Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Методические указания

Л.П. Паршев, А.В. Калинкин, А.В. Мастихин

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Л.П. Паршев, А.В. Калинкин, А.В. Мастихин

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Методические указания
к выполнению типового расчета

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2010

УДК 517.97
ББК 22.161.8
П18

Рецензент *В.И. Ванько*

Паршев Л.П.

П18 Вариационное исчисление : метод. указания к выполнению типового расчета / Л.П. Паршев, А.В. Калинкин, А.В. Мастихин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 53, [3] с. : ил.

Представлены необходимые теоретические сведения и методические указания к решению задач по вариационному исчислению. Приведены соответствующие примеры, даны условия задач типового расчета.

Для студентов факультетов РК, ФН, МТ.

Методические указания рекомендованы Учебно-методической комиссией НУК ФН.

УДК 517.97
ББК 22.161.8

В вариационном исчислении изучаются методы исследования функционалов на экстремум. В методических указаниях рассмотрены простейшая задача вариационного исчисления и некоторые ее обобщения. Описаны прямые приближенные методы Эйлера и Ритца. Для решения задач типового расчета также необходимо обратиться к учебной литературе [1 — 6], где даны доказательства используемых теорем.

1. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИОНАЛА

Функционалом называется отображение $J : M \to R$ множества функций $M = \{y(x)\}$ на множество действительных чисел R; обозначается $J = J(y)$.

Метрическое пространство функций $\mathbf{C}^n[a;b]$. В качестве множества M будем рассматривать множество $\mathrm{C}^n[a;b]$ всех функций, для которых n-я производная $y^{(n)}(x)$ непрерывна при $x \in [a;b]$. В частности, $\mathrm{C}^0[a;b]$ — функции, непрерывные на отрезке $[a;b]$. Очевидно, что

$$\mathrm{C}^0[a;b] \supset \mathrm{C}^1[a;b] \supset \ldots \supset \mathrm{C}^n[a;b].$$

Множество $\mathrm{C}^n[a;b]$ является *линейным пространством*, так как выполнены свойства:

1) если $y_1, y_2 \in \mathrm{C}^n[a;b]$, то $y_1 + y_2 \in \mathrm{C}^n[a;b]$;

2) если $y \in \mathrm{C}^n[a;b]$ и $c \in R$, то $cy \in \mathrm{C}^n[a;b]$.

Функционал $L(y)$ является *линейным*, если выполнены свойства:

1) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$, $y_1, y_2 \in \mathrm{C}^n[a;b]$;

2) $L(cy) = cL(y)$, $y \in \mathrm{C}^n[a;b]$ и $c \in R$.

П р и м е р 1. Функционалы на множествах $\mathrm{C}^0[a;b]$ и $\mathrm{C}^1[a;b]$:

$$J_1(y) = \int_a^b y(x)\,dx;$$

$$J_2(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx;$$
$$J_3(y) = y'(x_0) + 3, \quad x_0 \in [a; b].$$

Функционалы $J_1(y)$ и $J_2(y)$ имеют геометрический смысл площади криволинейной трапеции (если $y(x) \geqslant 0$) и длины дуги графика функции $y(x)$. Функционал $J_1(y)$ — линейный, функционалы $J_2(y)$ и $J_3(y)$ не являются линейными.

Для функции $y \in \mathrm{C}^n[a; b]$ вводится *норма функции*

$$||y||_n = \sum_{i=0}^{n} \max_{x \in [a;b]} |y^{(i)}(x)|.$$

Вводится *расстояние* (*метрика*) между функциями

$$\rho_n(y_1, y_2) = \sum_{i=0}^{n} \max_{x \in [a;b]} |y_1^{(i)}(x) - y_2^{(i)}(x)|,$$

$$y_1(x), y_2(x) \in \mathrm{C}^n[a; b].$$

Для неотрицательной функции $\rho_n(y_1, y_2)$ выполнены свойства:

1) $\rho_n(y_1, y_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $y_1 \equiv y_2$;

2) $\rho_n(y_1, y_2) = \rho_n(y_2, y_1)$ (симметрия);

3) $\rho_n(y_1, y_2) \leqslant \rho_n(y_1, y_3) + \rho_n(y_3, y_2)$ (неравенство треугольника).

В частности, расстояние нулевого порядка для непрерывных функций

$$\rho_0(y_1, y_2) = \max_{x \in [a;b]} |y_1(x) - y_2(x)|, \quad y_1(x), y_2(x) \in \mathrm{C}^0[a; b].$$

Для функции $y^*(x) \in \mathrm{C}^0[a; b]$ ε-*окрестностью нулевого порядка* (*сильной* ε-*окрестностью*) называют множество функций $y(x) \in \mathrm{C}^0[a; b]$, таких, что $\rho_0(y^*, y) < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$).

Для функций, имеющих непрерывную первую производную,

$$\rho_1(y_1, y_2) = \max_{x \in [a;b]} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{x \in [a;b]} |y_1'(x) - y_2'(x)|,$$

$$y_1(x), y_2(x) \in \mathrm{C}^1[a; b].$$

Для функции $y^*(x) \in \mathrm{C}^1[a; b]$ ε-*окрестностью первого порядка* (*слабой* ε-*окрестностью*) называют множество функций $y(x) \in \mathrm{C}^1[a; b]$, таких, что $\rho_1(y^*, y) < \varepsilon$.

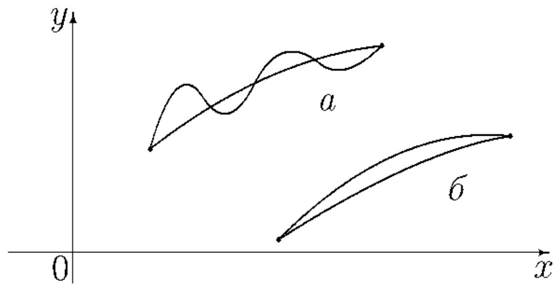

Рис. 1

На рис. 1 (случай *а*) изображены функции, близкие по расстоянию ρ_0, но не близкие по расстоянию ρ_1. На рис. 1, случай *б*, изображены функции, близкие по расстоянию первого порядка.

Сильный и слабый экстремумы функционала. Функционал $J(y)$ имеет на функции $y^*(x)$ *локальный минимум* (*максимум*), если для всех функций $y(x)$ из некоторой ε-окрестности $y^*(x)$ выполняется неравенство

$$J(y^*(x)) \leqslant J(y(x)) \quad (\, J(y^*(x)) \geqslant J(y(x))\,).$$

Экстремум (минимум или максимум) называется *глобальным*, когда на функции $y^*(x)$ достигается наименьшее или наибольшее значение функционала на всем множестве рассмативаемых функций.

Выбирая ε-окрестность нулевого или первого порядка, получаем разные понятия экстремума. Если сравниваемые функции близки к $y^*(x)$ по расстоянию ρ_0 (принадлежат сильной окрестности $y^*(x)$) и функционал $J(y)$ на функции $y^*(x)$ достигает локального экстремума, то экстремум называется *сильным*; если сравниваемые функции близки по расстоянию ρ_1 (принадлежат слабой окрестности $y^*(x)$), то экстремум называется *слабым*.

Функции, близкие по расстоянию ρ_1, близки и по расстоянию ρ_0, так как $\rho_0 \leqslant \rho_1$; поэтому, если на $y^*(x)$ достигается сильный экстремум, то он будет и слабым (в случае сильного экстремума не налагается условий на производные функций). Если на $y^*(x)$ достигается слабый экстремум, то сильного экстремума на этой функции может не быть.

2. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА

В дифференциальном исчислении при решении задачи на экстремум функции

$$f(x) \to \text{extr}$$

необходимым условием экстремума дифференцируемой в точке $x = x^*$ функции является условие $f'(x^*) = 0$ или равенство нулю дифференциала

$$df|_{x=x^*} = 0.$$

Подобным образом в вариационном исчислении при рассмотрении задачи

$$J(y) \to \text{extr}$$

определяется вариация фунционала δJ, и необходимым условием экстремума является равенство

$$\delta J|_{y=y^*} = 0.$$

Вариация функционала. Пусть функция $y(x)$, $x \in [a;b]$, принадлежит области определения функционала $J(y)$. *Вариацией функции* называют функцию $\delta y(x) = \tilde{y}(x) - y(x)$; сравниваемая с $y(x)$ функция $\tilde{y}(x)$ задается равенством $\tilde{y} = y + \delta y$. Заметим, что $\delta y' = (\delta y)' = \tilde{y}' - y'$, $\delta y'' = (\delta y)'' = \tilde{y}'' - y''$ и т. д.

Приращением функционала, соответствующим вариации δy, является функционал

$$\Delta J = \Delta J(y(x), \delta y(x)) = J(y(x) + \delta y(x)) - J(y(x)).$$

Функционал $J(y)$ называют *дифференцируемым* в точке $y(x)$, если при произвольной малой вариации $\delta y(x)$ приращение функционала можно представить в виде

$$\Delta J = L(y(x), \delta y(x)) + \beta(y(x), \delta y(x))\,||\delta y||_1,$$

где $L(y(x), \delta y(x))$ — линейный по δy функционал;

$$\beta(y(x), \delta y(x)) \to 0$$

при $||\delta y||_1 \to 0$, $||\delta y||_1$ — норма вариации функции. Для дифференцируемого функционала *вариацией функционала* в точке $y(x)$ (или сильным дифференциалом, или дифференциалом Фреше) называют главную часть приращения, линейную относительно $\delta y(x)$,

$$\delta J = \delta J(y, \delta y) = L(y, \delta y).$$

В вариационном исчислении рассматривают и другое определение вариации. Функционал $J(y(x) + \alpha\delta y(x))$, рассматриваемый на однопараметрическом множестве функций $y(x) + \alpha\delta y(x)$ при фиксированных $y(x)$ и $\delta y(x)$, обращается в функцию ($\alpha \in R$)

$$f(\alpha) = J(y + \alpha\delta y).$$

Вариацией функционала в точке $y(x)$ (или слабым дифференциалом, или дифференциалом Гато) называют производную

$$\delta J(y, \delta y) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{J(y + \alpha\delta y) - J(y)}{\alpha} = \frac{dJ(y + \alpha\delta y)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = f'(0).$$

Если функционал $J(y)$ дифференцируем в точке $y(x)$, то его дифференциал Гато в точке $y(x)$ существует и совпадает с дифференциалом Фреше.

В вариационном исчислении доказывается следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Если дифференцируемый функционал $J(y)$ достигает экстремального значения на функции $y^*(x)$, то*

$$\delta J(y^*, \delta y) = 0.$$

Далее используется лемма [2].

Л е м м а. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$$

для любой функции $g(x)$, $g(a) = 0$, $g(b) = 0$, непрерывной на отрезке $[a; b]$ и имеющей непрерывную производную. Тогда

$$f(x) \equiv 0.$$

Уравнение Эйлера. Простейшая задача вариационного исчисления имеет вид

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx \to \text{extr}, \tag{1}$$

граничные условия $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$.

Т е о р е м а 2. *Пусть функция $F(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем аргументам. Чтобы функционал (1) достигал на функции*

$y(x) \in \mathrm{C}^1[a;b]$ *слабого экстремума, необходимо, чтобы функция* $y(x)$ *удовлетворяла уравнению Эйлера*

$$F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y') = 0. \tag{2}$$

К уравнению (2) приводят следующие рассуждения. Дадим функции $y(x)$ приращение δy. С учетом граничных условий имеем $\delta y(a) = 0$, $\delta y(b) = 0$. Приращение функционала равно

$$\Delta J = J(y + \delta y) - J(y) =$$
$$= \int_a^b (F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x,y,y'))\, dx. \tag{3}$$

Разложив первое слагаемое в подынтегральном выражении по формуле Тейлора, выделяем слагаемые, которые линейно зависят от приращений δy и $\delta y'$:

$$\Delta J = \int_a^b (F_y(x,y,y')\delta y + F_{y'}(x,y,y')\delta y')\, dx + \dots\ , \tag{4}$$

где многоточие обозначает члены порядка выше первого относительно $||\delta y||_1$ и $||\delta y'||_1$. Первое слагаемое в (4) является вариацией

$$\delta J(y, \delta y)$$

— главной линейной частью приращения функционала (1). Интегрируем по частям интеграл от второго слагаемого в вариации и приравниваем вариацию нулю (следуя теореме 1)

$$\delta J = \int_a^b F_y(x,y,y')\delta y\, dx + F_{y'}(x,y,y')\delta y\Big|_a^b -$$
$$- \int_a^b \delta y \frac{d}{dx} F_{y'}(x,y,y')\, dx =$$
$$= \int_a^b (F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y'))\delta y\, dx = 0.$$

Слагаемое $F_{y'}(x,y,y')\delta y\Big|_a^b = 0$ в силу равенств $\delta y(a) = 0$, $\delta y(b) = 0$.

По условиям, наложенным на функцию $F(x,y,z)$, выражение, стоящее в скобках под интегралом, является непрерывной функцией x. Так как вариация $\delta y(x)$ — произвольная имеющая непрерывную производную функция, то, по лемме 1, выражение в скобках равно нулю. Вывод: если на функции $y(x)$ достигается экстремум, то она удовлетворяет дифференциальному уравнению (2).

Решения уравнения Эйлера называются *экстремалями* функционала. Из теоремы 2 следует, что если на функции $y(x)$ функционал (1) достигает экстремума (слабого или сильного), то эта функция — экстремаль.

З а м е ч а н и е 1. Раскрыв полную производную $\dfrac{d}{dx}F_{y'}$, получим уравнение (2) в форме

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y'(x) - F_{y'y'}y''(x) = 0.$$

Если $F_{y'y'} \not\equiv 0$, то имеем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, общее решение которого зависит от двух произвольных констант, определяемых из граничных условий $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$.

П р и м е р 2. Найти экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^{\ln 2} (y'^2 + 2y^2)e^x\,dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(0) = 5$, $y(\ln 2) = 3$.

Р е ш е н и е. Составляем уравнение Эйлера. Здесь $F = (y'^2 + 2y^2)e^x$ и $F_y = 4ye^x$, $F_{y'} = 2y'e^x$; следовательно, уравнение Эйлера имеет вид

$$4ye^x - \frac{d}{dx}(2y'e^x) = 0.$$

Выполняя дифференцирование и упрощая, получаем

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$; общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$$

([2], гл. 9, § 2, п. 5). Константы C_1 и C_2 определяем из граничных условий, решая систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5, \\ 2C_1 + \dfrac{1}{4}C_2 = 3. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 1$, $C_2 = 4$. Экстремаль

$$y = e^x + 4e^{-2x}.$$

П р и м е р 3. Найти экстремали функционала

$$J(y) = \int_1^e \frac{x^3 y'^2 + 3xy^2 - 32y \ln x}{x^4}\, dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(1) = 0,\ y(e) = 3/e$.

