Московский государственный технический университет
им. Н.Э.Баумана

В.Н.БАРАНОВ

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ И ФОРМЫ ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Рекомендовано редсоветом МГТУ им. Н.Э.Баумана
в качестве учебного пособия

Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана

1998

ББК 30.10
Б24

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. И.П.Бушминский,
д-р техн. наук, проф. Г.Р.Кремнев

Б24 Баранов В.Н. Обработка результатов измерений и формы их представления: Учеб. пособие. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1998. - 44 с., ил.

Рассмотрены основные нормируемые метрологические характеристики средств измерений, даны рекомендации по их использованию и определению числа измерений для обеспечения точности в пределах заданной погрешности. Приведены методики и алгоритм обработки результатов прямых однократных и многократных измерений на ЭВМ, а также формы представления результатов измерений.

Для студентов 2-го и 3-го курсов приборостроительных специальностей.

Табл. 9. Ил. 3. Библиогр. 3 назв.

ББК 30.10

Редакция заказной литературы

Валерий Николаевич Баранов

Обработка результатов измерений и формы их представления

Заведующая редакцией Н.Г.Ковалевская
Редактор Г.А.Нилова
Корректор Л.И.Малютина

Подписано в печать 05.08.98. Формат 60x84/16. Бумага тип. № 2.
Печ.л. 2,75. Усл.печ.л. 2,56. Уч.-изд.л. 2,48.
Тираж 300 экз. Изд. № 36. Заказ 191

Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана.
107005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

ВВЕДЕНИЕ

Профессиональная деятельность инженера включает в себя умение правильно выбрать средства и методы измерений, обеспечивающие получение результата, погрешности которого не превышают заданных границ с необходимой достоверностью. Только при этом условии возможно решение проблемы обеспечения единства измерений, которое позволяет сопоставить результаты измерений, выполненных в различных местах, в разное время и с использованием разнообразных методов и средств измерений (СИ).

В процессе проектно-конструкторской, научно-исследовательской и производственно-эксплуатационной подготовки студенты имеют дело с измерениями, выступая либо как непосредственные участники получения измерительной информации, либо как потребители, заинтересованные в ее точности и достоверности. Для получения достоверного результата измерения и оценки его погрешности студент должен иметь навыки обработки экспериментальных данных. Выбор метода обработки зависит от числа экспериментальных данных (однократные и многократные измерения), законов распределения случайных погрешностей измерений, вида измерений и установленных показателей точности. Выбор способа выражения точности и формы представления результатов измерений определяются назначением измерений, характером использования их результатов и регламентируются соответствующими нормативно-техническими документами (ГОСТ 8.011-72, МИ 1317-86 ГСИ).

Данное учебное пособие предназначено помочь студентам в выполнении требований обеспечения единства измерений в лабораторном практикуме, экспериментальных исследованиях и при решении вопросов метрологического обоснования методов расчета точности и обеспечения взаимозаменяемости элементов и узлов приборных устройств, разрабатываемых в курсовом проекте по дисциплине "Основы конструирования приборов" [1]. В пособии приведены методики обработки результатов однократных и многократных измерений со случайными погрешностями, подчиняющимися законам нормального или равномерного распределений, которые основаны на использовании априорной информации о нормируемых метрологических характеристиках средств измерений. Кроме того, представлены примеры расчетов, алгоритм обработки измерительной информации на ЭВМ и необходимый справочный материал.

Особое внимание уделено использованию единообразных и соответствующих действующим государственным стандартам терминов и определений, норм и показателей точности.

I. НОРМИРУЕМЫЕ МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Оценку погрешностей измерений рассматривают как комплексную задачу в соответствии с ГОСТ 8.009-84 "ГСИ. Нормируемые метрологические характеристики средств измерений".

Результат измерений $A(t)$ в момент времени t можно представить в виде

$$A(t)=f\,[X(t-\tau),\xi_1,\dots,\xi_m,Q], \qquad (I)$$

где $X(t-\tau)$ - измеряемая величина в момент времени $t-\tau$; $f(X)$ - характеристики преобразования СИ; $\xi_1,\dots,\xi_m$ - значения влияющих на измерения величин или неинформативных параметров входного сигнала; τ - время реакции СИ (запаздывание); Q - величина, учитывающая взаимодействие СИ с объектом измерений.

Ограничившись первыми членами разложения Тейлора, выражение для погрешности результата измерения запишем в форме

$$\Delta A(t)=A(t)-X(t)=\frac{\partial A(t)}{\partial f}\Delta f+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial A(t)}{\partial \xi_j}\Delta\xi_j+\frac{\partial A(t)}{\partial t}\tau+\frac{\partial A(t)}{\partial Q}Q+O(\Delta A), \qquad (2)$$

где

$$\Delta f=f-f_{\text{ном}}\ ;\quad \Delta\xi_j=\xi_j-\xi_{j\,\text{ном}}\,.$$

Первый член правой части выражения называют основной погрешностью СИ, обусловленной отличием реальной характеристики преобразования f от номинальной $f_{\text{ном}}$. Второй член содержит дополнительные погрешности, обусловленные изменением влияющих величин и неинформативных параметров входного сигнала относительно их номинальных значений. Третий член учитывает динамические погрешности, связанные с инерционностью СИ и скоростью изменения входного сигнала. Четвертый член содержит погрешность, которая образуется в результате взаимодействия СИ с объектом измерений.

Согласно ГОСТ 8.009-84, метрологические характеристики СИ используют для определения результатов измерений и расчетной оценки характеристик инструментальной составляющей погрешностей измерений, расчета метрологических характеристик каналов измерительных систем, оптимального выбора СИ, а также для контроля СИ на соответствие установленным нормам. В эксплуатационной и нормативно-технической документации на СИ должны быть изложены методы расчета инструментальной составляющей погрешности в реальных условиях применения на основе выбора из следующего комплекса нормируемых метрологических характеристик.

I. Характеристики для определения результата измерений (без введения поправки). Среди этих характеристик нормируются номинальные значения или функции преобразования, цена деления шкалы, вид выходного кода, число разрядов кода, цена единицы наименьшего разряда кода и т.д.

2. Характеристики погрешностей средств измерений. Имеются в виду предельные значения систематической Δ_c и случайной составляющих в виде предела $\sigma(\mathring{\Delta})$ допускаемых значений среднего квадратического отклонения (СКО), а также случайной составляющей погрешности $\mathring{\Delta}_\Gamma$ от гистерезиса, в качестве которого используется предел (без указания знака) вариации H_0 выходного сигнала или показания СИ.

Повышение качества решения многих метрологических и измерительных задач достигается в том случае, если в технической документации приведены нормированные функции или плотности распределения систематической и случайной составляющих погрешностей СИ. Использование этих распределений, а также значений математического ожидания $M(\Delta_c)$ и оценок СКО систематической $\tilde{б}(\Delta_c)$ и СКО случайной $\tilde{б}(\mathring{\Delta})$ погрешностей позволяет определить доверительные интервалы для погрешности СИ. Иногда погрешности измерений влияющих величин представлены СКО $S(\xi_1), \ldots, S(\xi_m)$, тогда погрешность поправки $\Delta(\nabla)$, которая возникает вследствие неточного знания изменений влияющих величин, равна

$$\Delta(\nabla) = 2S(\nabla);$$

$$S(\nabla) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial A}{\partial \xi_j}\right) S^2(\xi_j)}, \tag{3}$$

где $\nabla(\nabla)$ – доверительная граница погрешности поправки; $S(\nabla)$ – СКО погрешности поправки, вводимой в результат измерения.

3. Характеристики чувствительности СИ к влияющим на измерения величинам. При нормировании устанавливают номинальную функцию влияния $\Psi(\xi)$ и пределы допускаемых отклонений от нее – верхнюю $\Psi_в(\xi)$ и нижнюю $\Psi_н(\xi)$ граничные функции влияния, которые служат для определения поправок к результатам измерений.

Для СИ конкретного типа ГОСТ 8.009-84 регламентирует два вида моделей погрешностей.

Модель I:

$$(\Delta_{MI})_1 = \Delta_c * \mathring{\Delta} * \mathring{\Delta}_Г * \sum_{j=1}^{l} \Delta_{\xi_j} * \Delta_d, \tag{4}$$

где Δ_c – систематическая составляющая основной погрешности СИ; $\mathring{\Delta}$ – случайная составляющая основной погрешности; $\mathring{\Delta}_Г$ – случайная составляющая основной погрешности, обусловленная гистерезисом; $\sum_{j=1}^{l} \Delta_{\xi_j}$ – объединение j-х дополнительных погрешностей, обусловленных действием влияющих величин и неинформативных параметров входного сигнала СИ; Δ_d – динамическая погрешность СИ; l – число дополнительных погрешностей.

Объединение погрешностей (символ "*") заключается в статистическом суммировании их математических ожиданий и дисперсий с целью определения точечных и интервальных характеристик,

в частности, интервала, в котором с любой заданной вероятностью находится погрешность измерений.

Модель 2:

$$(\Delta_{MI})_2 = \Delta * \sum_{j=1}^{l} \Delta_{\xi_j} * \Delta_d, \tag{5}$$

где Δ – основная погрешность СИ (без разделения ее на составляющие).

В данном случае объединение погрешностей состоит в арифметическом суммировании модулей их наибольших возможных значений (пределов допускаемых значений погрешностей). Естественно, что для подавляющего числа измерений этот интервал существенно превышает интервал, в котором действительно находится инструментальная составляющая погрешности. Данную модель рекомендуется применять для средств измерений при несущественных случайных составляющих погрешности или в том случае, если $\sum_{j=1}^{l} \Delta_{\xi_j}$ и Δ_d настолько малы, что инструментальную составляющую погрешности можно принять равной основной погрешности СИ.

