приведенным в таблице размерам. Далее для заданных в таблице нагрузок определяются реакции в опорах и для чего строится эпюра изгибающего момента [3].

С помощью построенной эпюры определяется зависимость для расчета максимального изгибающего момента в сечении балки $M_N(a, b, c, e, P, q, M)$.

В зависимости от заданной схемы балки и соотношения размеров количество и состав случайных величин, от которых зависит M_N, может изменяться.

Необходимо определить математическое ожидание M_N. В общем случае оно рассчитывается по зависимости:

$$\overline{M_N} = M_N(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{e}, \overline{P}, \overline{q}, \overline{M})$$

Рассчитываются также значения M_N для смещенного значения каждой из переменных:

$$M_{N_1} = M_N(\overline{a} + \Delta a, b, \overline{c}, \dots)$$

$$M_{N_2} = M_N(\overline{a}, \overline{b} + \Delta b, \overline{c}, \dots.)$$

$$M_{N_3} = M_N(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} + \Delta c, \dots)$$

$$\cdots,$$

на основании которых рассчитывается погрешность M_N

$$\Delta M_N = \sqrt{\sum_i \left(M_{N_i} - \overline{M_N}\right)^2}.$$

При этом $\overline{M_R}$ и ΔM_R, в отличие от случая прочности конструкции, будут иметь конкретные числовые значения.

4) Определение необходимого размера сечения при вероятности безотказной работы 0,99865. Решаем относительно d уравнение

$$\left(\overline{M_R} - \overline{M_N}\right)^2 = \Delta M_R{}^2 + \Delta M_N{}^2$$

с использования замены переменной $x = 10^m d^3$, где m – наиболее удобный при решении данного варианта целый показатель степени. Истинным решением полученного квадратного уравнения будет максимальное, так как именно оно соответствует случаю положительной разности $\left(\overline{M_R} - \overline{M_N}\right)$ в левой части уравнения.

Полученный размер d можно округлять только в большую сторону, так как иначе заданное условие соблюдаться не будет.

5) Определение необходимого размера сечения при вероятности безотказной работы 0,99999. Решаем относительно d уравнение

$$\frac{u_{P'_i}{}^2}{u_P{}^2}\left(\overline{M_R} - \overline{M_N}\right)^2 = \Delta M_R{}^2 + \Delta M_N{}^2$$

с использования замены переменной $x = 10^m d^3$, где m – наиболее удобный при решении данного варианта целый показатель степени. Истинным решением полученного квадратного уравнения будет максимальное, так как именно оно соответствует случаю положительной разности $\left(\overline{M_R} - \overline{M_N}\right)$ в левой части уравнения.

Для погрешностей, заданных по правилу «трех сигм» и вероятности безотказной работы 0,99865

$$u_{P'_i} = 3.$$

Для вероятности безотказной работы 0,99999

$$u_P = 4{,}265.$$

И в этом случае полученный размер d можно округлять только в большую сторону, так как иначе заданное условие соблюдаться не будет.

4. Пример решения задачи домашнего задания

Пусть требуется решить задачу варианта Дю$I\gamma D$1

1) Расчет допуска предела пропорциональности материала.

В данном варианте в качестве материала балки задана сталь ВСт5пс со следующими параметрами:

$$\overline{\sigma_{0.2}} = 320\text{МПа};$$

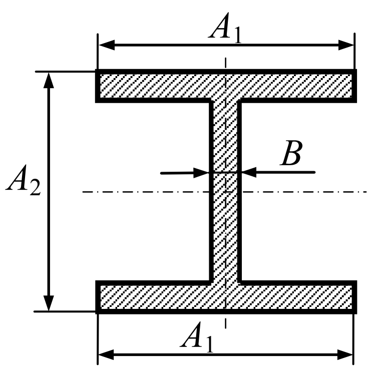
$$\nu_{\text{М}} = 0{,}046.$$

Отсюда получаем:

$$\Delta\sigma_{0.2} = 3\nu_{\text{М}}\sigma_{0.2} = 3 \cdot 0{,}046 \cdot 320 \cdot 10^6(\text{Па}) = 44{,}16 \cdot 10^6(\text{Па})$$

2) Расчет прочности конструкции

Находим в таблицах П.2 и П.4 Приложения схему сечения балки и размеры для нее. Нужная схема представлена на рисунке 2. В данном случае имеются два равных по номинальным значениям, но независимых размера А, которые, не смотря на равенство номинальных размеров, на практике могут иметь различные значения поэтому они должны учитываться отдельно.



Размер $B = d \pm 0{,}01d$ одинаков для всех стенок

$A_1 = 10d \pm 0{,}1d$

$A_2 = 10d \pm 0{,}1d$

Рисунок 2. Заданная схема сечения балки

Момент инерции сечения относительно оси x:

$$J_x = \frac{A_1 {A_2}^3}{12} - \frac{(A_1 - B)(A_2 - 2B)^3}{12} = \frac{A_1 {A_2}^3 - (A_1 - B)(A_2 - 2B)^3}{12}$$

Момент инерции сечения относительно оси x:

$$W_x(A_1, A_2, B) = \frac{2}{A_2} J_x = \frac{A_1 {A_2}^3 - (A_1 - B)(A_2 - 2B)^3}{6A_2}$$