Р е ш е н и е. Уравнение Эйлера для этого функционала

$$\frac{6y}{x^3} - \frac{32\ln x}{x^4} - \frac{d}{dx}\left(\frac{2y'}{x}\right) = 0$$

после преобразований принимает вид

$$x^2y'' - xy' - 3y = -\frac{16\ln x}{x}. \qquad (5)$$

Полученное линейное неоднородное уравнение с переменными коэффициентами относится к уравнениям типа

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_ny = f(x), \qquad (6)$$

где a_i, $i = 0,\ \ldots,\ n$ — постоянные. Такие уравнения называются *уравнениями Эйлера* ([7], гл. 9, § 2, п. 7); заменой независимой переменной $x = e^t$ (т. е. $t = \ln x$) уравнение (6) преобразуется в линейное с постоянными коэффициентами. Для уравнения второго порядка имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{1}{x}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\,\frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dt}\,\frac{1}{x^2};$$

выполнив замену переменной в (5), получим

$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = -16te^{-t}.$$

Общее решение согласно теореме о структуре решения линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y(t) = y_{\text{одн}}(t) + y_{\text{неодн}}(t)$$

([2], гл. 9, § 2, п. 4), где $y_{\text{одн}}(t)$ есть решение линейного однородного уравнения

$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 0,$$

$y_{\text{одн}}(t)$ находится методом характеристического многочлена. Частное решение $y_{\text{неодн}}(t)$ находится методом неопределенных коэффициентов в виде $t(At + B)e^{-t}$ ([2], гл. 9, § 2, п. 6). Вычисления дают

$$y_{\text{одн}}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t},$$

и далее

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} + (2t^2 + t)e^{-t}.$$

Возвращаясь к переменной x, имеем решение уравнения (5)

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 x^3 + (2\ln^2 x + \ln x)\frac{1}{x}.$$

Граничные условия дают $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, следовательно,

$$y = \frac{2\ln^2 x + \ln x}{x}.$$

П р и м е р 4. Найти экстремали функционала

$$J(y) = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(y'^2 - y^2 - \frac{2y}{\sin^2 x}\right) dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(\pi/3) = 1 - (1/4)\ln 3$, $y(\pi/2) = 1$.

Р е ш е н и е. Уравнение Эйлера имеет вид

$$y'' + y = -\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad (7)$$

Решение однородного линейного уравнения $y'' + y = 0$ есть

$$y_{\text{одн}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x;$$

следуя методу вариации постоянных, решение неоднородного уравнения (7) ищем в виде

$$y_{\text{неодн}} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$$

Функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений ([7], гл. 9, § 2, п. 4)

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ C_1'(x)(\cos x)' + C_2'(x)(\sin x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \end{cases}$$

отсюда
$$C_1'(x) = \frac{1}{\sin x}, \quad C_2'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$
После интегрирования получаем
$$C_1(x) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \tilde{C}_1, \qquad C_2(x) = \frac{1}{\sin x} + \tilde{C}_2.$$
Следовательно, общее решение уравнения (7) имеет вид
$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \, \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1.$$

Константы C_1 и C_2 определяем из граничных условий, решая систему
$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} C_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} C_2 + \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1}{\sqrt{3}} + 1 = 1 - \dfrac{1}{4} \ln 3, \\ C_2 + 1 = 1. \end{cases}$$
Отсюда $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Экстремаль
$$y = \cos x \, \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1.$$

Некоторые случаи интегрируемости уравнения Эйлера. При решении дифференциального уравнения (2) выделяют частные случаи.

А. В подынтегральную функцию из (1) не входит y', т. е. $F = F(x, y)$. Уравнение Эйлера вырождается в неявное уравнение для функции $y(x)$,
$$F_y(x, y) = 0.$$
Задача нахождения экстремума имеет решение в исключительных случаях.

Б. Подынтегральная функция зависит только от y', т. е. $F = F(y')$. Уравнение Эйлера имеет вид
$$F_{y'y'}(y') y'' = 0,$$
отсюда $F_{y'y'}(y') = 0$ или $y'' = 0$. Экстремалями являются прямые
$$y(x) = C_1 x + C_2.$$

В. Подынтегральная функция не зависит от y, т. е. $F = F(x, y')$. Тогда уравнение (2) имеет вид

$$\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0$$

и $F_{y'}(x, y') = C_1$ — первый интеграл уравнения Эйлера (дифференциальное уравнение первого порядка).

Г. Для уравнения Эйлера допускается понижение порядка, если подынтегральная функция не зависит явно от x, т. е. $F = F(y, y')$. Уравнение принимает вид

$$F_y - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' = 0,$$

и после умножения обеих частей этого равенства на y' получаем

$$\frac{d}{dx}(F_y y' - F_{yy'} y'^2 - F_{y'y'} y'' y') = \frac{d}{dx}(F - y' F_{y'}) = 0.$$

Следовательно, уравнение Эйлера имеет первый интеграл — дифференциальное уравнение первого порядка

$$F - y' F_{y'} = C_1.$$

Д. Производная y' входит в подынтегральную функцию (1) линейно,

$$F(x, y, y') = P(x, y) + Q(x, y) y'.$$

В частности, если (1) — криволинейный интеграл, выражающий работу силы

$$\bar{\mathcal{F}} = P(x, y)\bar{i} + Q(x, y)\bar{j}$$

вдоль некоторой кривой на плоскости, соединяющей точки $(a; y_0)$ и $(b; y_1)$, то

$$J(y) = \int_{(a;y_0)}^{(b;y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy =$$

$$= \int_{(a;y_0)}^{(b;y_1)} (P(x, y) + Q(x, y) y')\, dx \to \text{extr}$$

и уравнение Эйлера приводится к виду

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Если последнее равенство выполнено в области, содержащей точки $(a; y_0)$, $(b; y_1)$, то интеграл не зависит от пути интегрирования и $J(y)$ имеет постоянное значение.

Пример 5. Найти экстремали функционала

$$J(y) = \int_3^4 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}\,dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(3) = 1,\ y(4) = 2$.

Решение. Подынтегральная функция не зависит от y. Тогда согласно случаю В имеем

$$\frac{1}{x}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1.$$

Отсюда

$$y' = \pm\frac{C_1 x}{\sqrt{1-C_1^2x^2}}.$$

Интегрируя, получаем общее решение:

$$y = \mp\frac{1}{C_1}\sqrt{1-C_1^2x^2} + C_2,$$

или

$$x^2 + (y - C_2)^2 = \frac{1}{C_1^2}$$

— семейство окружностей. Для определения констант C_1 и C_2 составим систему уравнений, используя граничные условия:

$$\begin{cases} 9 + (1 - C_2)^2 = \dfrac{1}{C_1^2}, \\ 16 + (2 - C_2)^2 = \dfrac{1}{C_1^2}. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем $C_2 = 5$, и следовательно, $1/C_1^2 = 25$. Уравнение найденной экстремали $x^2 + (y-5)^2 = 25$ записываем в виде $y = 5 \pm \sqrt{25 - x^2}$. Так как $y(3) = 1$, то

$$y = 5 - \sqrt{25 - x^2}.$$

Пример 6. Найти экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^{\pi/4} \frac{1+y^2}{y'}\,dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(0) = 0,\ y(\pi/4) = 1$.