Основную погрешность в этом случае определяют по формуле

$$\Delta = \Delta_c + \frac{H_0}{2}, \tag{6}$$

где H_0 – вариация показаний СИ в нормальных условиях.

Приближая значение вероятности попадания в доверительный интервал к единице, можно по нормируемым метрологическим характеристикам данного типа получить оценку инструментальной составляющей погрешности результата измерений с любой степенью достоверности P.

2. КЛАССЫ ТОЧНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Под классом точности понимают обобщенную характеристику СИ, определяемую пределами допускаемых погрешностей (основной и дополнительной), а также другими их свойствами, влияющими на погрешность измерения. В ГОСТ 8.401-80, регламентирующем общие положения деления СИ по классам точности, указано, что он не распространяется на СИ, у которых отдельно нормируются систематические и случайные составляющие основной погрешности и другие функции влияния и динамические характеристики, предусмотренные ГОСТ 8.009-84.

Классы точности СИ указывают в документации и обозначают их на циферблатах, щитах, или корпусах измерительных приборов.

Если допускаемая основная погрешность СИ (абсолютная либо относительная) представлена в виде графика, таблицы или специальной функциональной зависимости, то классы точности обозначают прописными буквами латинского алфавита либо римскими цифрами. Классы точности, которым соответствуют меньшие пределы допускаемых погрешностей, обозначают буквами, находящимися ближе к началу алфавита, или меньшими цифрами. Нормированные пределы допускаемых погрешностей (основной и дополнительных) выражают в форме абсолютных или относительных погрешностей в зависимости от характера их изменения (в пределах диапазона измерений), назначения и условий применения СИ.

Пределы допускаемой абсолютной основной погрешности выражаются одним значением или в виде суммы двух членов:

$$\Delta_a = \pm a ; \quad \Delta_a = X_n - X = \pm a , \quad \Delta_a = \pm (a + bX) . \qquad (7)$$

Например, для генератора Г3-36 $\Delta = \pm (2 + 0{,}03 f)$ Гц, где X_n - показания СИ; a и b - положительные числа, не зависящие от X; X - истинное значение измеряемой величины на входе или выходе СИ.

Под истинным значением понимают такое значение величины, которое идеальным образом отражает свойство измеряемого объекта. Истинное значение измеряемой величины известно лишь в редких случаях (например, сумма углов треугольника равна 180° и т.д.), поэтому вместо него используют найденное экспериментальным путем, с достаточно высокой для данных целей точностью, так называемое действительное значение.

Следует заметить, что абсолютная погрешность не позволяет сравнивать точность приборов, имеющих различный диапазон измерений.

Если границы абсолютных погрешностей (в единицах измеряемой величины) остаются практически неизменными, применяют форму приведенных погрешностей.

Пределы допускаемой приведенной основной погрешности определяют по формуле

$$\gamma = \frac{\Delta_a 100}{X_N} = \pm q \% . \qquad (8)$$

где q - отвлеченное положительное число, выбираемое из ряда: $1 \cdot 10^n$; $1{,}5 \cdot 10^n$; $2{,}5 \cdot 10^n$; $4 \cdot 10^n$; $5 \cdot 10^n$; $6 \cdot 10^n$ ($n = 1; 0; -1; -2, \ldots$); X_N - нормирующее значение, которое устанавливается равным:

большему из модулей пределов измерения для равномерных шкал, имеющих постоянную цену деления (или степенную), а также для измерительных преобразователей, если нулевое значение входного или выходного сигналов находится на краю или вне диапазона измерений;

сумме модулей пределов измерений, если нулевая отметка находится внутри диапазона измерений;

разности пределов измерений, если используется шкала с условным нулем (например, СИ температуры).

Для СИ с неравномерной шкалой X_N принимают равным всей длине шкалы или ее части, соответствующей диапазону измерений. В этом случае при обозначении класса точности (приведенной основной погрешности) ставят отметку снизу, например: $\overset{0,5}{\vee}$; $\overset{2,5}{\vee}$

Пределы допускаемой относительной основной погрешности равны

$$\delta = \frac{\Delta_a}{X_n} \cdot 100 = \pm q \% . \qquad (9)$$

Чтобы отличить относительную погрешность от приведенной, на СИ ее обводят кружком.

Относительная погрешность, выраженная в процентах, удобна тем, что позволяет сравнивать точность показаний приборов независимо от значений измеряемой величины.

Для ряда СИ, например имеющих шкалу с условным нулем, δ определяется в соответствии с формулой

$$\delta = \pm \left[c + d \left(\left| \frac{X_k}{X_n} \right| - 1 \right) \right] \% , \qquad (10)$$

где X_k - бóльший по модулю из пределов измерений.

В этом случае класс точности обозначают через параметры c и d, которые разделены косой чертой, причем их значения выбирают аналогично q. Например, класс точности 0,02/0,01 означает предел допускаемой относительной основной погрешности, равный:

$$\delta = \pm \left[0{,}02 + 0{,}01\left(\left|\frac{X_k}{X}\right| - 1\right)\right] \% .$$

3. ВЫБОР СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Выбор СИ зависит от решаемой измерительной задачи, в которой анализируют следующие факторы: характер и вид измеряемой величины; метод измерения; диапазон измерений и характеристики погрешностей средств измерений; условия проведения измерений; допускаемую погрешность измерений; стоимость средств измерений; простоту эксплуатации СИ и др.

На качество измерения наиболее существенно влияет погрешность результата измерения и особенно та ее доля, которая приходится на погрешность используемого СИ. Суммарную погрешность Δ сравнивают с допускаемой погрешностью измерения:

$$\Delta_{\Sigma} = \Delta_{си} + \Delta_{м} + \Delta_{усл} + \Delta_{оп} \leq \Delta_{д}, \qquad (11)$$

где $\Delta_{си}$ – предел допускаемой погрешности используемых СИ; $\Delta_{м}$ – предельная погрешность метода измерений; $\Delta_{усл}$ – предельная погрешность, обусловленная влиянием внешних факторов; $\Delta_{оп}$ – предельная погрешность оператора; $\Delta_{д}$ – допускаемая погрешность измерения.

Пренебрегая погрешностями метода и оператора и учитывая возможность изменения погрешности СИ под воздействием влияющих величин до 35 %, целесообразно СИ выбирать с погрешностью, не превышающей

$$\Delta_{си} = \Delta_{д} - 0{,}35\,\Delta_{д} = 0{,}65\,\Delta_{д}. \qquad (12)$$

В соответствии с требованиями ГОСТ 8.051-73 предельная погрешность измерения линейных размеров от 1 до 500 мм $\Delta_{д} = 2S_{\Delta}$, где S_{Δ} – СКО погрешности измерений. Задавая значения $\Delta_{си}$, вычисляют Δ и проверяют выполнение условия $\Delta \leq \Delta_{д}$.

Если в результате однократного наблюдения составляющие погрешности измерения неизвестные величины, результат измерения можно представить в следующем виде: $A \pm \Delta$, где A – результат измерения в единицах измеряемой величины.

4. ВВЕДЕНИЕ ПОПРАВОК НА СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ

Результаты наблюдений, содержащие систематические погрешности, называют неисправленными и обозначают $A_{н}$. Систематические погрешности являются детерминированными величинами, поэтому всегда могут быть вычислены и исключены из результатов измерений. Эта поправка может быть аддитивной или мультипликативной, числом или функцией, задаваться графиком, таблицей или формулой. Поэтому необходимо выбрать один из возможных вариантов исправления результатов наблюдений.

1. Результат наблюдения суммируют с поправкой, равной систематической погрешности по величине и обратной ей по знаку, $\nabla_{а} = -\nabla_{с}$.

Заметим, что постоянную систематическую погрешность можно определить, если в распоряжении имеется измерительное средство более высокого класса точности или имеется возможность воспроизвести измеряемую величину заданного размера. Действительно, разность между средним арифметическим результатом измерений, полученных с помощью рабочего СИ, и результатом измерений той же величины с помощью образцового СИ может служить оценкой систематической погрешности.

2. Результат наблюдения домножают на поправочный множитель $\nabla_{м}$. Например, при измерении ЭДС E источника питания с внутренним сопротивлением R_i показание вольтметра определяют по формуле

$$U = \frac{R}{R_i + R}\,E,$$

где R – внутреннее сопротивление вольтметра.

Таким образом, даже при простейшем измерении вольтметром ЭДС его показание следует умножать на поправочный множитель $\nabla_{м} = (R_i + R)/R$, определяемый расчетным путем.

3. Поправки, определяемые экспериментально, задают в виде графиков, таблиц или в виде формул.

При использовании многократных измерений поправку можно не вводить в каждый результат наблюдений, а ввести ее после обработки неисправленных результатов непосредственно в среднее арифметическое неисправленных результатов. Необходимо только учитывать, что если поправка имеет дисперсию $S^2(\nabla)$, то дисперсия исправленного результата $S^2(A)$ равна сумме дисперсий неисправленных результатов наблюдений $S^2(A_н)$ и дисперсии поправки, т.е. $S^2(A)=S^2(A_н)+S^2(\nabla)$. Следовательно, вследствие введения поправки уменьшается систематическая погрешность, но увеличивается случайная, и при некоторых условиях суммарная погрешность может не только не уменьшиться, но и увеличиться.

Границы тех значений поправок, которые следует вводить в результаты измерений для получения более достоверных сведений об истинном значении физической величины, зависят от отношений дисперсий $S^2(\nabla)/S^2(A_н)$.

Если отношения средних квадратических отклонений поправки и результатов неисправленных наблюдений равны I; 0,5; 0,25, то условия целесообразности введения поправок будут иметь соответственно следующий вид [3]:

$$\nabla_{(1)}>0{,}41t_P\,S(A_н);\quad \nabla_{(0,5)}>0{,}12t_P S(A_н);\quad \nabla_{(0,25)}>0{,}03t_P\,S(A_н), \qquad (I3)$$

где t_P определяют с некоторой вероятностью P по таблицам нормального распределения или распределения Стьюдента.