Прочность конструкции будет равна:

$$M_R(\sigma_{0.2}, A_1, A_2, B) = \sigma_{0.2} W_x = \sigma_{0.2} \frac{A_1 {A_2}^3 - (A_1 - B)(A_2 - 2B)^3}{6A_2}$$

$$\overline{M_R} = M_R(\overline{\sigma_{0.2}}, \overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{B}) = \overline{\sigma_{0.2}} \frac{\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}^3 - \left(\overline{A_1} - \overline{B}\right)\left(\overline{A_2} - 2\overline{B}\right)^3}{6\overline{A_2}} =$$

$$= 320 \cdot 10^6 \frac{10d(10d)^3 - (10d - d)(10d - 2d)^3}{6 \cdot 10d} = 2{,}8757333333 \cdot 10^{10} d^3$$

$$M_{R_1} = M_R(\overline{\sigma_{0.2}} + \Delta\sigma_{0.2}, \overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{B}) =$$

$$= (320 \cdot 10^6 + 44{,}16 \cdot 10^6) \frac{10d(10d)^3 - (10d - d)(10d - 2d)^3}{6 \cdot 10d} =$$

$$= 3{,}2725845333 \cdot 10^{10} d^3$$

$$M_{R_2} = M_R(\overline{\sigma_{0.2}}, \overline{A_1} + \Delta A_1, \overline{A_2}, \overline{B}) =$$

$$= 320 \cdot 10^6 \frac{(10d + 0{,}1d)(10d)^3 - (10d + 0{,}1d - d)(10d - 2d)^3}{6 \cdot 10d} =$$

$$= 2{,}9017600000 \cdot 10^{10} d^3$$

$$M_{R_3} = M_R(\overline{\sigma_{0.2}}, \overline{A_1}, \overline{A_2} + \Delta A_2, \overline{B}) =$$

$$= 320 \cdot 10^6 \frac{10d(10d + 0{,}1d)^3 - (10d - d)(10d + 0{,}1d - 2d)^3}{6 \cdot (10d + 0{,}1d)} =$$

$$= 2{,}9148731353 \cdot 10^{10} d^3$$

$$M_{R_4} = M_R(\overline{\sigma_{0.2}}, \overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{B} + \Delta B) =$$

$$= 320 \cdot 10^6 \frac{10d(10d)^3 - (10d - (d + 0{,}005d))(10d - 2 \cdot (d + 0{,}005d))^3}{6 \cdot 10d} =$$

$$= 2{,}8862980379 \cdot 10^{10} d^3$$

$$M_{R_1} - \overline{M_R} = 2{,}8757333333 \cdot 10^{10} d^3 - 3{,}2725845333 \cdot 10^{10} d^3 =$$

$$= 0{,}3968512000 \cdot 10^{10} d^3$$

$$M_{R_2} - \overline{M_R} = 2{,}8757333333 \cdot 10^{10} d^3 - 2{,}9017600000 \cdot 10^{10} d^3 =$$

$$= 0{,}0260266667 \cdot 10^{10} d^3$$

$$M_{R_3} - \overline{M_R} = 2{,}8757333333 \cdot 10^{10} d^3 - 2{,}9148731353 \cdot 10^{10} d^3 =$$

$$= 0{,}0391398020 \cdot 10^{10} d^3$$

$$M_{R_4} - \overline{M_R} = 2{,}8757333333 \cdot 10^{10} d^3 - 2{,}8862980379 \cdot 10^{10} d^3 =$$

$$= 0{,}0105647045 \cdot 10^{10} d^3$$

$$\sum_{i=1}^{4} \left(M_{R_i} - \overline{M_R}\right)^2 =$$

$$= (0{,}0105647045 \cdot 10^{10} d^3)^2 + (0{,}0260266667 \cdot 10^{10} d^3)^2 +$$

$$+ (0{,}0391398020 \cdot 10^{10} d^3)^2 + (0{,}0105647045 \cdot 10^{10} d^3)^2 =$$

$$= 0{,}1598117994 \cdot 10^{20} d^6$$

Окончательно получим для прочности конструкции:

$$\Delta M_R = \sqrt{\sum_{i=1}^{4}\left(M_{R_i} - \overline{M_R}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{0{,}1598117994 \cdot 10^{20} d^6} = 0{,}3997046800 \cdot 10^{10} d^3$$

3) Расчет нагрузки

Составляем расчетную схему балки для заданного варианта по размерам и нагрузкам из Приложения, определяем реакции в опорах и строим эпюры математического ожидания изгибающего момента (рисунок 3).

$$\overline{R_2} = \frac{(\overline{a} + \overline{b}/2)\overline{q}\overline{b} + \overline{e}\overline{P}}{\overline{c}} = \frac{(0{,}7 + 0{,}6/2)9000 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 10000}{1{,}4} = 18142{,}86(\text{Н})$$

$$\overline{R_1} = \overline{R_2} - \overline{q}\overline{b} - \overline{P} = 18142{,}86 - 9000 \cdot 0{,}6 - 10000 = 2742{,}86(\text{Н})$$