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция не зависит явно от x. Согласно случаю Г имеем равенство

$$\frac{1+y^2}{y'} + y'\frac{1+y^2}{y'^2} = C,$$

или $1 + y^2 = C_1 y'$. Разделяя переменные и интегрируя ([2], гл. 9, § 1, п. 3), получаем $x + C_2 = C_1 \operatorname{arctg} y$, откуда

$$y = \operatorname{tg}\frac{x + C_2}{C_1}.$$

Из начальных условий следует, что $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ и экстремаль

$$y = \operatorname{tg} x.$$

П р и м е р 7 (задача о брахистохроне). Найти лежащую в вертикальной плоскости кривую $y(x)$, соединяющую точки с координатами $(0; 0)$ и $(x_1; y_1)$ (рис. 2), такую, чтобы материальная точка, выпущенная из точки $(0; 0)$ без начальной скорости, двигаясь по кривой $y(x)$ под действием силы тяжести, достигла точки $(x_1; y_1)$ в кратчайшее время (трением пренебречь).

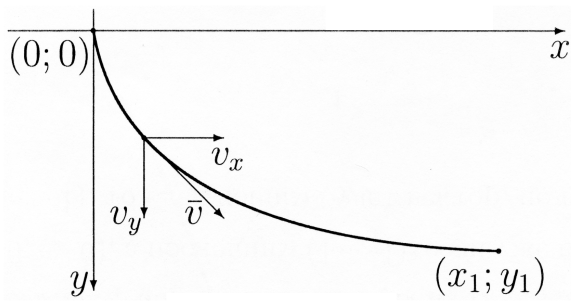

Рис. 2

Р е ш е н и е. Приобретенная материальной точкой кинетическая энергия равна потере потенциальной энергии, т. е. $m|\bar{v}|^2/2 = mgh$, где m — масса точки; g — постоянная ускорения; $h = y(x)$ — величина перемещения точки по вертикали. Вектор скорости движения точки разложим по координатам: $\bar{v} = (v_x; v_y)$,

$|\bar{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2$; $y'(x) = v_y/v_x$ (по геометрическому смыслу производной). Из системы уравнений

$$\begin{cases} v_x^2 + v_y^2 = 2gy, \\ y' = \dfrac{v_y}{v_x}, \end{cases}$$

получаем $v_x = dx/dt = \sqrt{2gy/(1+y'^2)}$ и

$$dt = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx.$$

Таким образом, время движения точки выражается интегралом

$$t_1 = \int_0^{t_1} dt = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\, dx \to \min, \tag{8}$$

граничные условия $y(0) = 0$, $y(x_1) = y_1$.

Функционал (8) не содержит явно x (случай Г), имеем первый интеграл

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} - \frac{y'^2}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}} = C,$$

что приводит к уравнению

$$y(1+y'^2) = C_1,$$

где $C_1 = 1/(2gC^2)$. Уравнение первого порядка может быть решено методом разделения переменных; мы применим искусственный прием — введем параметр φ, полагая

$$y' = \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Тогда

$$y = \frac{C_1}{1+y'^2} = \frac{C_1}{1+\operatorname{ctg}^2(\varphi/2)} = C_1 \sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Справедливы равенства

$$\frac{dy}{d\varphi} = C_1 \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}, \quad \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{d\varphi} = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cdot x'_\varphi,$$

откуда $x'_\varphi = C_1 \sin^2\dfrac{\varphi}{2}$ и

$$x(\varphi) = \int C_1 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\, d\varphi = C_1 \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\varphi\right) d\varphi =$$
$$= C_1\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\sin\varphi\right) + C_2.$$

Таким образом, экстремали задаются параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = C_1\left(\dfrac{\varphi}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\varphi\right) + C_2, \\ y = C_1 \sin^2 \dfrac{\varphi}{2}. \end{cases}$$

Обозначив $C_1/2 = r$ и положив $C_2 = 0$, получим семейство циклоид, проходящих через точку $(0; 0)$:

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1 - \cos\varphi).$$

Радиус r производящей окружности циклоиды определяется из условия прохождения экстремали через точку $(x_1; y_1)$.

3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ

При исследовании функции на локальный экстремум, $f(x) \to \to \mathrm{extr}$, используют необходимое условие $df|_{x=x^*} = 0$; достаточные условия экстремума (минимума или максимума) определяют, рассматривая знак второго дифференциала $d^2 f$ в малой окрестности точки x^*.

Аналогично, для приращения функционала в простейшей задаче (1) формула Тейлора дает (см. (3), (4))

$$\Delta J = \delta J + \frac{1}{2!}\delta^2 J + \ldots = \int_a^b (F_y(x, y, y')\,\delta y + F_{y'}(x, y, y')\,\delta y')\, dx +$$
$$+ \frac{1}{2!}\int_a^b (F_{yy}(x, y, y')(\delta y)^2 + 2F_{yy'}(x, y, y')\,\delta y\,\delta y' +$$
$$+ F_{y'y'}(x, y, y')(\delta y')^2)\, dx + \ldots$$

Второй интеграл в этой сумме называют второй вариацией функционала и обозначают

$$\delta^2 J = \delta^2 J(y, \delta y).$$

Для экстремали $y^*(x)$ $\delta J|_{y=y^*} = 0$ и исследование функционала $J(y)$ на достаточные условия слабого (локального) экстремума сводится к рассмотрению знака второй вариации $\delta^2 J(y, \delta y)$ в окрестности экстремали.

Однопараметрическое семейство кривых $y = y(x, C)$ называется *полем* в области $D \subset R^2$, если каждую точку области проходит единственная кривая семейства. Семейство $y = y(x, C)$ является *центральным полем* в области $D \subset R^2$, если в D имеется единственная точка, через которую проходят все кривые семейства, а через любую другую точку области D проходит ровно одна кривая.

Т е о р е м а 3. *Пусть в простейшей задаче* (1) *функция* $F(x, y, z)$ *имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем аргументам. На экстремали* $y^*(x)$ *достигается слабый экстремум, если выполнены условия*:

— экстремаль $y^*(x)$ *принадлежит центральному полю экстремалей* $y = y(x, C)$ *в области* D*, содержащей* $y^*(x)$ (*условие Якоби*);

— для слабого минимума

$$F_{y'y'}(x, y, y')|_{y=y^*(x)} > 0$$

при $x \in [a; b]$*, и для слабого максимума*

$$F_{y'y'}(x, y, y')|_{y=y^*(x)} < 0$$

при $x \in [a; b]$ (*условие Лежандра*).

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *— на экстремали* $y^*(x)$ *достигается слабый экстремум для задачи* (1)*. Если условие Лежандра выполнено для всех функций* $y(x)$*, близких по ординатам к* $y^*(x)$*, и при любых значениях* $y'(x)$*, то экстремум является сильным.*

Условие Лежандра для экстремума функционала — следствие более общего достаточного условия Вейерштрасса [1 — 4].

Схема исследования простейшей задачи на экстремум.

1. Решаем уравнение (2), находим двухпараметрическое семейство экстремалей $y = y(x, C_1, C_2)$ и экстремаль $y^*(x)$, удовлетворяющую граничным условиям.

2. Находим семейство экстремалей $y = y(x, C)$, образующее центральное поле и содержащее кривую $y^*(x)$, $x \in [a, b]$.

3. Если функция $F_{y'y'}(x, y^*, y^{*\prime})$ сохраняет знак при $x \in [a; b]$, то при $F_{y'y'}(x, y^*, y^{*\prime}) > 0$ на $y^*(x)$ достигается слабый минимум, при $F_{y'y'}(x, y^*, y^{*\prime}) < 0$ — слабый максимум функционала (1).

4. Если неравенства в п. 3 выполняются при любых $y(x)$, близких к $y^*(x)$, и при любых значениях $y'(x)$, то имеет место сильный экстремум функционала.