Из соотношений (I3) ясно, что если дисперсии результатов и поправки одинаковы, то введение поправки целесообразно при условии, что ее значение больше примерно половины доверительной границы для случайной погрешности измерения.

При малых дисперсиях поправок может показаться, что введение любой поправки повышает достоверность результата.
В практических же расчетах погрешность результата обычно выражается не более чем двумя значащими цифрами, поэтому поправка, если она меньше пяти единиц разряда, следующего за последним десятичным разрядом погрешности результата, все равно будет потеряна при определении, и вводить ее не имеет смысла.

<u>Определение доверительных границ неисключенных систематических погрешностей</u>. Неисключенная систематическая погрешность

(кратко - неисключенная погрешность) - погрешность результата измерений, обусловленная погрешностью вычисления и введения поправки на влияние систематической погрешности или небольшой систематической погрешностью, поправка на действие которой не введена вследствие малости.

Сумма неисключенных систематических погрешностей θ_j при числе слагаемых $m<3$

$$\theta=\pm\sum_{j=1}^{m}|\theta_j|. \qquad (I4)$$

При числе слагаемых $m>4$ для вычислений используют формулу

$$\theta(P)=K_c\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\theta_j^2}, \qquad (I5)$$

где K_c - коэффициент зависимости неисключенных систематических погрешностей от выбранной доверительной вероятности P при равномерном распределении. При $P=0{,}99$ $K_c=1{,}4$; при $P=0{,}95$ $K_c=1{,}1$.

5. ВЫБОР ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ

Число измерений определяется в основном требованиями к точности результата измерений. В погрешности результата измерений кроме случайной составляющей может присутствовать и систематическая. Путем увеличения числа измерений можно уменьшить случайную погрешность измерений. Действие систематической погрешности сводится к минимуму, как уже было отмечено, путем введения поправок. Погрешности поправок и неподдающиеся исключению систематические погрешности составляют неисключенные систематические погрешности θ. Поэтому случайную погрешность имеет смысл уменьшать до значений, зависящих от границ неисключенных систематических погрешностей.

Относительное изменение погрешности многократного измерения по сравнению с погрешностью однократного измерения можно оценить по формуле [2]

$$\gamma(N) = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{\theta}{S}\right)^2 + \frac{1}{N}}{\frac{1}{3}\left(\frac{\theta}{S}\right)^2 + 1}}, \qquad (16)$$

где S – значение выборочного СКО случайной погрешности.

Анализ формулы (16) показывает, что, например, при соотношении $\theta/S = 1{,}5$ достаточно, чтобы $N = 10$. Это дает уменьшение суммарной погрешности результата измерений на 20 %. При $0{,}8 \leqslant \frac{\theta}{S} \leqslant 8$ погрешность результата измерений содержит как случайные, так и неисключенные систематические погрешности. Если неисключенные систематические погрешности по сравнению со случайными пренебрежимо малы, $\theta/S < 0{,}8$, то погрешность результата характеризуется только доверительными границами случайной погрешности. Если пренебрежимо малы случайные погрешности, $\theta/S > 8$, то погрешность результата измерений характеризуется неисключенными систематическими погрешностями.

П р и м е р 1. Погрешность результата измерения напряжения при проведении однократного измерения составляла не менее $\Delta = \pm 0{,}4$ мВ. Известно также, что систематическая составляющая погрешности $\theta = 0{,}15$ мВ, а предел случайной составляющей $\mathring{\Delta}_P = 0{,}1$ мВ. Определить число измерений, при которых погрешность результата измерений, в основном, определялась бы неисключенными систематическими погрешностями.

Р е ш е н и е. Поставленное условие может быть выполнено при $\frac{\theta}{\mathring{\Delta}_P} > 8$. В результате N измерений $\mathring{\Delta}_P$ должно уменьшиться до значения $\mathring{\Delta} = \frac{0{,}1}{\sqrt{N}} = 0{,}019$ мВ. Следовательно, $N \geqslant 28$.

Максимальное число измерений, которое необходимо выполнить, чтобы случайную погрешность сделать пренебрежимо малой по сравнению с неисключенной систематической погрешностью, равно [2]:

$$N = 64\left(\frac{S}{\theta}\right)^2. \qquad (17)$$

6. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ ОДНОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ И ФОРМЫ ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Как было отмечено выше, однократное измерение целесообразно в том случае, если случайная составляющая погрешности измерений пренебрежимо мала по сравнению с неисключенными систематическими погрешностями. При таком измерении показания СИ часто являются результатом измерения, а погрешность состоит из погрешности СИ, погрешности метода и погрешности оператора. Если суммарная погрешность однократного измерения удовлетворяет требуемой точности результата измерения, однократное прямое измерение можно считать приемлемым.

Погрешности средства измерений, метода и оператора могут состоять из неисключенных систематических, выраженных границами $\pm\theta$ или доверительными границами $\pm\theta(P)$, и случайных погрешностей в виде СКО $\tilde{\sigma}(\Delta_c)$ или доверительных границ $\pm\Delta_c(P)$.

Доверительные границы определения случайной составляющей систематической погрешности результата измерения

$$\Delta_c(P) = z_{P/2}\,\tilde{\sigma}(\Delta_c), \qquad (18)$$

где $\tilde{\sigma}(\Delta_c) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} S_j^2}$ – оценка СКО систематической составляющей погрешности измерения; S_j – СКО результата определения j-й составляющей систематической погрешности (СИ, метода измерения, оператора); $z_{P/2} = P$ – процентная точка нормированной функции Лапласа.

Следует заметить, что в метрологии принято СКО выражать одной значащей цифрой, например: 8; 0,5; 0,007. Две значащие цифры, например 27; 0,016, оставляют при особо точных измерениях и в тех случаях, когда значащая цифра старшего разряда меньше 4 (в промежуточных вычислениях сохраняется на одну значащую цифру больше). Вследствие этого при квадратичном суммировании слагаемыми $S_j \leqslant 1/3\,\tilde{\sigma}(\Delta_c)$ можно пренебречь.

В тех случаях, когда случайные погрешности определения систематических ошибок (СИ, метода, оператора) представлены доверительными границами $\Delta_{c_j}(P)$, то

$$\Delta_c(P) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \Delta^2_{c_j}(P)}. \tag{19}$$

Если те же погрешности представлены доверительными границами, соответствующими разным вероятностям, то сначала определяют оценку СКО систематической составляющей погрешности по формуле

$$\tilde{\sigma}(\Delta_c) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{m} \Delta^2_{c_j}(P)}{z^2_{P_j/2}}},$$

а затем вычисляют доверительные границы $\Delta_c(P)$ по формуле (18).

Следует иметь в виду, что рассчитанные таким образом доверительные границы будут несколько завышены.

Если S_j предварительно определяется на основе экспериментальных данных, то

$$\Delta_c(P) = t\sqrt{\sum_{j=1}^{m} S_j^2}, \tag{20}$$

где t – коэффициент, зависящий от доверительной вероятности P и числа измерений. В качестве t можно использовать коэффициент Стьюдента, соответствующий числу степеней свободы той составляющей, оценка которой получена при наименьшем числе измерений.

Если при измерении доступна только информация о классе точности средства измерений, определить закон распределения вероятности показания A невозможно. Необходимо заметить, что класс точности является обобщенной характеристикой средств измерений. С его помощью можно определить не точность конкретного измерения, а лишь указать пределы, в которых находится значение измеряемой величины. В этих условиях гипотеза о равномерном распределении вероятности измеряемой величины на некотором интервале ее значений является универсальным способом

учета дефицита информации. Центрированный закон равномерной плотности распределения вероятности показан на рис. I. Из рисунка ясно, что среднее значение $A = 0$. Значение величины, аналогичной оценке дисперсии,

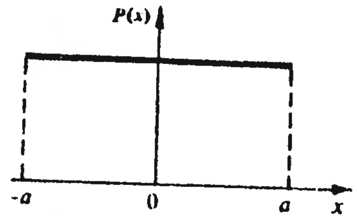

Рис. I

$$\sigma_x^2 = a^2/3.$$

Обычно при использовании равномерного закона распределения вероятности в качестве математической модели только для учета дефицита информации величину, аналогичную дисперсии, принято обозначать u^2 и, соответственно, СКО через u.

Часто используют опыт подобных измерений в прошлом, на основании которого известен закон распределения вероятности отсчета.

Значение измеряемой величины, без учета поправки, не может отличаться от случайного значения показания СИ больше, чем на полуразмах при равномерном законе распределения вероятности или больше, чем на половину доверительного интервала, если показания СИ подчиняются нормальному закону распределения вероятностей. Поправку при однократном измерении, как правило, вносят на последнем этапе и учитывают все без исключения влияющие факторы, включая свойства СИ.

Во избежание ошибок в значении отсчета при однократном измерении рекомендуется 2–3 раза повторить измерение без совместной обработки полученных результатов.

Методику определения доверительного интервала измеряемой величины по результату однократного измерения рассмотрим на ряде примеров.

П р и м е р 2. При однократном измерении напряжения цифровым вольтметром с дискретностью отсчета 0,0I на его световом табло появилось число 0,I7 В. В какой форме можно представить результат измерения?

Р е ш е н и е. В цифровых измерительных приборах, даже при многократном измерении одной и той же физической величины постоянного размера, на световых табло часто появляется одно и то же число. Это вовсе не означает, что отсчет и показание являются неслучайными величинами. Просто такое измерение является грубым, и отдельные значения отсчета не выходят за пределы, обеспечивающие изменение числа на табло.

В данном случае уместно предположить, что показание цифрового вольтметра с равной вероятностью может иметь любое значение в интервале от 0,165 до 0,175 В.