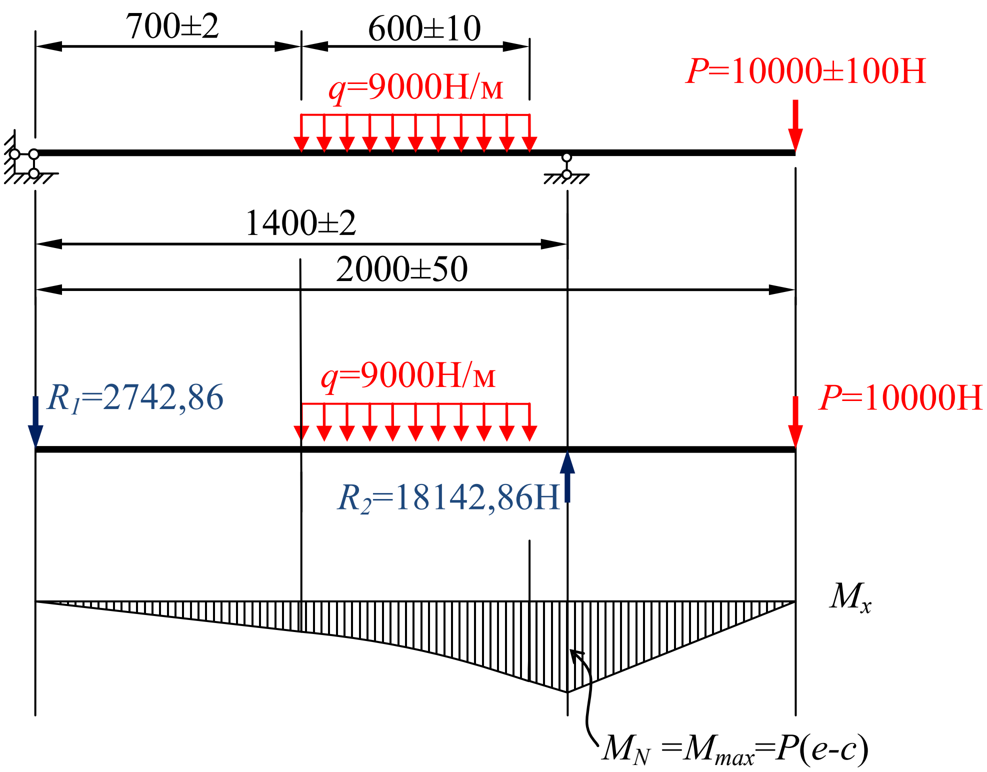


Рисунок 3. Расчетная схема для условия задачи

Анализируя полученную эпюру, определяем, что нагрузка, равная максимальному изгибающему моменту в сечении балки будет определяться зависимостью:

$$M_N = M_N(a, b, c, e, P, q, M) = M_N(c, e, P) = P(e - c)$$

Таким образом, нагрузка фактически зависит только от трех переменных. Рассчитаем ее математическое ожидание и погрешность:

$$\overline{M_N} = M_N\left(\overline{c}, \overline{e}, \overline{P}\right) = \overline{P}(\overline{e} - \overline{c}) = 10000(2 - 1{,}4) = 6000(\text{Н} \cdot \text{м});$$

$$M_{N_1} = M_N\left(\overline{c} + \Delta\text{c}, \overline{e}, \overline{P}\right) = 10000(2 - (1{,}4 + 0{,}002)) = 5980(\text{Н} \cdot \text{м});$$

$$M_{N_2} = M_N\left(\overline{c}, \overline{e} + \Delta e, \overline{P}\right) = 10000((2 + 0{,}05) - 1{,}4) = 6050(\text{Н} \cdot \text{м});$$

$$M_{N_3} = M_N\left(\overline{c}, \overline{e}, \overline{P} + \Delta P\right) = (10000 + 100)(2 - 1{,}4) = 6060(\text{Н} \cdot \text{м});$$

$$\Delta M_N = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(M_{N_i} - \overline{M_N}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(5980 - 6000)^2 + (6050 - 6000)^2 + (6060 - 6000)^2} =$$

$$= 80{,}62257748(\text{Н} \cdot \text{м}).$$

4) Определение необходимого размера сечения при вероятности безотказной работы 0,99865

$$\left(\overline{M_R} - \overline{M_N}\right)^2 = \Delta {M_R}^2 + \Delta {M_N}^2$$

$$(2{,}8757333333 \cdot 10^{10} d^3 - 6000)^2 = (0{,}39970468 \cdot 10^{10} d^3)^2 + 80{,}62257748^2$$

Проведем замену переменной $x = 10^{10} d^3$

$$(2{,}8757333333x - 6000)^2 = (0{,}39970468x)^2 + 80{,}62257748^2$$

$$8{,}269842204x^2 - 34508{,}8x + 35993500 = 0$$

$$(x - 2127{,}525679)^2 = 88245{,}64297$$

$$x = 2127{,}525679 + \sqrt{88245{,}64297} = 2424{,}587361$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{x}{10^{10}}} = \sqrt[3]{\frac{2424{,}587361}{10^{10}}} = 0.006235615(\text{м}) = 6{,}24(\text{мм})$$

5) Определение необходимого размера сечения при вероятности безотказной работы 0,99999.

$$\frac{{u_{P'_i}}^2}{{u_P}^2}\left(\overline{M_R} - \overline{M_N}\right)^2 = \Delta {M_R}^2 + \Delta {M_N}^2$$

$$\frac{3^2}{4{,}265^2}(2{,}8757333333 \cdot 10^{10} d^3 - 6000)^2 = (0{,}39970468 \cdot 10^{10} d^3)^2 + 80{,}62257748^2$$

Проведем замену переменной $x = 10^{10} d^3$

$$\frac{3^2}{4{,}265^2}(2{,}8757333333x - 6000)^2 = (0{,}39970468x)^2 + 80{,}62257748^2$$

$$3{,}931916169x^2 - 17073{,}96143x + 17805264{,}29 = 0$$

$$(x - 2171{,}2011)^2 = 185720{,}55$$

$$x = 2171{,}2011 + \sqrt{185720{,}55} = 2602{,}154172$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{x}{10^{10}}} = \sqrt[3]{\frac{2602,154172}{10^{10}}} = 0.006384267(\text{м}) = 6,39(\text{мм})$$

5. Требования к оформлению домашнего задания

Домашнее задание сдается на листах формата А4 в сброшюрованном и подписанном автором виде. Домашнее задание должно содержать титульный лист, оформленный согласно общим правилам оформления технической документации, и выводы, содержащие полученный результат в явной форме. Обязательно приведение соответствующих варианту задания расчетных схем балки и ее сечения. Также в домашнем задании должны быть приведены исходные данные варианта расчета, основные расчетные зависимости, а также отражены результаты промежуточных вычислений.

Заключение

Полученные при вдумчивом выполнении домашней работы студентом компетенции позволят не только успешно проводить расчеты прочности конструкций наземного оборудования методами теории надежности, но и выполнять по аналогии этими методами другие виды расчетов оборудования стартовых и технических комплексов. В частности тепловые, термомеханические, гидравлические и другие, что позволит студенту в целом стать более востребованным и конкурентоспособным специалистом, способным создавать новые образцы наземного оборудования, отличающиеся максимально возможной на текущем уровне науки и техники эффективностью.