П р и м е р 8. Исследовать функционал, используя необходимые и достаточные условия экстремума,

$$J(y) = \int_1^e (x^2 y'^2 + 4y(\ln x + 1))\, dx \to \text{extr}.$$

Граничные условия $y(1) = 0,\ y(e) = 1$.

Если функционал имеет экстремум, то найти экстремальное значение J^*.

Р е ш е н и е. Составляем уравнение Эйлера

$$4(\ln x + 1) - \frac{d}{dx}(2x^2 y') = 0.$$

После преобразований получаем

$$x^2 y'' + 2xy' = 2(\ln x + 1).$$

Для уравнения допускается понижение порядка ([2], гл. 9, § 2, п. 2) — заменой $z = y'$ переходим к уравнению первого порядка

$$z' + \frac{2z}{x} = \frac{2(\ln x + 1)}{x^2}.$$

Решаем линейное неоднородное уравнение методом вариации постоянной ([2], гл. 9, § 1, п. 5), находим

$$z = \frac{2\ln x}{x} - \frac{C_1}{x^2},$$

откуда получаем общее решение уравнения Эйлера

$$y = \ln^2 x + \frac{C_1}{x} + C_2.$$

Полагая в этом выражении $y(1) = 0$ и $y(e) = 1$, находим значения $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$ и определяем эстремаль

$$y^* = \ln^2 x.$$

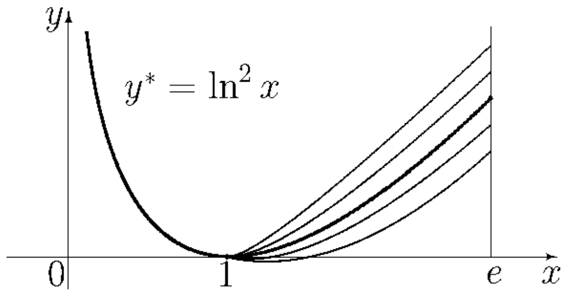

Рис. 3

Исследуем экстремаль $y^* = \ln^2 x$. Используя условие $y(1) = 0$, получаем $C_1 + C_2 = 0$ и выделяем однопараметрическое семейство экстремалей, которые проходят через точку $(1; 0)$:

$$y(x, C_1) = \ln^2 x + C_1\Big(\frac{1}{x} - 1\Big).$$

Экстремали этого семейства нигде, кроме точки $(1; 0)$, не пересекаются и образуют центральное поле: экстремаль y^* включена в центральное поле экстремалей (рис. 3).

Поскольку

$$F_{y'y'}|_{y=\ln^2 x} = 2x^2 > 0$$

при $x \in [1; e]$, то условие Лежандра выполнено. Функция $2x^2$ в последнем неравенстве не зависит от y и y' — следовательно, на y^* функционал имеет сильный минимум.

Подставляя в подынтегральное выражение $y^* = \ln^2 x$, находим значение функционала

$$J^*_{\min} = J(y^*) = \int_1^e (4\ln^2 x + 4\ln^2 x(\ln x + 1))\, dx = 8.$$

П р и м е р 9. Исследовать на экстремум функционал ($b > 0$)

$$J(y) = \int_0^b (y^2 - y'^2)\, dx \to \text{extr}.$$

Граничные условия $y(0) = 0,\ y(b) = y_1$.

Р е ш е н и е. Уравнение Эйлера $y'' + y = 0$; общее решение

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

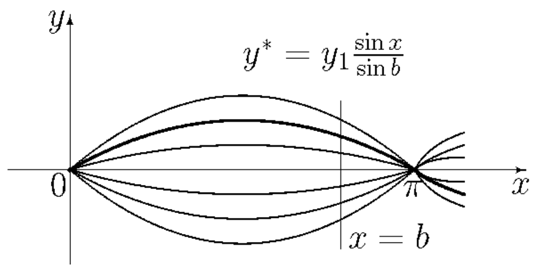

Рис. 4

экстремаль

$$y^* = y_1 \frac{\sin x}{\sin b}.$$

Экстремали функционала, проходящие через точку $(0; 0)$,

$$y(x, C_2) = C_2 \sin x,$$

пересекаются в точке $(\pi; 0)$ и образуют центральное поле при условии $b < \pi$ (рис. 4). При этом, так как

$$F_{y'y'} = -2 < 0$$

при любых x, y и y', на экстремали y^* реализуется сильный максимум функционала.

При $b \geqslant \pi$ задача требует дополнительного исследования.

П р и м е р 10. Исследовать на экстремум функционал ($\alpha \in R$)

$$J(y) = \int_0^1 (y'^3 - \alpha y')\, dx \to \text{extr}.$$

Граничные условия $y(0) = 0,\ y(1) = 2$.

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция зависит только от y' (случай Б в гл. 2), следовательно, экстремали — прямые линии

$$y = C_1 x + C_2.$$

Из граничных условий имеем

$$y^* = 2x.$$

Экстремали, проходящие через начало координат, образуют центральное поле. Вторая производная $F_{y'y'} = 6y'$; на экстремали

$$F_{y'y'}|_{y^*=2x} = 12 > 0.$$

Имеет место слабый экстремум.

Так как выражение $F_{y'y'} = 6y'$ при различных y' меняет знак, сильного экстремума нет.

П р и м е р 11. Исследовать функционал

$$J(y) = \int_1^e (x^3y'^2 - xy^2 + 2x^3y' + 6x^2y)\,dx \to \text{extr}.$$

Граничные условия $y(1) = 0,\ y(e) = 1/e$.

Р е ш е н и е. Уравнение Эйлера имеет вид

$$2xy - 6x^2 + \frac{d}{dx}(2x^3y' + 2x^3) = 0$$

или

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

Дифференциальное уравнение является частным случаем уравнения (6) и заменой независимой переменной $x = e^t$ преобразуется к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = -1$, общее решение $y(t) = (C_1 + C_2t)e^{-t}$. Возвращаясь к переменной x, получаем экстремали

$$y(x) = (C_1 + C_2 \ln x)\frac{1}{x}. \tag{9}$$

Из граничных условий следует

$$y^* = \frac{\ln x}{x}.$$

Воспользовавшись условием $y(1) = 0$, выделяем из (9) семейство экстремалей, проходящих через точку $(1; 0)$:

$$y(x, C_2) = C_2\frac{\ln x}{x}.$$

Кроме точки $(1; 0)$, экстремали этого семейства нигде не пересекаются — образуют центральное поле (рис. 5).

Поскольку

$$F_{y'y'} = 2x^3 > 0$$

при $x \in [1; e]$, то условие Лежандра выполнено. Выражение $F_{y'y'} = 2x^3$ не зависит от y, y' — на y^* достигается сильный минимум.

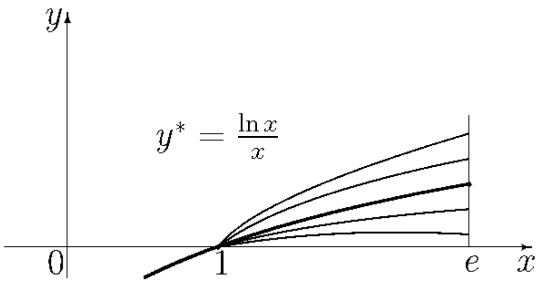

Рис. 5

П р и м е р 12. Исследовать функционал

$$J(y) = \int_a^b x^2 y'^2 \, dx \to \text{extr}$$

при граничных условиях:

а) $y(-1) = -1$, $y(1) = 1$;

б) $y(1) = 1$, $y(3) = 5$.