Примем для учета дефицита информации в качестве математической модели равномерный закон распределения вероятности значений напряжения, тогда величина, аналогичная дисперсии, равна

$$u^2 = a^2/3 = (0{,}05)^2/3 \simeq 8 \cdot 10^{-6}\ \text{В}^2,$$

и с использованием в данном случае аналога СКО имеем оценку СКО

$$\tilde{\sigma}(\Delta_c) = u = \sqrt{8 \cdot 10^{-6}} \simeq 3 \cdot 10^{-3}\ \text{В}.$$

Следовательно, результат однократного прямого измерения можно представить в форме

$$A = 0{,}17\ \text{В};\ \tilde{\sigma}(\Delta_c) = 3 \cdot 10^{-3}\ \text{В};\ \text{равн}.$$

П р и м е р 3. Указатель отсчетного устройства вольтметра класса точности 0,5 с верхним пределом диапазона измерений $U_{пр} = 1{,}5$ В на участке электрической цепи постоянного тока с сопротивлением $R = 4$ Ом показывает 0,9 В. Измерения выполняются вольтметром с внутренним сопротивлением $R = 1000$ Ом при температуре до 30 °С и влажности 70 % в магнитном поле до 400 А/м. Чему равно измеряемое напряжение?

Р е ш е н и е. В данном случае инструментальная составляющая погрешности измерений определяется основной и дополнительной погрешностями.

Предел допускаемой относительной основной погрешности

$$\delta = \frac{0{,}5 \cdot 1{,}5}{0{,}9} = 0{,}83\ \%.$$

Дополнительная погрешность от влияния магнитного поля находится в пределах ±0,75 %, дополнительная температурная погрешность, обусловленная отклонением температуры от нормальной (20 °С) на 10 °С, – в пределах ±0,3 %, дополнительная погрешность вследствие отклонения влажности на 10 % от нормальной – в пределах ±0,5 %.

Погрешность метода определяется соотношением между сопротивлением участка цепи R и внутренним сопротивлением вольтметра R_u. При подсоединении вольтметра к цепи исходное напряжение U_x изменяется на $U = U_x R/(R + R_u)$.

Отсюда методическая погрешность в абсолютной форме

$$\Delta_м = -U_x R/(R + R_u).$$

В относительной форме методическая погрешность

$$\delta_м = -100\, R/(R + R_u) = -0{,}4\ \%,$$

тогда $\Delta_м = -0{,}9 \cdot 0{,}4/100 = -0{,}004$ В.

Оцененная методическая погрешность является систематической составляющей погрешности измерений, и ее следует учитывать в виде поправки $\nabla = -\Delta_м = 0{,}004$ В.

Результат измерения с учетом поправки на систематическую погрешность

$$A = 0{,}9\ \text{В} + 0{,}004\ \text{В} = 0{,}904\ \text{В}.$$

Ввиду того, что основная и дополнительные погрешности вольтметра заданы своими границами, следует рассматривать эти погрешности как неисключенные систематические погрешности результата измерения. Тогда при $P = 0{,}95$ в соответствии с (15)

$$\Theta(P) = 1{,}1\sqrt{0{,}83^2 + 0{,}3^2 + 0{,}75^2 + 0{,}5^2} = 1{,}39\ \%.$$

Границы погрешности в абсолютной форме результата измерений

$$\Delta_c = 0{,}904 \cdot 1{,}39/100 \simeq 0{,}013\ \text{В}.$$

Следовательно, результат измерений можно представить в форме

$$A = 0{,}904\ \text{В};\ \Delta_c = \pm 0{,}013\ \text{В};\ P = 0{,}95.$$

Устанавливаемые стандартом нормируемые метрологические характеристики СИ используют для оценки погрешностей измерений, проводимых в известных рабочих условиях применения СИ как в статическом, так и в динамических режимах.

Если в аттестате СИ указано значение СКО $\tilde{\sigma}(\overset{\circ}{\Delta})$, то вероятность того, что результат однократного наблюдения X окажется в интервале $[-t_p\tilde{\sigma}(\mathring{\Delta}), +t_p\tilde{\sigma}(\mathring{\Delta})]$, можно определить интегрированием дифференциальной функции распределения в пределах $\pm t_p$. Тогда предельные значения измеряемого параметра $[A-t_p\tilde{\sigma}(\mathring{\Delta}); A+t_p\tilde{\sigma}(\mathring{\Delta})]$ и вероятность нахождения величины X в доверительных границах с учетом введения поправки на систематическую погрешность определяется следующим выражением:

$$P\{A-t_p\tilde{\sigma}(\mathring{\Delta}) < \bar{X} \leq A+t_p\sigma(\mathring{\Delta})\}, \qquad (21)$$

где P – доверительная вероятность того, что результат однократного наблюдения окажется в пределах указанных границ:

$$P=\Phi(t_p)-\Phi(-t_p)=2\Phi(t_p)-1=2\Phi_0(z=t_p); \qquad (22)$$

$\Phi_0(z)$ – нормированная функция Лапласа.

Таким образом, в рассматриваемом случае результат однократного измерения можно представить в виде

$$A; \text{ от } +t_p\tilde{\sigma}(\mathring{\Delta}) \text{ до } -t_p\tilde{\sigma}(\mathring{\Delta}); \; P=2\Phi(z=t_p)-1.$$

В практике оценок погрешностей измерения принимают: $t_p=1$; $t_p=2$ и $t_p=3$, т.е. оценивают предельные значения возможных отклонений при определении истинного значения $X=M\{A\}$ погрешностями, равными $\pm\tilde{\sigma}(\mathring{\Delta})$; $\pm 2\tilde{\sigma}(\mathring{\Delta})$ и $\pm 3\sigma(\mathring{\Delta})$. Определяя значения вероятности P в соответствии с (22) и используя табл. III (см. приложение) с учетом (21) при $t_p=z$, можно найти доверительные вероятности $P(t_p=1)=0{,}68$; $P(t_p=2)=0{,}95$; $P(t_p=3)=0{,}9973$ соответственно. Естественно, что с вероятностью $(1-P)$ результат однократного наблюдения может оказаться и за пределами указанных границ.

П р и м е р 4. Единственное значение результата измерения длины вала на вертикальном длинномере $L = 40{,}0034$ мм. Средняя квадратическая погрешность, указанная в аттестате, равна 0,4 мкм. В какой форме можно представить результат измерения?

Р е ш е н и е. С доверительной вероятностью $P = 0{,}95$ результат измерения $L \pm 2\sigma(\mathring{\Delta})$ можно представить в следующей форме:

$$A = 40{,}0034 \text{ мм}; \quad \Delta = \pm 0{,}0008 \text{ мм}; \quad P = 0{,}95.$$

7. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ В СООТВЕТСТВИИ С НОРМАЛЬНЫМ ЗАКОНОМ

Критерий К.Пирсона (Хи-квадрат критерий). При числе экспериментальных данных $N \geq 40$ для проверки гипотезы о виде распределения наиболее приемлемым является критерий согласия Пирсона χ^2. Этот критерий обеспечивает минимальную ошибку в принятии неверной гипотезы, когда теоретические значения параметров функции распределения не известны. При использовании этого критерия за меру расхождения экспериментальных данных с теоретическими, полученными в соответствии с законом распределения вероятности результатов измерения, принимают сумму квадратов отклонения частостей m_i/N от теоретической вероятности P_i попадания отдельного значения результата измерения в заданные нижние $X_{i_н}$ и верхние $X_{i_в}$ границы i-го интервала, причем каждое слагаемое выбирают с весовым коэффициентом N/P_i:

$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{N}{P_i}\left(\frac{m_i}{N}-P_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{r}\chi_i^2, \qquad (23)$$

где r – число интервалов гистограммы при условии объединения интервалов с частотами $m_i \leq 5$ (объединенные частоты принимают за одну частоту): χ_i^2 – мера расхождения в каждом $i=\overline{1,r}$ интервале;

$$P_i = \Phi\left(z=\frac{X_{i_в}-\bar{X}}{S}\right)-\Phi\left(z=\frac{X_{i_н}-\bar{X}}{S}\right). \qquad (24)$$

Здесь $\Phi(z)$ – интегральная функция нормированного нормального распределения, определяемая по табл. III.

Если расхождение случайно, то χ_k^2 независимо от исходного распределения подчиняется χ^2-распределению Пирсона $P=F(\chi^2)$ с k степенями свободы: $k=r-s$, где s – число независимых связей, наложенных на частоты m_i/N.

При проверке гипотезы о распределении результатов измерения в соответствии с нормальным законом к числу этих связей относят: 1. $\bar{X}=MX$; 2. $S^2=\tilde{\sigma}(\mathring{\Delta})$; 3. $\sum_{i=1}^{r}\frac{m_i}{N}=1$. Поэтому принимают $s=3$.

Задавая значение интегральной функции распределения Пирсона $F(\chi_0^2)$, можно проверять, больше или меньше вычисленное значение χ_k^2 ее аргумента χ_0^2. Если $\chi_k^2 \leq \chi_0^2$, то с выбранной вероятностью можно считать χ_k^2 случайным числом, подчиняющимся χ^2-распределению Пирсона, т.е. признать случайным расхождение между эмпирической и теоретической плотностью распределения вероятности результата измерения. При $\chi_k^2 > \chi_0^2$ гипотеза, соответственно, отвергается. Однако во всех случаях даже выполнение неравенства $\chi^2 << \chi_0^2$ не может служить доказательством того, что результаты измерения подчиняются нормальному закону распределения вероятностей. Возможны два рода ошибок. Ошибка первого рода состоит в отклонении верной гипотезы о распределении экспериментальных данных в соответствии с нормальным законом. Вероятность ошибки первого рода называют уровнем значимости α. Ошибка второго рода заключается в том, что принимают гипотезу о нормальном законе распределения, в то время как в действительности эта гипотеза неверна. Вероятность ошибки второго рода обозначают β. Обе эти ошибки зависят от значения χ_0^2, которое в свою очередь определяется доверительной вероятностью $P = F(\chi_0^2)$, с которой принимается решение. С повышением этой вероятности значение χ_0^2 увеличивается, вероятность α уменьшается, а значение β возрастает, и наоборот. Отсюда следует вывод, что не имеет смысла брать слишком высокие значения доверительных вероятностей. Обычно P выбирают равной 0,9...0,95.