Контрольные вопросы

1. Каково условие работоспособности конструкции, подверженной силовому нагружению?
2. Какие допущения вводятся при расчете погрешностей нагрузки и прочности?
3. Из каких источников можно узнать значения погрешностей прочностных параметров материалов?
4. Как влияет изменение погрешности прочностных параметров на величину необходимого запаса прочности?
5. Как влияют изменение погрешности нагрузки на величину необходимого запаса прочности?
6. Как влияет увеличение заданной вероятности безотказной работы при неизменной нагрузке на необходимый размер сечения рассчитываемой балки?

Список литературы

1. Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. Теория вероятностей: Учебник для вузов (Серия «Математика в техническом университете». Выпуск 16) – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 3-е издание, исправленное, 2004. – 456 с.
2. Надежность в машиностроении: Справочник / Под общ. ред. В.В. Шашкина, Г.П. Карзова – СПб.: Политехника, 1992. – 719 с.
3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учебник для вузов. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 592 с.

Приложение

Таблица П.1

Материалы*

Вариант	Материал (стали)	$\sigma_{0,2}$, МПа	$\nu_м$
А	Ст0	215	0,03
Б	ВСт2пс	230	0,055
В	ВСт3пс	245	0,047
Г	ВСт4пс	265	0,044
Д	ВСт5пс	320	0,046
Е	ВСт6пс	325	0,042
Ж	Сталь 10 (Прокат. Нормализация при 900…920С°. Воздух)	260	0,04
И	Сталь 20 (Прокат. Нормализация)	280	0,035
К	Сталь 30 (Прокат. Нормализация)	320	0,038
Л	09Г2 (Сортовой и фасованный прокат)	305	0,042
М	10Г2С1 (Сортовой и фасованный прокат. Нормализация)	380	0,035
Н	14Г2АФ (Листы. Нормализация)	480	0,038
П	31Х19Н9МВБТ (Поковки, полосы. Закалка при 1150…1180°С, вода. Старение при 700°С)	365	0,032
Р	08Х22Н6Т (Поковки, листы. Закалка при 980…1020°С, вода)	370	0,05
С	ХН35ВТ (Поковки, прокат. Закалка при 1090°С, вода. Старение при 850°С 10 часов. Старение при 700°С 25…40 часов на воздухе или печью)	535	0,04

* - данные взяты из справочника [2]. При решении реальных задач следует уточнить последние доступные данные, так как коэффициент вариации прочности стандартами на соответствующие материалы не нормируется и может изменяться при изменении технологии производства на предприятиях-изготовителях.

Таблица П.2

Схемы сечений балок

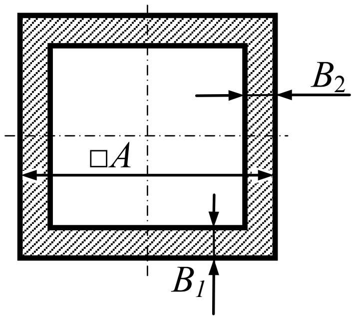
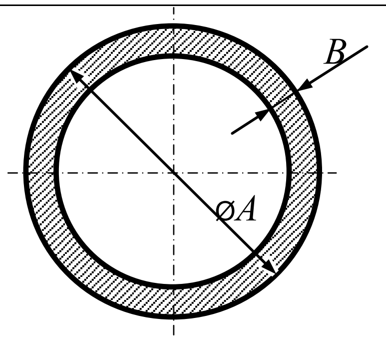
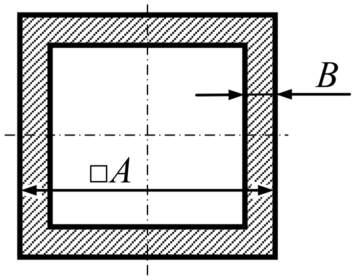
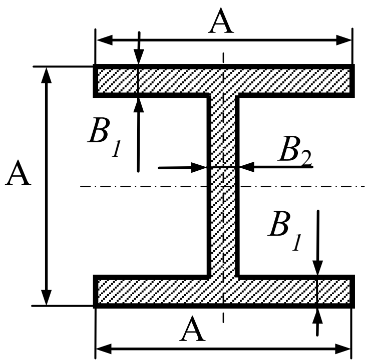
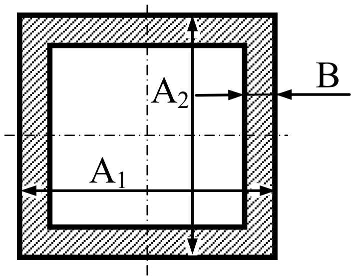
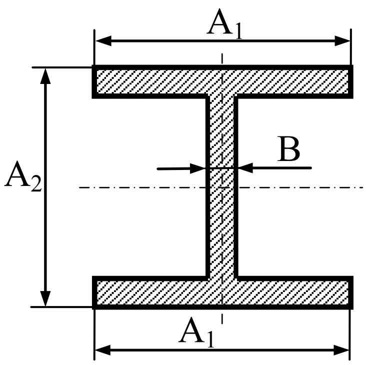
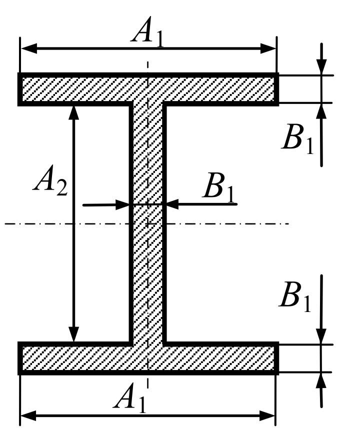
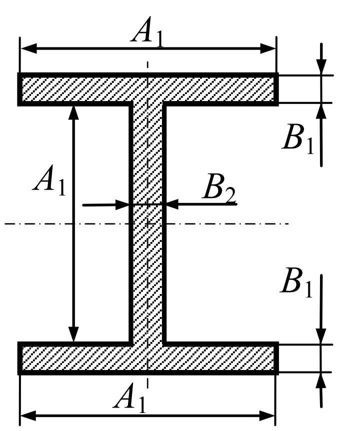
Вариант	Схема	Вариант	Схема
т		ш	
у	 *B* одинаков для всех стенок	э	
ф	 *B* одинаков для всех стенок	ю	 *B* одинаков для всех стенок
ц		я	