Р е ш е н и е. Получаем уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dx}(2x^2 y') = 0,$$

откуда $x^2 y' = C_1$ и

$$y = -\frac{C_1}{x} + C_2$$

— семейство гипербол.

а. Из граничных условий получаем экстремаль $y = 1/x$, не соединяющую точки $(-1; -1)$ и $(1; 1)$. Следовательно, при таких граничных условиях экстремум на найденной экстремали не достигается.

Заметим, что

$$J(y) \geqslant 0.$$

На разрывной функции: $y^*(x) = -1$ при $x \in [-1; 0]$; $y^*(x) = 1$ при $x \in (0; 1]$, функционал имеет экстремум

$$J^*_{\min} = J(y^*) = 0.$$

б. Удовлетворяющая граничным условиям экстремаль

$$y^* = -\frac{6}{x} + 7.$$

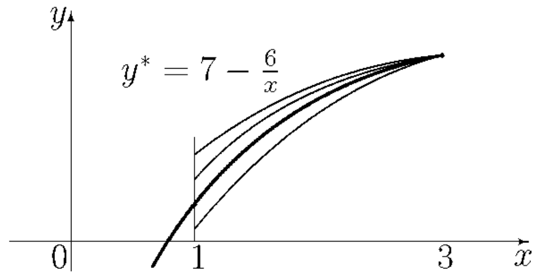

Рис. 6

По условию $y(3) = 5$ выделяем поле экстремалей, проходящих через точку $(3; 5)$:

$$y(x, C_2) = \frac{15 - 3C_2}{x} + C_2$$

— являющееся центральным (рис. 6). Поскольку

$$F_{y'y'} = 2x^2 > 0$$

при $x \in [1; 3]$ независимо от значений y и y', то на экстремали y^* функционал достигает сильного минимума.

4. ОБОБЩЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Функционал, зависящий от производных высших порядков. Рассматривается задача нахождения экстремума функционала

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y', \ \ldots, \ y^{(n)})\, dx \to \text{extr}, \qquad (10)$$

на концах отрезка $[a; b]$ заданы условия $y(a) = y_0^{(0)}$, $y'(a) = y_0^{(1)}, \ \ldots \ , y^{(n-1)}(a) = y_0^{(n-1)}$; $y(b) = y_1^{(0)}$, $y'(b) = y_1^{(1)}, \ \ldots,$ $y^{(n-1)}(b) = y_1^{(n-1)}$.

Т е о р е м а 5. *Пусть функция $F(x, y, \ \ldots, \ y^{(n)})$ имеет непрерывные частные производные до $(n+1)$-го порядка включительно по всем аргументам. Если на функции $y(x) \in \mathrm{C}^{2n}[a; b]$ функционал*

(10) *достигает локального экстремума, то функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера—Пуассона*

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - \frac{d^3}{dx^3}F_{y'''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0. \quad (11)$$

Вывод уравнения (11) основан на теореме 1 и аналогичен выводу уравнения Эйлера (2). Уравнение (11) имеет порядок $2n$; общее решение содержит $2n$ констант, которые определяются из $2n$ граничных условий.

П р и м е р 13. Найти экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^{\pi/2} (y''^2 - y^2 + x^2)\,dx.$$

Граничные условия $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$, $y'(\pi/2) = -1$.

Р е ш е н и е. Здесь $F = y''^2 - y^2 + x^2$ и $F_y = -2y$, $F_{y'} = 0$, $F_{y''} = 2y''$; уравнение Эйлера—Пуассона

$$y^{(4)} - y = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^4 - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\lambda_{3,4} = \pm i$; общее решение

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Из граничных условий находим значения констант $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 1$, $C_4 = 0$ и экстремаль

$$y = \cos x.$$

Функционал, зависящий от нескольких функций. Пусть функционал зависит от n функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, зависящих от одной переменной x,

$$J(y_1, y_2, \ldots, y_n) =$$
$$= \int_a^b F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx \to \text{extr}; \quad (12)$$

граничные условия $y_i(a) = y_i^{(0)}$, $y_i(b) = y_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots, n$.

Т е о р е м а 6. *Пусть функция $F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка* *включительно по всем аргументам. Чтобы функционал* (12) *достигал на функциях* $y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x) \in \mathrm{C}^1[a;b]$ *слабого экстремума, необходимо, чтобы эти функции удовлетворяли системе дифференциальных уравнений Эйлера*

$$\begin{cases} F_{y_1} - \dfrac{d}{dx}F_{y_1'} = 0, \\ \ldots \\ F_{y_n} - \dfrac{d}{dx}F_{y_n'} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Функционал (12) записывают также в векторной форме

$$J(\bar{y}) = \int_a^b F(x, \bar{y}, \bar{y}')\,dx, \qquad \bar{y} = (y_1, y_2,\ \ldots,\ y_n),$$

граничные условия $\bar{y}(a) = \bar{y}^{(0)}$, $\bar{y}(b) = \bar{y}^{(1)}$.

К системе уравнений (13) приводят следующие рассуждения. Пусть экстремум функционала (12) достигается на вектор-функции $\bar{y}^* = (y_1^*, y_2^*,\ \ldots,\ y_n^*)$. Рассмотрим функционал в зависимости от функции y_i, при фиксированных функциях $y_1^*, \ldots, y_{i-1}^*, y_{i+1}^*, \ldots,$ y_n^*. Функционал, по условию, достигает экстремума, когда функция y_i примет значение y_i^*, и следовательно, эта функция удовлетворяет уравнению Эйлера

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}F_{y_i'} = 0.$$

Таким образом, отыскиваемые функции

$$y_1^*, y_2^*,\ \ldots,\ y_n^*$$

являются решением системы уравнений (13).

Решение системы (13) из n уравнений второго порядка зависит от $2n$ констант, которые определяются из $2n$ граничных условий.

П р и м е р 14. Найти функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, на которых может достигаться экстремум функционала

$$J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi/2} (y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1y_2)dx.$$

Граничные условия $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi/2) = 1$, $y_2(0) = 0$, $y_2(\pi/2) = -1$.

Р е ш е н и е. Здесь имеем $F = y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1y_2$ и $F_{y_1} = 2y_2$, $F_{y_1'} = 2y_1'$, $F_{y_2} = 2y_1$, $F_{y_2'} = 2y_2'$. Система уравнений Эйлера получает вид

$$\begin{cases} y_1'' - y_2 = 0, \\ y_2'' - y_1 = 0. \end{cases}$$

Применяем метод исключения переменных ([2], гл. 9, § 3, п. 2): дважды дифференцируем первое уравнение, подставляем $y_2'' = y_1^{(4)}$ во второе уравнение и получаем

$$y_1^{(4)} - y_1 = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^4 - 1 = 0$, общее решение

$$y_1 = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x.$$

Затем вычисляем

$$y_2 = y_1'' = C_1e^x + C_2e^{-x} - C_3\cos x - C_4\sin x.$$

Из граничных условий имеем $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$, $C_4 = 1$ и экстремаль

$$y_1 = \sin x, \quad y_2 = -\sin x.$$

Задача на условный экстремум. Пусть задан функционал от n функций переменной x,

$$J(y_1, \ldots, y_n) = \int_a^b F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\,dx. \qquad (14)$$

Требуется отыскать экстремум функционала, если кроме условий на концах интервала $y_1(a) = y_1^{(0)}$, $y_1(b) = y_1^{(1)}$, ..., $y_n(a) = y_n^{(0)}$, $y_n(b) = y_n^{(1)}$ на функции и их производные наложены дифференциальные условия в виде уравнений

$$\varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad m < n. \qquad (15)$$