Итак, порядок проверки гипотезы о нормальном распределении по критерию Пирсона следующий.

1. Группируют экспериментальные данные от наименьшего X_{min} до наибольшего X_{max} в зависимости от их числа на n интервалов. Рекомендуется выбирать $n = 7...9$ при N от 40 до 100; $n = 8...12$ при N от 100 до 500. Ширина интервала группирования h постоянна: $h = (X_{max} - X_{min})/n$.

Для каждого интервала значений $X_{iн} \leq X_i < X_{iв}$ случайной величины определяют частоты встречаемости m_i, полученные при проведении N измерений.

2. Вычисляют оценки параметров распределения $\bar{X}$ и S, которые принимают в качестве параметров теоретического нормального распределения.

3. Для каждого интервала находят вероятности попадания в него по формуле (24).

4. Интервалы, в которых $m_i \leq 5$, объединяют с соседними. Вычисляют для каждого из r интервалов меру расхождения χ_i^2 и суммируют их значения, получая значения χ_k^2.

5. Определяют число степеней свободы $k = r - 3$ для нового числа r интервалов и, задавая уровень значимости α, находят по табл. П2 границы $\chi^2_{k;\alpha/2}$ и $\chi^2_{k;1-\alpha/2}$.

6. Если $\chi^2_{k,\alpha/2} < \chi_k^2 < \chi^2_{k;1-\alpha/2}$, то гипотезу о нормальном распределении экспериментальных данных принимают.

П р и м е р 5. По результатам $N = 100$ измерений (табл. 1) проверить гипотезу о нормальном распределении одного из основных параметров усилителя рулевых машин автопилота АП-6 – минимального напряжения входного сигнала, вызывающего импульсную работу реле при минимальном напряжении чувствительности. В технических условиях заданы границы для значения данного параметра $X_{АП} = 18,46 \pm 0,36$ мВ, при котором изделие способно выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в течение требуемого времени при определенных условиях.

Р е ш е н и е. 1. Располагая данными 100 опытов ($N = 100$), можно сделать выводы о виде распределения и его основных параметрах на основе критерия Пирсона. Область рассеивания параметра $R_n = X_{max} - X_{min} = 0,36 - (-0,36) = 0,72$ мВ разделим на $n = 8$ интервалов. Ширина интервала: $h = X_{max} - X_{min}/n = 0,096$. Это значение округляют, полагая, что $h = 0,1$ мВ. В табл. 1 показаны пределы каждой группы отклонений в виде "свыше $X_{iн}$ до $X_{iв}$", середины интервалов X_i и подсчитаны частоты m_i попадания значений измеренного параметра в каждый интервал.

Для случайных величин непрерывного типа строят обычно гистограммы распределений, а для случайных величин дискретного типа – полигоны. На рис. 2 представлена гистограмма распределения для рассматриваемого случая.

Таблица I

Распределение параметров в соответствии с законом нормального распределения

Исходные и расчетные данные к примеру 5

i	$X_{iн}$	$X_{iв}$	X_i	m_i	m_iX_i	X_i^2	$m_iX_i^2$	$Z_i=(X_{iв}-\bar{X})/S_x$	$\Phi(Z_i)$	P_i	nP_i	$(m_i-nP_i)^2$	$(m_i-nP_i)^2/nP_i$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	-0,4	-0,3	-0,35	3 } 8	-1,05	0,1225	0,3675	-2,08	0,0188	0,0188	1,88 } 7,49	0,26	0,03
2	-0,3	-0,2	-0,25	5	-1,25	0,0625	0,3125	-1,44	0,0749	0,0561	5,61		
3	-0,2	-0,1	-0,15	12	-1,8	0,0225	0,27	-0,79	0,2148	0,1399	13,99	3,96	0,28
4	-0,1	0	-0,05	21	-1,05	0,0025	0,0525	-0,15	0,4403	0,2255	22,55	2,40	0,11
5	0	+0,1	+0,05	30	1,5	0,0025	0,075	0,49	0,6880	0,2477	24,77	27,35	1,1
6	-0.1	+0,2	+0,15	16	2,4	0,0225	0,36	1,13	0.8707	0,1827	18,27	5,15	0,28
7	+0,2	+0,3	+0,25	9 } 13	2,25	0,0625	0.5625	1,77	0,9617	0,091	9,1 } 12,13	0,76	0,06
8	+0.3	+0,4	+0,35	4	1,4	0,1225	0,49	2.41	0,9920	0,0303	3,03		
					$\sum m_iX_i=2,4$	–	$\sum m_iX_i^2=2,49$	–	–	–	–	–	$\sum X_i^2=1,86$

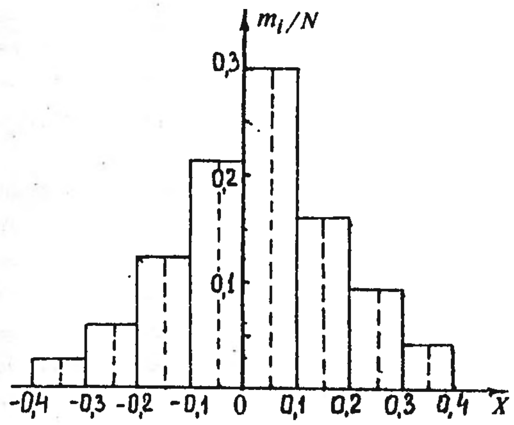

Рис. 2

2. Эмпирическое распределение характеризуется средним значением $\bar{X}$, равным:

$$\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{m} X_i m_i}{\sum m_i}=\frac{\sum_{i=1}^{m} X_i m_i}{N}=\frac{2,4}{100}=0,024 \text{ мВ}.$$

Среднее значение определяет центр группирования значений случайной величины. При достаточно большом $N\,(N\to\infty)$ выборочное значение X стремится по величине к математическому ожиданию, т.е. $\bar{X}=MX$.

Величина рассеивания выборочных значений вокруг их среднего значения характеризуется эмпирической дисперсией S^2, равной: $S^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n} m_i(X_i-\bar{X})^2$. Для $N\geqslant 25$ можно воспользоваться соотношением

$$S^2=\frac{1}{N}\sum m_i(X_i-\bar{X})^2=a-\bar{X}^2,\quad a=\sum X_i^2 m_i/N.$$

В данном случае $a=2,49/100=0,0249$, тогда

$$S^2=0,0249-0,006=0,024 \text{ мВ}.$$

Заметим, что $S^2\simeq\sigma^2(\Delta)$ при $N\to\infty$.

Эмпирическое СКО: $S=\sqrt{S^2}=\sqrt{0,0243}=0,16$ мВ.

3. Теоретическая вероятность P попадания отдельных значений результатов измерений в i-й интервал определяется как разности $\Phi(z_i)$, найденные для границ интервалов. Расчеты z_i, определение по табл. П1 $\Phi(z_i)$ и вычисления $P_i = \Phi(z_i) - \Phi(z_{i-1})$ представлены в колонках 9, 10, 11 табл. 1.

4. Так как в первом и восьмом интервалах $m_i \leq 5$, то их необходимо объединить с соседними интервалами. В колонке 14 табл. 1 вычислены меры расхождения χ_i^2 для каждого из r-х интервалов и определено значение $\chi_k^2 = \sum_{i=1}^{r} \chi_i^2 = 1{,}86$.

5. В связи с объединением четырех интервалов (1-го со 2-м и 7-го с 8-м) число степеней свободы $k = 8-2-3 = 3$. Задавая уровень значимости 10 %, т.е. $\alpha = 0{,}1$, находим границы $\chi^2_{k;\alpha/2}$ и $\chi^2_{k;1-\alpha/2}$ по табл. П2.

6. Полученное значение $\chi_k^2 = 1{,}86$ лежит в интервале значений 0,352 и 7,815, и, следовательно, можно считать, что распределение опытных данных соответствует нормальному закону.

Составной критерий. При числе экспериментальных данных $10 \leq N \leq 40$ для проверки соответствия распределения данных нормальному закону можно воспользоваться составным критерием.

Сначала рассчитывают значение d по формуле

$$\tilde{d} = \frac{\sum_{i=1}^{N} |X_i - \bar{X}|}{N S'}, \tag{25}$$

где S' – смещение СКО

$$S' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2}{N}}. \tag{26}$$

Затем задают уровень значимости α_1. Гипотеза о соответствии данных нормальному распределению подтверждается, если

$$d_{1-\alpha_1/2} < \tilde{d} < d_{\alpha_1/2}, \tag{27}$$

где $d_{1-\alpha_1/2}$ и $d_{\alpha_1/2}$ – процентные точки распределения значений d, которые находят по табл. П3.

Если условие (27) соблюдается, то дополнительно проверяют так называемые "хвосты" теоретического и эмпирического законов распределения вероятностей. Гипотеза о нормальном распределении экспериментальных данных подтверждается, если не более l_p разностей $(X_i - \bar{X})$ превысили значения $z_{P/2} \cdot S$. В данном случае СКО S определяют по формуле

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2}{N-1}}, \tag{28}$$

а $z_{P/2}$ – верхняя P-процентная точка нормированной функции Лапласа (табл. П4).

Значение доверительной вероятности $P(N,\alpha)$ определяют по числу измерений N и уровню значимости α_2 (табл. П5). Причем при числе измерений $10 \leq N \leq 20$ принимают число разностей $|X_i - \bar{X}|$, которые могут превысить значение $z_{P/2} \cdot S$, $l_p = 1$, при $20 \leq N \leq 40$, $l_p = 2$.