Таблица П.3

Схемы нагружения балок

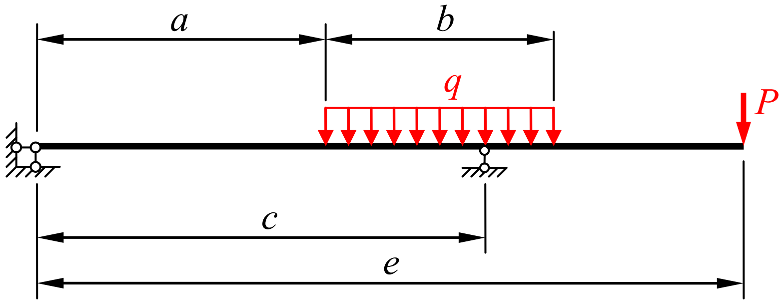
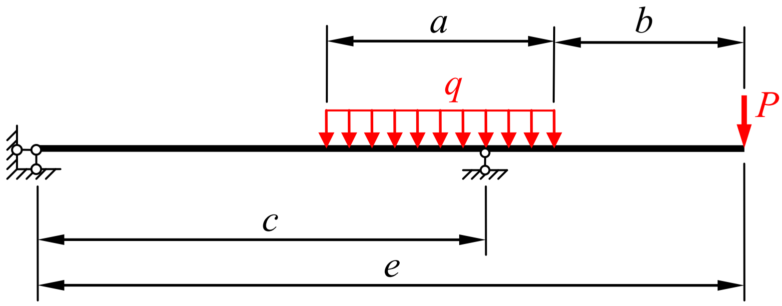
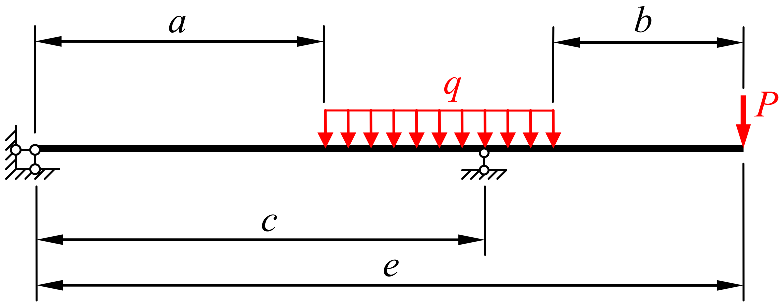
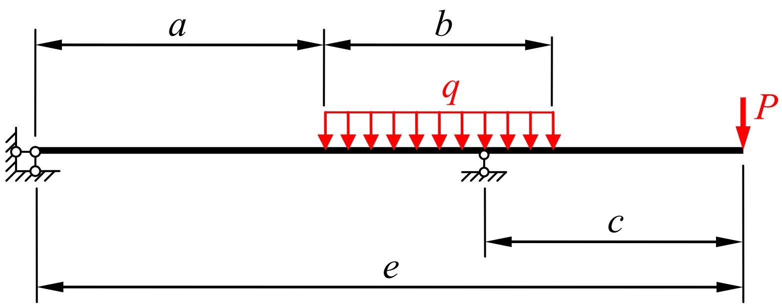
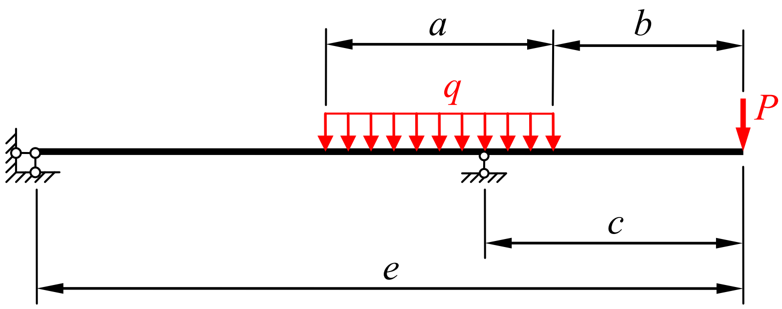
Вариант	Схема
I	
II	
III	
IV	
V	

Таблица П.3 (продолжение)