Подобно тому, как используется метод множителей Лагранжа при решении задачи на условный экстремум функции нескольких переменных, при решении задачи (14), (15) используются множители — функции

$$\lambda_1(x), \ \ldots, \ \lambda_m(x) \in \mathrm{C}^1[a; b]$$

и рассматривается вспомогательный функционал

$$\tilde{J}(y_1, \ldots, y_n) = \int_a^b L(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n', \lambda_1, \ldots, \lambda_m)\, dx,$$

где

$$\begin{aligned} L(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n', \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \\ = F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') + \\ + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') \end{aligned}$$

— *функция Лагранжа.*

Т е о р е м а 7. *Пусть функции F, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ имеют непрерывные частные производные до третьего порядка включительно по всем аргументам и ранг матрицы Якоби*

$$\mathrm{rang}\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\partial(y_1', \ldots, y_n')} = m.$$

Если функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ доставляют слабый экстремум фунционалу (14) *при заданных граничных условиях и условиях* (15)*, то существуют множители Лагранжа $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$, при которых эти функции удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Эйлера*

$$\begin{cases} L_{y_1} - \dfrac{d}{dx}L_{y_1'} = 0, \\ \ldots \\ L_{y_n} - \dfrac{d}{dx}L_{y_n'} = 0, \end{cases} \tag{16}$$

записанных для функционала $\tilde{J}$.

В решение системы (16) войдут m функций $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$ и $2n$ произвольные постоянные, для определения которых используются уравнения связи (15) и граничные условия.

П р и м е р 15. Найти функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, на которых может достигаться экстремум функционала

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 + x^3)\, dx$$

при дополнительном условии $y_1 - 2y_2 + 3x = 0$. Граничные условия $y_1(0) = y_2(1) = 2,\ y_2(0) = y_1(1) = 1$.

Р е ш е н и е. Функция Лагранжа

$$L = y_1'^2 + y_2'^2 + x^3 + \lambda(y_1 - 2y_2 + 3x).$$

Для нахождения функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\lambda(x)$ составляем систему из уравнений Эйлера и уравнения связи

$$\begin{cases} 2y_1'' - \lambda = 0, \\ y_2'' + \lambda = 0, \\ y_1 - 2y_2 + 3x = 0. \end{cases}$$

После сложения первого и второго уравнений получим $2y_1'' + y_2'' = 0$, подставляем сюда $y_1 = 2y_2 - 3x$. Получаем равенство

$$y_2'' = 0.$$

Общее решение

$$y_2 = C_1 x + C_2, \quad y_1 = (2C_1 - 3)x + 2C_2.$$

Из граничных условий $C_1 = 1$, $C_2 = 1$ и экстремум может достигаться на функциях

$$y_1 = -x + 2, \quad y_2 = x + 1.$$

Изопериметрическая задача. Найти экстремали функционала

$$J(\bar{y}) = \int_a^b F(x, \bar{y}, \bar{y}')\,dx, \tag{17}$$

если вектор $\bar{y} = (y_1, y_2,\ \ldots,\ y_n)$ удовлетворяет граничным условиям $\bar{y}(a) = \bar{y}^{(0)}$, $\bar{y}(b) = \bar{y}^{(1)}$ и связям, наложенным в виде интегралов (изопериметрические условия)

$$\int_a^b \varphi_i(x, \bar{y}, \bar{y}')\,dx = C_i, \qquad i = 1,\ \ldots,\ m. \tag{18}$$

В вариационной задаче (17), (18) для получения необходимых условий экстремума рассматривается вспомогательный функционал

$$\tilde{J} = \int_a^b \tilde{L}\,dx,$$

где подынтегральная функция

$$\tilde{L} = F(x, \bar{y}, \bar{y}') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x, \bar{y}, \bar{y}').$$

Для изопериметрической задачи можно показать, что множители Лагранжа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ являются постоянными.

Т е о р е м а 8. *Пусть функции F, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем аргументам. Если функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ доставляют слабый экстремум фунционалу* (17) *при заданных граничных условиях и условиях* (18)*, то существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, при которых эти функции удовлетворяют системе уравнений Эйлера*

$$\begin{cases} \tilde{L}_{y_1} - \dfrac{d}{dx}\tilde{L}_{y_1'} = 0, \\ \ldots \\ \tilde{L}_{y_n} - \dfrac{d}{dx}\tilde{L}_{y_n'} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Входящие в общее решение системы (19) m постоянных $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и $2n$ констант определяются из m условий (18) и $2n$ граничных условий.

П р и м е р 16. Найти экстремали в задаче

$$J(y) = \int_0^1 y'^2\, dx$$

с изопериметрическим условием

$$\int_0^1 y\, dx = 3.$$

Граничные условия $y(0) = 1,\ y(1) = 6$.

Р е ш е н и е. Функция Лагранжа имеет вид

$$\tilde{L} = y'^2 + \lambda y.$$

Из уравнения Эйлера

$$2y'' - \lambda = 0$$

находим

$$y = \frac{\lambda}{4}x^2 + C_1 x + C_2.$$

Используя граничные условия и наложенную интегральную связь, составляем систему

$$\begin{cases} C_2 = 1, \\ \dfrac{\lambda}{4} + C_1 + C_2 = 6, \\ \displaystyle\int_0^1 \left(\dfrac{\lambda}{4}x^2 + C_1 x + C_2\right) dx = \dfrac{\lambda}{12} + \dfrac{C_1}{2} + C_2 = 3. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 2$, $C_2 = 1$ и $\lambda = 12$. Экстремаль

$$y = 3x^2 + 2x + 1.$$

П р и м е р 17 (задача о цепной линии). Найти форму гибкой однородной нерастяжимой цепи длиной l, подвешенной в концевых точках.

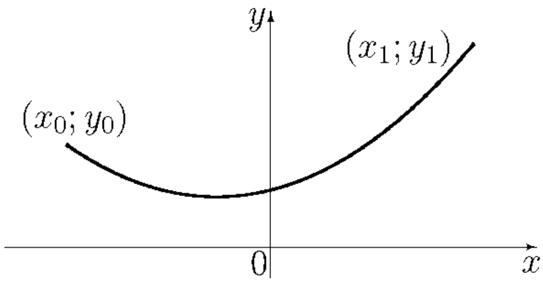

Рис. 7

Р е ш е н и е. Цепь с линейной плотностью массы ρ закреплена в точках $(x_0; y_0)$ и $(x_1; y_1)$ (рис. 7). Форма цепи в положении равновесия задается функцией

$$y = y(x).$$

Используем принцип механики: система материальных точек в силовом потенциальном поле находится в равновесии тогда и только тогда, когда ее потенциальная энергия минимальна. Следовательно, задача сводится к нахождению формы цепи $y = y(x)$, обеспечивающей минимум потенциальной энергии.