Уровень значимости составного критерия равен

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 .$$

Если гипотеза о нормальном распределении отвергается хотя бы по одному из критериев, считают, что распределение экспериментальных данных отлично от нормального.

П р и м е р 6. В соответствии с техническими условиями на измерительный импульсный генератор Г5-8 при номинальном значении длительности выходного импульса $\tau_и = 0{,}1$ мкс допустимые границы поля допуска составляют от 0,06 мкс до 0,14 мкс. В табл. 2 приведены экспериментальные данные, полученные при $N = 30$ измерениях $X_i = \tau_i$. Проверить, можно ли считать, что приведенные в табл. 2 данные принадлежат совокупности, распределенной нормально.

Р е ш е н и е. 1. Находим оценку математического ожидания длительности выходного импульса $\bar{\tau}_и = \bar{X}$:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} = 0{,}103 \text{ мкс}.$$

Таблица 2

Экспериментальные данные к примеру 6

i	X_i	$X_i - X$	$(X_i - X)^2$
1	2	3	4
1	0,093	-0,010	0,000100
2	0,140	0,010	0,001369
3	0,105	0,002	0,000004
4	0,100	0,003	0,000009
5	0,036	-0,007	0,000049
6	0,095	-0,008	0,000064
7	0,091	-0,012	0,000144
8	0,140	0,037	0,001369
9	0,097	-0,006	0,000036
10	0,11	0,007	0,000049
11	0,107	0,004	0,000016
12	0,124	0,021	0,000441
13	0,103	0,000	0,000000
14	0,100	-0,003	0,000009
15	0,102	-0,001	0,000001
16	0,096	-0,007	0,000049
17	0,092	-0,011	0,000121
18	0,114	0,011	0,000121
19	0,100	-0,003	0,000009
20	0,100	-0,003	0,000009
21	0,086	0,017	0,000289
22	0,096	0,007	0,000049
23	0,101	-0,002	0,000004
24	0,090	-0,013	0,000169
25	0,092	-0,011	0,000121
26	0,105	0,002	0,000004
27	0,110	0,007	0,000049
28	0,103	0,000	0,000000
29	0,087	-0,016	0,000256
30	0,116	0,013	0,000169
N=30	X=0,103	$\Sigma\lvert X_i - X\rvert$ = 0,281	$\Sigma(X_i - X)^2$=0.00508

2. Вспомогательные расчеты $X_i - \bar{X}$ и $(X_i - \bar{X})^2$ сводим в табл. 2, колонки 3 и 4, и определяем суммы $\sum_{i=1}^{N} |X_i - \bar{X}|$ и $\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2$ для вычислений S и S' по формулам (28) и (26).

3. Определяем параметр $\tilde{d}$ в соответствии с формулой (25)

$$\tilde{d} = 0{,}281/30 \cdot 0{,}013 \simeq 0{,}72\,.$$

4. Принимаем уровень значимости данного критерия $\alpha_1 = 2\ \%$. По табл. П3 находим $d_{1\%} = 0{,}88$ и $d_{99\%} = 0{,}7I$. Так как $0{,}7I < 0{,}72 < 0{,}88$, то по данному критерию гипотеза о нормальном распределении принимается.

5. Выбирая уровень значимости для второго критерия $\alpha_2 = 0{,}05$ для $N = 30$ из табл. П5, находим значение доверительной вероятности $P = 0{,}97$. По табл. П4 определяем значение верхней P-процентной точки нормированной функции Лапласа $z_{P/2} = 2{,}I7$. Тогда

$$S \cdot z_{P/2} = 0{,}0132 \cdot 2{,}17 = 0{,}0286\,.$$

Согласно табл. П5, не более $l_P = 2$ разностей $|X_i - \bar{X}|$ могут превысить значение 0,0286, следовательно, ни одно отклонение не превышает 0,0286. Таким образом, гипотеза о нормальном распределении экспериментальных данных $\tau_и$ подтверждается.

6. Уровень значимости составного критерия равен

$$\alpha \leq \alpha_1 + \alpha_2 = 0{,}02 + 0{,}05 = 0{,}07\,,$$

т.е. гипотеза о распределении данных в соответствии с нормальным законом подтверждается при уровне значимости не более 0,07.

8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ИСКЛЮЧЕНИЕ ГРУБЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

На практике часто встает вопрос о том, следует отвергнуть или нет некоторые результаты измерений, резко выделяющиеся от остальных. Если известно, что этот результат получен вследствие грубой ошибки, то его необходимо отбросить, не подвергая никаким статистическим оценкам. В тех случаях, когда имеется лишь подозрение на то, что один или несколько результатов измерений получены ошибочно, необходимо проверить это подозрение.

Выдвигается гипотеза: результат измерения X_i не содержит грубой погрешности, т.е. является одним из значений случайной величины X, распределенной по закону $F(X_i)$, параметры которого предварительно определены. Но нужно проверить, не было ли допущено ошибок при получении отдельных значений результатов измерений.

При однократном измерении ошибку можно обнаружить только путем логического анализа или сопоставления результата с априорным представлением о нем. Установив и устранив причину ошибки, измерение можно повторить.

При многократном измерении сомнительными могут быть либо X_{min}, либо X_{max} из всего ряда измерений, поэтому для проверки гипотезы определяют величину ϑ:

$$\vartheta = (X_{max} - \bar{X})/S \quad \text{и} \quad \vartheta = (\bar{X} - X_{min})/S. \qquad (29)$$

Распределения этих величин приведены в табл. П6. При данном числе наблюдений, задавая уровень значимости α, по этой таблице можно определить предельное значение $\vartheta_{\alpha/2}$. Тогда, если $\vartheta < \vartheta_{\alpha/2}$, гипотезу принимают. В противном случае гипотезу отклоняют, результат измерения рассматривают как содержащий грубую погрешность и отбрасывают.

П р и м е р 7. При измерении напряжения $U_{вых}$ на выходе усилителя рулевых машин автопилота АП-6 были получены следующие результаты:

1. 18,04 мВ	7. 19,24 мВ	13. 18,62 мВ
2. 18,25 мВ	8. 18,12 мВ	14. 18,41 мВ
3. 18,63 мВ	9. 18,34 мВ	15. 18,34 мВ
4. 18,82 мВ	10. 18,45 мВ	16. 18,56 мВ
5. 18,51 мВ	11. 18,54 мВ	17. 18,67 мВ
6. 18,73 мВ	12. 18,53 мВ	18. 18,58 мВ

Требуется определить, не содержит ли результат седьмого измерения грубую погрешность.

Р е ш е н и е. 1. Определяем параметры распределения результатов измерений (с учетом седьмого результата)

$$U_{вых} = 18{,}52 \text{ мВ}; \quad S_U = 0{,}269 \text{ мВ}.$$

Задавая уровень значимости $\alpha = 10\,\%$, при числе наблюдений $N = 18$ по табл. П6 находим $\vartheta_{\alpha/2} = 2{,}[illegible]57$.

Для сомнительного результата $\vartheta = \dfrac{19{,}24 - 18{,}52}{0{,}269} = 2{,}67$

Устанавливаем, что $\vartheta > \vartheta_{\alpha/2}$, следовательно, седьмой результат измерения содержит грубую погрешность. После исключения из числа результатов этого измерения получим следующие значения параметров распределения:

$$U_{вых} = 18{,}48 \text{ мВ}; \quad S_U = 0{,}21 \text{ мВ},$$

т.е. доверительные границы будут определены гораздо точнее.

9. ОБРАБОТКА И ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРЯМЫХ МНОГОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

При многократных измерениях должно быть не менее четырех экспериментальных данных: $X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_N$. Результат каждого i-го измерения X_i может содержать как систематическую, так и случайную погрешность. Если представляется возможность оценить систематическую погрешность, то в экспериментальные данные вносят поправку. Неподдающиеся исключению систематические погрешности, погрешность вносимой поправки и другие погрешности, представленные границами, составляют неисключенные систематические погрешности экспериментальных данных. Случайные погрешности результата измерения оценивают с помощью статистических методов. Оценка измеряемой величины, полученная по экспериментальным данным, считается наилучшей, если она несмещенная, состоятельная и эффективная.

Для данных, соответствующих нормальному распределению, наилучшей оценкой измеряемой величины служит среднее арифметическое $\bar{X}$, а наилучшей оценкой параметра случайной погрешности – среднее квадратичное отклонение S.

При числе измерений, не превышающем $N < 30$, $k = N - 1$, используют отношение

$$t = \frac{\bar{X} - X}{S_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - X}{S_X}\sqrt{N}, \qquad (30)$$

называемое дробью Стьюдента. Величина t имеет распределение Стьюдента, и ее задают в виде табл. П7 значений t_p для различных значений доверительной вероятности P в пределах 0,1...0,99 с k степенями свободы ($k = N - 1 = 1, 2 \ldots 30$).

С помощью распределения Стьюдента могут быть определены с заданной доверительной вероятностью P доверительные границы для истинного значения измеряемой величины на основании ограниченного числа наблюдений. Эти границы определяются величиной $\mathring{\Delta}_P = t_P S_X$. Итоги измерения записывают в следующем виде:

$$A\ ;\ \Delta_P \text{ от } \Delta_н \text{ до } \Delta_в\ ;\ P.$$

П р и м е р 8. В результате шестикратных наблюдений при измерении напряжения U получены следующие значения выборки $i = \overline{1,N}$:

9,77 В; 9,76 В; 9,79 В; 9,78 В; 9,82 В; 9,77 В; 9,78 В.

Известно, что результаты U_i распределены нормально. Определить предельную погрешность на основании опытных данных с вероятностью $P = 95$ %.