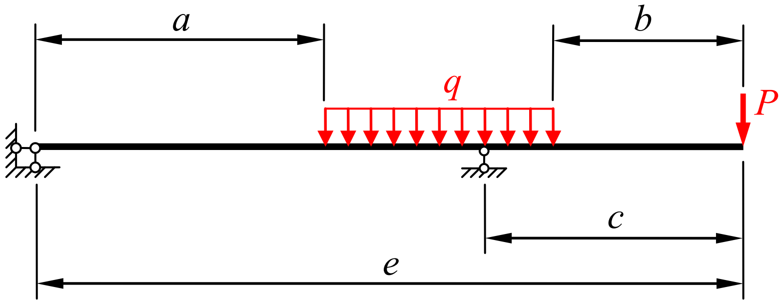
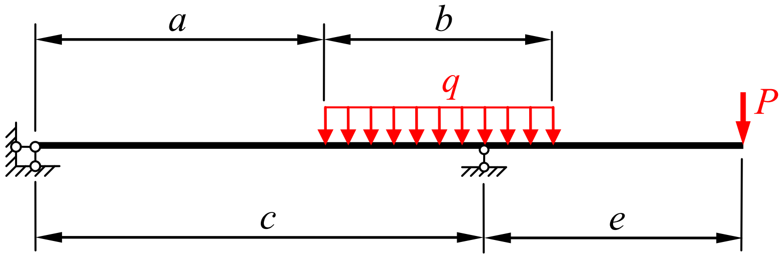
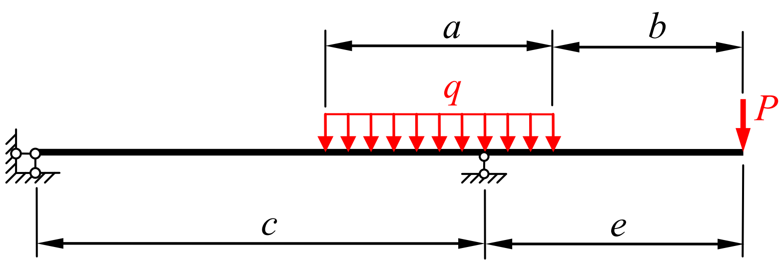
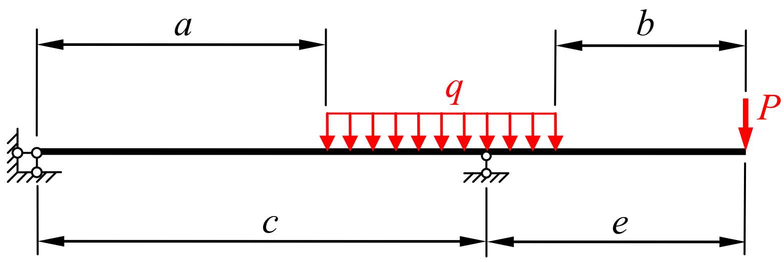
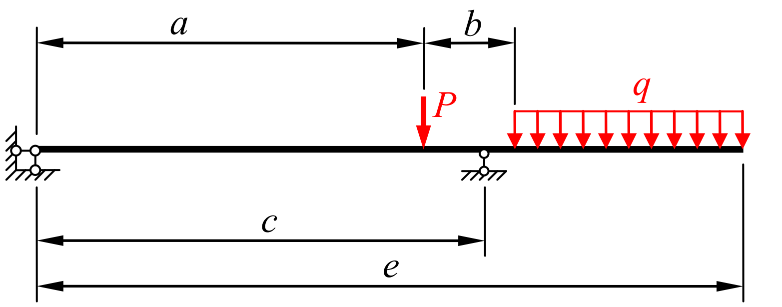
Вариант	Схема
VI	
VII	
VIII	
IX	
X	

Таблица П.3 (продолжение)

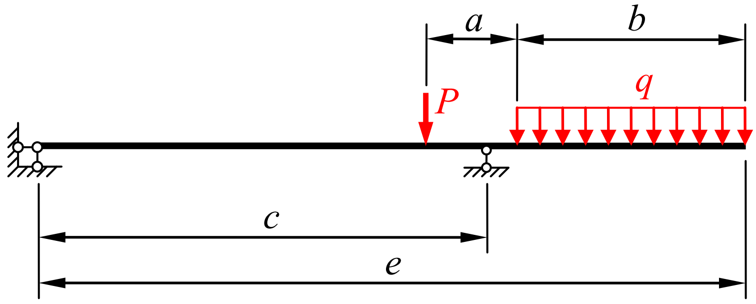
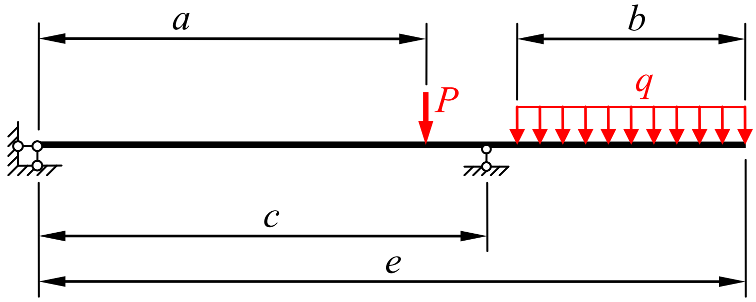
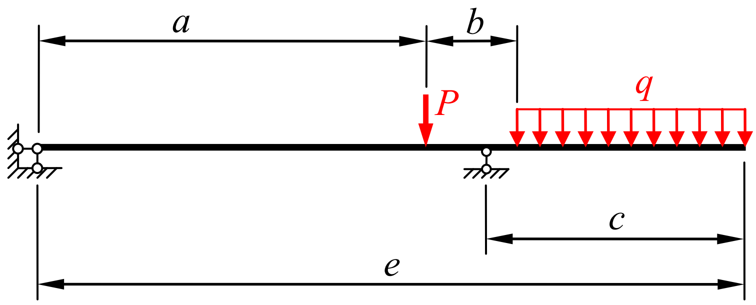
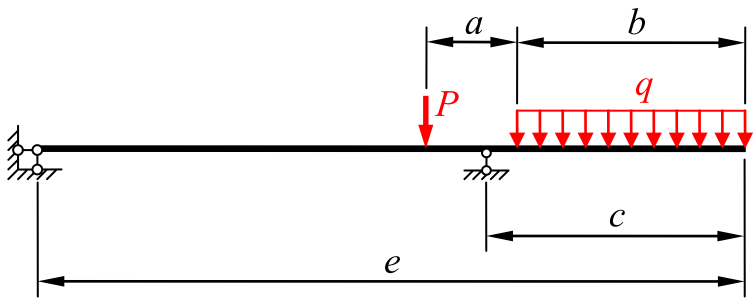
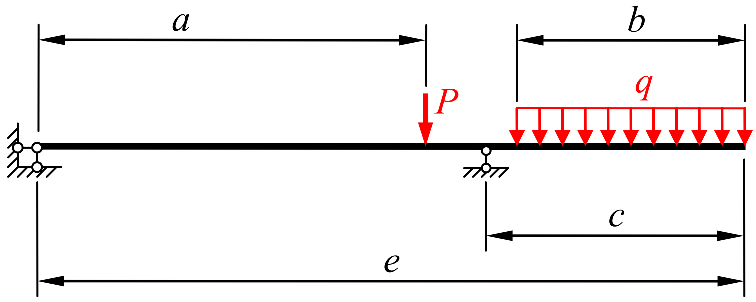
Вариант	Схема
XI	
XII	
XIII	
XIV	
XV	

Таблица П.3 (продолжение)

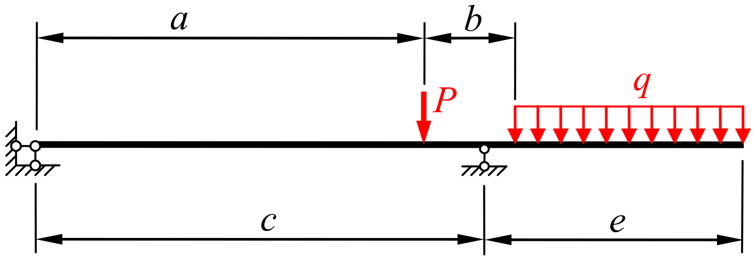
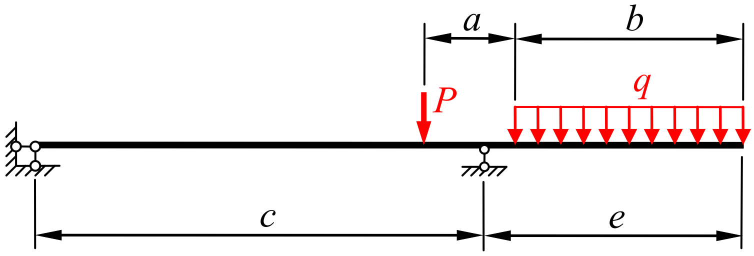
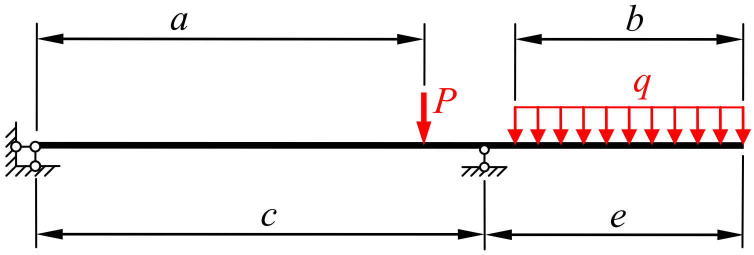
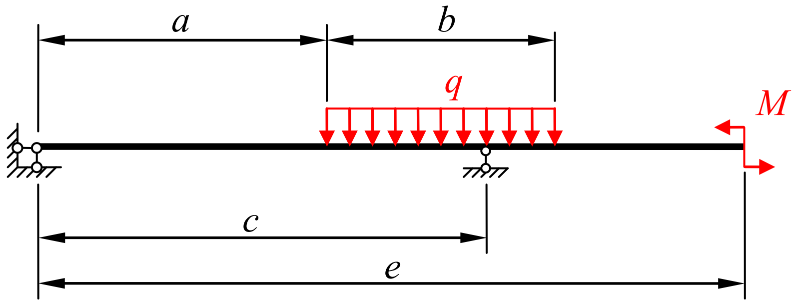
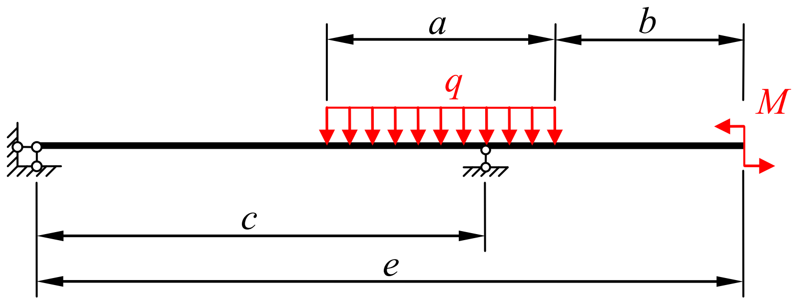
Вариант	Схема
XVI	
XVII	
XVIII	
XIX	
XX	

Таблица П.3 (продолжение)