Р е ш е н и е. Оценки параметров распределения результатов измерений:

$$\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^{N} U_i}{N} = 9{,}78 \text{ В}; \quad S_U^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (U_i - \bar{U})^2}{N-1} = 0{,}0383;\ S_U \simeq 0{,}2 \text{ В}$$

Из условия задачи следует, что имеются все основания для применения распределения Стьюдента. Значение t_P определим по табл. П7 для $P = 0{,}95$ и $k = N - 1 = 6$, $t_P = 2{,}447$. Доверительная граница погрешности

$$\mathring{\Delta}_P = t_P S_U = t_P \frac{S}{\sqrt{N}} = 2{,}447 \cdot \frac{0{,}2}{\sqrt{7}} \simeq 0{,}18 \text{ В}.$$

Результат измерения запишем в следующем виде:

$$A = 9{,}78 \text{ В};\ \Delta = \pm 0{,}18 \text{ В};\ P = 0{,}95;\ \text{норм}.$$

Сравним полученный результат измерения с результатом измерения, который будет получен в случае, если указан в аттестате средства измерений СКО $\sigma_U = 0{,}2$ В.

В этом случае нет необходимости пользоваться оценкой S, и значение t_P определяется, исходя из доверительной вероятности P на основании зависимости (21)

$$P\left\{\bar{U} - t_P \sigma_U/\sqrt{N} \leq U \leq \bar{U} + t_P \sigma_U/\sqrt{N}\right\} = 2\Phi(z = t_P) - 1,$$

где доверительный интервал, полученный с помощью среднего арифметического результата N независимых повторных измерений, в $\sqrt{N}$ раз короче интервала, определенного по результату однократного наблюдения /см. (21)/.

Для $\Phi(z = t_P) = \frac{P+1}{2} = \frac{0{,}95+1}{2} = 0{,}975$ по табл. П1 найдем $z = t_P = 1{,}96$, тогда предельная погрешность $\mathring{\Delta}_P = t_P \sigma_U/\sqrt{N} = 1{,}96 \cdot 0{,}2/\sqrt{7} = 0{,}15$ В, т.е. истинное значение измеряемого напряжения будет определено более точно с той же вероятностью

$$A = 9{,}78 \text{ В};\ \Delta = \pm 0{,}15 \text{ В};\ P = 0{,}95 \text{ норм};$$

$$\tilde{\sigma}(\mathring{\Delta}) = 0{,}2 \text{ В}.$$

Получение более точного результата при известном значении σ_U вполне закономерно, так как в противном случае недостаток информации вследствие малого числа N при определении S_U компенсируется расширением интервала t_P на 25 %.

При $N \to \infty$, а практически уже при $N = 20...30$, распределение Стьюдента переходит в нормальное распределение, и значение t_P можно определить, используя зависимость

$$P\left\{|\bar{X} - X| < t_P S_{\bar{X}}\right\} = 2\Phi(z = t_P) - 1, \qquad (31)$$

т.е. вместо СКО $\sigma_{\bar{X}}$ применить его точечную оценку $S_{\bar{X}}$.

Таким образом, итог любых измерений не является определенным числом. В результате измерений указывается лишь ограниченный интервал значений с несколько размытыми границами, в пределах которого с некоторой вероятностью ожидается результат измерения истинного значения интересующего нас параметра, и определение середины интервала A не предполагает бóльшую вероятность нахождения истинного значения ближе к среднему арифметическому. В расчетах тем не менее применяют A, но правильно поступают лишь только тогда, когда ведут учет погрешностей и рассчитывают доверительные границы для величины, являющейся функцией данной измеряемой величины A.

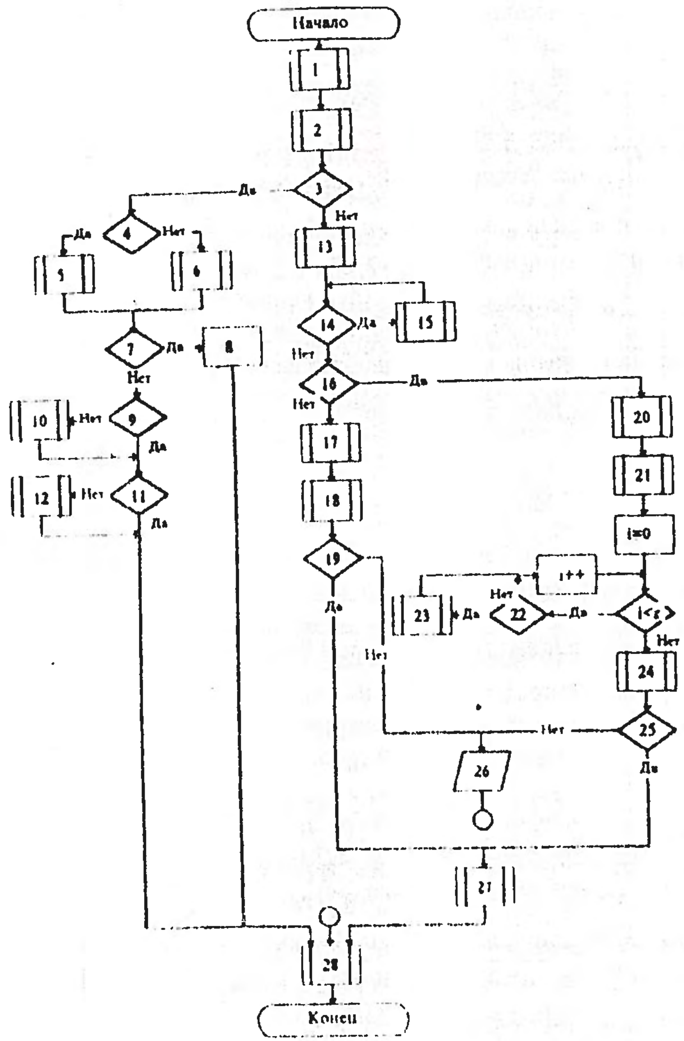

Рис. 3

10. АЛГОРИТМ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРЕНИЙ

Для повышения эффективности оценки результатов измерений и их погрешностей используют ЭВМ. Точность получаемых экспериментальных данных и последующих вычислений при их обработке должна быть согласована с требуемой точностью результата измерения. На рис. 3 представлен алгоритм обработки экспериментальных данных, в котором предусмотрены в соответствии с изложенной методикой следующие позиции.

Описание алгоритма (см. рис. 3).

1 – Ввод априорной информации (уровень значимости, систематическая погрешность, неисключенная систематическая погрешность, средняя квадратическая погрешность прибора; определение доверительной границы неисключенной систематической погрешности)

2 – Ввод данных

3 – Число данных $N < 10$?

4 – Число данных $N = 1$?

5 – За результат измерения принять полученное значение измеряемой величины

6 – Вычислить результат измерения с учетом систематической погрешности

7 – Доверительная граница неисключенной систематической погрешности и средней квадратической погрешности прибора равны 0?

8 – Комментарий

9 – Доверительная граница неисключенной систематической погрешности равна 0?

10 – Определение доверительной границы (см. пример 3)

11 – Средняя квадратическая погрешность равна 0?

12 – Определение доверительной границы (см. пример 4)

13 – Исключение систематической погрешности

14 – Есть ли грубые погрешности?

15 – Исключение грубых погрешностей

16 – Число данных $N > 40$

17 – Проверка первого составного критерия

18 – Проверка второго составного критерия

19 – Первый и второй критерии выполняются

20 – Группирование данных по интервалам

21 – Определение вероятности попадания в интервал

22 – Число данных в интервале $N < 5$?

23 – Объединение интервалов

24 – Определение χ^2 числа степеней свободы и границ $\chi^2_{k,\alpha/2}$ и $\chi^2_{k,1-\alpha/2}$

25 – $\chi^2_{k,\alpha/2} < \chi^2_k < \chi^2_{k,1-\alpha/2}$

26 – Вывод сообщения: "Распределение не является нормальным"

27 – Оценка доверительного интервала

28 – Вывод результатов

Для расчетов используют программу "QUALITYRL- 5"

Приложение

Таблица III

Интегральная функция нормированного нормального распределения

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

z	0,08	0,06	0,04	0,02	0,00
-3,5	0,00017	0,00019	0,00020	0,00022	0,00023
-3,4	0,00025	0,00027	0,00029	0,00031	0,00034
-3,3	0,00036	0,00039	0,00042	0,00045	0,00048
-3,2	0,00052	0,00056	0,00060	0,00064	0,00069
-3,1	0,00074	0,00079	0,00085	0,00090	0,00097
-3,0	0,00104	0,00111	0,00118	0,00126	0,00135
-2,9	0,0014	0,0015	0,0016	0,0017	0,0019
-2,8	0,0020	0,0021	0,0023	0,0024	0,0026
-2,7	0,0027	0,0029	0,0031	0,0033	0,0035
-2,6	0,0037	0,0039	0,0041	0,0044	0,0047
-2,5	0,0049	0,0052	0,0055	0,0059	0,0062
-2,4	0,0066	0,0069	0,0073	0,0078	0,0082
-2,3	0,0087	0,0091	0,0096	0,0102	0,0107
-2,2	0,0113	0,0119	0,0125	0,0132	0,0139
-2,1	0,0146	0,0154	0,0162	0,0170	0,0179
-2,0	0,0188	0,0197	0,0207	0,0217	0,0228
-1,9	0,0239	0,0250	0,0262	0,0274	0,0287
-1,8	0,0301	0,0314	0,0329	0,0344	0,0359
-1,7	0,0375	0,0392	0,0409	0,0427	0,0446
-1,6	0,0465	0,0485	0,0505	0,0526	0,0548
-1,5	0,0571	0,0594	0,0618	0,0643	0,0668
-1,4	0,0694	0,0721	0,0749	0,0778	0,0808
-1,3	0,0838	0,0869	0,0901	0,0934	0,0968
-1,2	0,1003	0,1038	0,1075	0,1112	0,1151
-1,1	0,1190	0,1230	0,1271	0,1314	0,1357
-1,0	0,1401	0,1446	0,1492	0,1539	0,1587
-0,9	0,1635	0,1685	0,1736	0,1788	0,1841
-0,8	0,1894	0,1949	0,2005	0,2061	0,2119
-0,7	0,2177	0,2236	0,2297	0,2358	0,2420
-0,6	0,2483	0,2546	0,2611	0,2676	0,2743
-0,5	0,2810	0,2877	0,2946	0,3015	0,3085
-0,4	0,3156	0,3228	0,3300	0,3372	0,3446
-0,3	0,3520	0,3594	0,3669	0,3745	0,3821
-0,2	0,3897	0,3974	0,4052	0,4129	0,4207
-0,1	0,4286	0,4364	0,4443	0,4522	0,4602
-0,0	0,4681	0,4761	0,4840	0,4920	0,5000