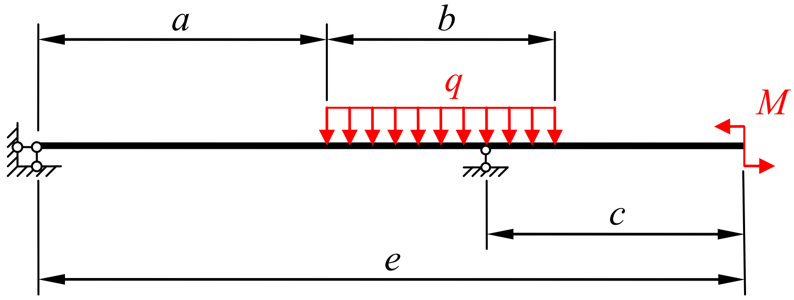
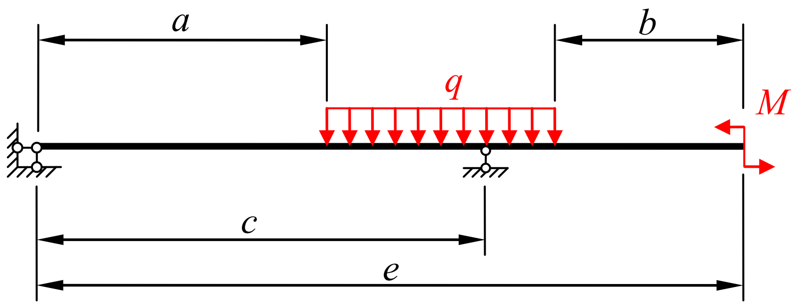
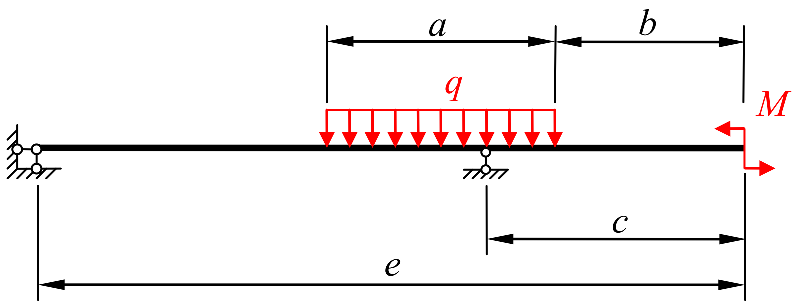
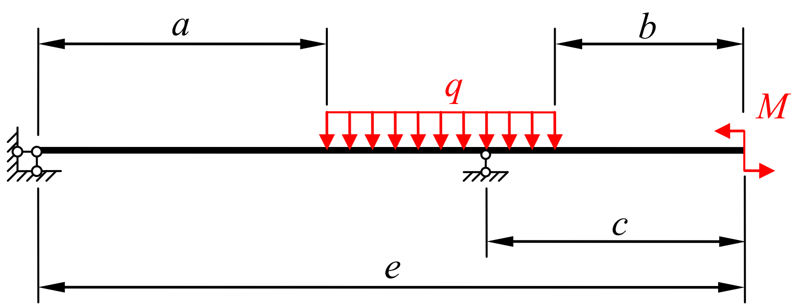
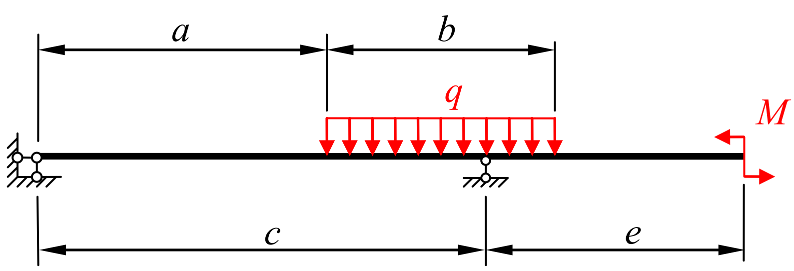
Вариант	Схема
XXI	
XXII	
XXIII	
XXIV	
XXV	

Таблица П.3 (продолжение)

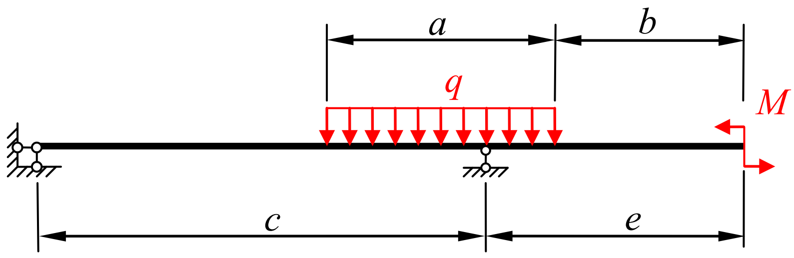
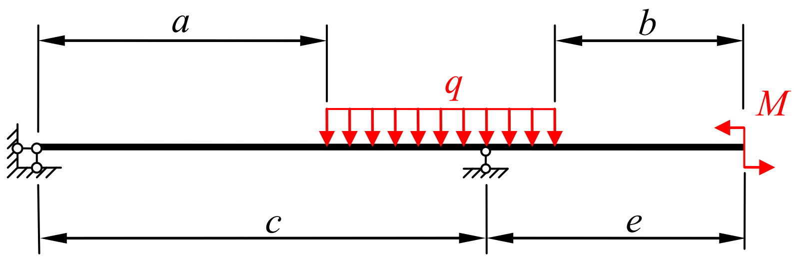
Вариант	Схема
XXVI	
XXVII	

Таблица П.4

Размеры сечений (к схемам в таблице П.2)

Вариант	*A*	*B*	Δ*A*	Δ*B*
α	6*d*	*d*	0,2*d*	0,01*d*
β	15*d*	*d*	0,1*d*	0,02*d*
γ	10*d*	*d*	0,1*d*	0,01*d*
ε	25*d*	*d*	*d*	0.05*d*
η	4*d*	*d*	0,05*d*	0.01*d*
θ	20*d*	*d*	0,5*d*	0.04*d*
λ	*d*	0,2d	0,01*d*	0,003*d*
μ	*d*	0,08d	0,03*d*	0,001*d*
ξ	*d*	0,15d	0,03*d*	0,002*d*
π	*d*	0,1d	0,02*d*	0,002*d*
ψ	*d*	0.05d	0,005*d*	0.0002*d*
ω	*d*	0,2d	0,03*d*	0,001*d*

Таблица П.5

Нагрузки (к схемам в таблице П.3)

Вариант	P, Н	q, Н/м	M, Н·м
D	10000±100	9000±150	6000±200
F	5000±100	8000±100	4000±300
G	4000±100	5000±300	10000±150
F	3000±150	7000±200	3000±100
Q	5000±50	3000±150	8000±150
R	7000±200	2000±100	4000±150
S	8000±300	5000±150	3000±200
U	2000±500	1000±200	500±50
V	9000±300	2000±200	2000±100
W	7000±100	5000±50	2000±400
Y	6000±20	2000±10	5000±500
Z	4000±500	3000±200	9000±50

Таблица П.6

Размеры балки (к схемам в таблице П.3)

Вариант	a, мм	b, мм	c, мм	e, мм
1	700±2	600±10	1400±2	2000±50
2	1000±100	600±5	2000±100	3000±100
3	800±2	400±2	2000±2	2500±5
4	500±10	1100±5	2300±10	3500±2
5	400±10	800±2	2500±5	4000±10
6	600±5	1200±100	2000±10	4500±5
7	2000±100	400±10	3000±5	5000±200
8	500±50	1200±40	1000±50	2500±100
9	700±10	1400±100	1500±50	3000±5
10	1400±100	800±100	1300±100	3500±150
11	600±20	2200±20	2800±50	4000±100
12	2800±300	1300±50	3500±180	5000±10