Окончание табл. П1

z	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08
+0,0	0,5000	0,5080	0,5160	0,5239	0,5319
+0,1	0,5398	0,5478	0,5557	0,5636	0,5714
+0,2	0,5793	0,5871	0,5948	0,6026	0,6103
+0,3	0,6179	0,6255	0,6331	0,6406	0,6480
+0,4	0,6554	0,6628	0,6700	0,6772	0,6844
+0,5	0,6915	0,6985	0,7054	0,7123	0,7190
+0,6	0,7257	0,7324	0,7389	0,7454	0,7517
+0,7	0,7580	0,7642	0,7704	0,7764	0,7823
+0,8	0,7881	0,7939	0,7995	0,8051	0,8106
+0,9	0,8159	0,8212	0,8264	0,8315	0,8365
+1,0	0,8413	0,8461	0,8505	0,8554	0,8599
+1,1	0,8643	0,8686	0,8729	0,8770	0,8810
+1,2	0,8849	0,8888	0,8925	0,8962	0,8997
+1,3	0,9032	0,9066	0,9099	0,9131	0,9162
+1,4	0,9192	0,9222	0,9251	0,9279	0,9306
+1,5	0,9332	0,9357	0,9382	0,9406	0,9429
+1,6	0,9452	0,9474	0,9495	0,9515	09535
+1,7	0,9554	0,9573	0,9591	0,9608	0,9625
+1,8	0,9641	0,9656	0,9671	0,9686	0,9699
+1,9	0,9713	0,9726	0,9738	0,9750	0,9761
+2,0	0,9773	0,9783	0,9793	0,9803	0,9812
+2,1	0,9821	0,9830	0,9838	0,9846	0,9854
+2,2	0,9861	0,9868	0,9875	0,9881	0,9887
+2,3	0,9893	0,9898	0,9904	0,9909	0,9913
+2,4	0,9918	0,9922	0,9927	0,9931	0,9934
+2,5	0,9938	0,9941	0,9945	0,9948	0,9951
+2,6	0,9953	0,9956	0,9959	0,9961	0,9963
+2,7	09965	0,9967	0,9969	0,9971	0,9973
+2,8	0,9974	0,9976	0,9977	0,9979	0,9980
+2,9	0,9981	0,9983	0,9984	0,9985	0,9986
+3,0	0,99865	0,99874	0,99882	0,99889	0,99896
+3,1	0,99903	0,99910	0,99915	0,99921	0,99926
+3,2	0,99931	0,99936	0,99940	0,99954	0,99948
+3,3	0,99952	0,999955	0,99958	0,99961	0,99964
+3,4	0,99966	0,99969	0,99971	0,99973	0,99975
+3,5	0,99977	0,99978	0,99980	0,99981	0,99983

Таблица П2

Интегральная функция χ^2-распределения Пирсона. Значения $\chi^2_{k;P}$ для различных k и P.

k	P												
	0.01	0.02	0.05	0.10	0.20	0.30	0.50	0.70	0.80	0.90	0.95	0.98	0.99
1	0.00015	0.00062	0.00393	0.0158	0.0642	0.148	0.455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635
2	0.0201	0.0404	0.103	0.211	0.446	0.713	1.386	2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	1.424	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9.837	11.345
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	2.195	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277
5	0.554	0.752	1.145	1.610	2.343	3.000	4.351	6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086
6	0.872	1.134	1.635	2.204	3.070	3.828	5.348	7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	4.671	6.346	8.383	9.803	12.017	14.067	16.662	18.475
8	1.646	2.032	2.733	2.490	4.594	5.527	7.344	9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	6.393	8.343	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	7.267	9.342	11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	8.148	10.341	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	9.034	11.340	14.011	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217
13	4.107	4.765	5.982	7.024	8.634	9.926	12.340	15.119	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688
14	4.660	5.368	6.571	7.790	9.467	10.821	13.339	16.222	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	11.721	14.339	17.322	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578
16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	12.624	15.338	18.418	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000
17	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	13.531	16.338	19.511	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409
18	7.015	7.906	9.390	10.865	12.857	14.440	17.338	20.601	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805
19	7.633	8.567	10.117	11.651	12.716	15.352	18.338	21.689	23.900	27.204	30.144	33.689	36.191
20	8.260	9.237	10.851	12.444	14.578	16.266	19.337	22.775	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	17.182	20.337	23.858	26.171	29.615	32.671	36.343	28.932
22	9.542	10.600	12.3385	14.041	16.314	18.101	21.337	24.939	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289
23	10.196	11.293	13.091	14.848	17.187	19.021	22.337	26.018	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	19.943	23.337	27.096	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	20.867	24.337	28.172	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314
26	12.198	13.409	15.379	17.292	19.820	21.792	25.336	29.246	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642
27	12.879	14.125	16.151	18.114	20.703	22.710	26.336	30.319	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963
28	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	23.647	27.336	31.391	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278
29	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	24.577	28.336	32.461	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	25.508	29.336	33.530	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892

Таблица П3

Значения процентных точек α для распределения. $d = \sum_{i=1}^{n} |X_i - \bar{X}| / NS$

Уровень значимости α, %		Число результатов измерений в группе, N										
		11	16	21	26	31	36	41	46	51	61	71
1-α / 2	99,0	0,67	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72	0,72	0,72	0,73	0,73	0,74
	95,0	0,72	0,72	0,73	0,74	0,74	0,74	0,75	0,75	0,75	0,76	0,76
	90,0	0,74	0,74	0,75	0,75	0,76	0,76	0,76	0.76	0,76	0,77	0,77
α / 2	10,0	0,89	0,87	0,86	0,86	0,85	0,85	0,84	0,84	0,84	0,83	0,83
	5,0	0,91	0,98	0,88	0,87	0,86	0,86	0,85	0,85	0,85	0,84	0,84
	1,0	0,94	0,91	0,90	0,89	0,88	0,88	0,87	0,87	0,86	0,86	0,85

Таблица П4

Значения P-процентных точек нормированной функции Лапласа

$P \cdot 100\%$	90	95	96	97	98	99
$z_{P/2}$	1,65	1,96	2,06	2,17	2,33	2,58

Таблица П5

Значение доверительной вероятности P

N		10	11-14	15-20	21,22	23	24-27	28-32	33-35	36-49
l_p		1	1	1	2	2	2	2	2	2
α_z	0.01	0,98	0,99	0,99	0,98	0,98	0,98	0,99	0,99	0,99
	0.02	0,98	0,98	0,99	0,97	0,98	0,98	0,98	0,98	0,99
	0.05	0,96	0,97	0,98	0,96	0,96	0,97	0,97	0,98	0,98

Таблица П6

Значения ν_α при различных числах измерений N

N	$\alpha/2$				N	$\alpha/2$			
	0,10	0,05	0,025	0,01		0,10	0,05	0,025	0,01
3	1,406	1,412	1,414	1,414	14	2,297	2,461	2,602	2,459
4	1,645	1,689	1,710	1,723	15	2,326	2,493	2,638	2,808
5	1,731	1,869	1,917	1,955	16	2,354	2,523	2,670	2,837
6	1,894	1,996	2,067	2,130	17	2,380	2,551	2,701	2,871
7	1,974	2,093	2,182	2,265	18	2,404	2,557	2,728	2,903
8	2,041	2,172	2,273	2,374	19	2,426	2,600	2,754	2,932
9	2,097	2,237	2,349	2,464	20	2,447	2,623	2,778	2,959
10	2,146	2,294	2,414	2,540	21	2,467	2,644	2,801	2,984
11	2,190	2,383	2,470	2,606	22	2,486	2,664	2,823	3,008
12	2,229	2,387	2,519	2,663	23	2,504	2,683	2,843	3,030
13	2,264	2,426	2,562	2,714	24	2,520	2,701	2,862	3,051
					25	2,537	2,717	2,880	3,071

Таблица П7

Распределение Стьюдента $P\{|t| < t_P\} = 2\int_0^{t_P} s(t,k)\,dt$ значения t_P

k	P											
	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.98	0.99
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.986	3.355
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.883	2.262	2.821	3.250
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.707
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.127	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.669	2.045	2.462	2.756
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	0.12566	0.25335	0.38532	0.52440	0.67449	0.84162	1.03643	1.28155	1.64485	1.95996	2.32664	2.57582

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов В.Н., Кокорев Ю.А., Жаров В.А. Расчет точности и обеспечение взаимозаменяемости элементов и узлов приборных устройств. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1994. 87 с.

2. Селиванов М.Н., Фридман А.Э., Кудряшова Ж.Ф. Качество измерений. Метрологическая справочная книга. Л.: Лениздат, 1987. 295 с.

3. Рудзит Я.А., Плуталов В.Н. Основы метрологии, точность и надежность в приборостроении: Учеб. пособие для студентов приборостроительных специальностей вузов. М.: Машиностроение. 1991. 304 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