Элемент дуги цепи ds имеет массу

$$dm = \rho ds = \rho\sqrt{1 + y'^2}dx$$

и, находясь в поле тяготения, обладает потенциальной энергией

$$dU = dm\, gh = \rho g y\sqrt{1+y'^2}dx.$$

Для всей цепи

$$U(y) = \int_{x_0}^{x_1} dU = \int_{x_0}^{x_1} \rho g y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Задача сводится к нахождению функции $y(x)$, для которой

$$\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx \to \min,$$

при граничных условиях $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ и условии

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l. \tag{20}$$

Составляем вспомогательный функционал

$$\tilde{J}(y) = \int_{x_0}^{x_1} (y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2})\,dx.$$

Подынтегральная функция не зависит явно от x, поэтому, согласно случаю Г (см. гл. 2), имеем уравнение Эйлера в виде

$$(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - y'(y+\lambda)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C,$$

или

$$y + \lambda = C\sqrt{1+y'^2}.$$

Уравнение решается введением параметра $y' = \operatorname{sh} t$. Тогда

$$y = C_1 \operatorname{ch} t - \lambda,$$

и после дифференцирования этого соотношения получим

$$y' = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = C_1 \operatorname{sh} t\,\frac{dt}{dx} = \operatorname{sh} t,$$

откуда $x'_t = C_1$ и $x = C_1 t + C_2$. Получили семейство экстремалей

$$y = C_1 \operatorname{ch}\frac{x - C_2}{C_1} - \lambda.$$

Для определения значений параметров λ, C_1, C_2 составляем систему уравнений из условия (20) и двух граничных условий:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 \frac{x-C_2}{C_1}}\,dx = C_1\Big(\operatorname{sh}\frac{x_1-C_2}{C_1} - \operatorname{sh}\frac{x_0-C_2}{C_1}\Big) = l, \\ C_1 \operatorname{ch}\dfrac{x_0-C_2}{C_1} - \lambda = y_0, \\ C_1 \operatorname{ch}\dfrac{x_1-C_2}{C_1} - \lambda = y_1. \end{cases}$$

Примеры решения вариационных задач с подвижными границами и задачи Больца даны в [5, гл. 16, § 6]. В вариационном исчислении рассматривают также задачу Майера и другие задачи [4].

5. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Аналитическое решение уравнений Эйлера можно получить в редких случаях, поэтому разработаны приближенные методы решения вариационных задач [1 — 4]. Прямыми называются методы, с помощью которых вариационную задачу сводят к решению задачи на экстремум функции нескольких переменных. Далее излагаются два метода — Эйлера и Ритца. Примеры приближенного решения вариационных задач методом Канторовича и методом Галеркина даны в [5, гл. 16, § 6].

Конечно-разностный метод Эйлера. Для приближенного отыскания экстремали функционала

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx, \qquad y(a) = y_a,\ y(b) = y_b,$$

заменяем функцию $y(x)$ ломаной, $n+1$ вершина которой имеют фиксированные абсциссы

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b$$

($x_{i+1} - x_i = \Delta x$), ее производную $y'(x_i)$ заменяем разностным отношением $(y_{i+1}-y_i)/\Delta x$, а интеграл заменяем суммой (по формуле прямоугольников)

$$J(y) \approx \sum_{i=0}^{n-1} F\Big(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\Big)\Delta x =$$
$$= \Phi(y_1, y_2,\ \ldots,\ y_{n-1}) \to \text{extr}, \qquad (21)$$

где
$$y_0 = y_a,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{n-1},\ y_n = y_b$$
— неизвестные ординаты вершин ломаной, на которых может достигаться экстремум.

Необходимое условие экстремума функции $\Phi(y_1, y_2,\ \ldots,\ y_{n-1})$ — обращение в нуль частных производных

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Заметим, что в сумме (21) каждое из переменных y_i входит в два слагаемых, поэтому после вычисления частных производных система уравнений (относительно $y_1, y_2,\ \ldots,\ y_{n-1}$) принимает вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = F_y\Big(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\Big)\Delta x + F_{y'}\Big(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}\Big) -$$
$$- F_{y'}\Big(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\Big) = 0, \ \ i = 1, 2,\ \ldots,\ n-1. \qquad (22)$$

Решая систему (22), получаем приближенные значения ординат экстремали
$$y_1^*, y_2^*,\ \ldots,\ y_{n-1}^*.$$

З а м е ч а н и е 2. Л. Эйлер получил уравнение (2) следующим образом [1]. Равенство (22) поделим на приращение Δx и запишем в виде

$$F_y\Big(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\Big) - \frac{1}{\Delta x}\Delta F_{y'}\Big(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}\Big) = 0,$$
$$i = 1, 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Устремляем $\Delta x \to 0$ $(n \to \infty)$, по определению производной получаем (2).

Метод Ритца. Дан функционал

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx, \qquad y(a) = y_0,\ y(b) = y_1. \qquad (23)$$

Представим экстремаль как линейную комбинацию некоторых функций $\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)$ с неопределенными коэффициентами $\alpha_i,\ \ldots,\ \alpha_n$ (подлежащими определению),

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x). \tag{24}$$

При этом граничные условия удовлетворяются равенствами $\varphi_0(a) = y_0,\ \varphi_0(b) = y_1;\ \varphi_i(a) = 0,\ \varphi_i(b) = 0,\ i = 1,\ \ldots,\ n.$ Функции

$$\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)$$

являются линейно независимыми и называются *координатными*.

Подставляя (24) в функционал (23), после интегрирования получаем задачу на экстремум функции нескольких переменных

$$J(y_n) = \int_a^b F\Big(x, \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x), \varphi_0'(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i'(x)\Big) dx =$$
$$= \Phi(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n) \to \text{extr}.$$

Для определения экстремальных значений переменных приравниваем частные производные нулю, получаем систему уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} = 0, \qquad i = 1,\ \ldots,\ n.$$

Находим из этой системы значения $\alpha_1^*,\ \ldots,\ \alpha_n^*$, подставляем их в (24) и получаем приближение

$$y_n^*(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* \varphi_i(x).$$

Вопросы сходимости рядов вида (24) при $n \to \infty$ являются сложными [2].

П р и м е р 18. Найти приближенное решение задачи

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - 2xy)\, dx \to \text{extr}. \tag{25}$$

Граничные условия $y(0) = 0,\ y(1) = 0.$

Р е ш е н и е. А. Метод Эйлера.

Первое приближение. Полагаем $n = 2$, $\Delta x = 0,5$. Аппроксимируем экстремаль ломаной с координатами вершин $(0;0)$, $(0,5;y_1)$, $(1;0)$, где y_1 — искомая ордината (рис. 8, случай *а*).

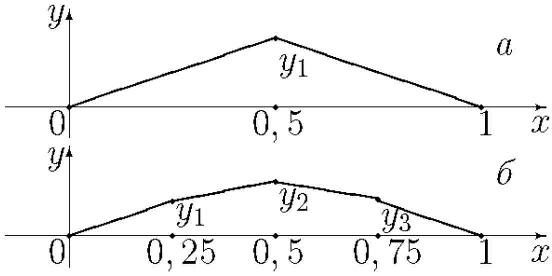

Рис. 8

Согласно формуле (21) функция $\Phi(y_1)$ имеет вид

$$\Phi(y_1) = \Big(\Big(\frac{y_1 - y_0}{\Delta x}\Big)^2 - y_0^2 - 2x_0y_0 + \Big(\frac{y_2 - y_1}{\Delta x}\Big)^2 - y_1^2 - 2x_1y_1\Big)\Delta x,$$

и после подстановки $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1$; $y_0 = 0$, $y_2 = 0$ получаем

$$\Phi(y_1) = \Big(\Big(\frac{y_1}{0,5}\Big)^2 + \Big(-\frac{y_1}{0,5}\Big)^2 - y_1^2 - y_1\Big)\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_1 \to \text{extr}.$$

Вычисляем производную

$$\frac{d\Phi}{dy_1} = 7y_1 - \frac{1}{2} = 0,$$

и следовательно, $y_1^* = 1/14 \approx 0,071428$.

Второе приближение. Полагаем $n = 4$, $\Delta x = 0,25$ и берем ломаную с координатами вершин $(0;0)$, $(0,25;y_1)$, $(0,5;y_2)$, $(0,75;y_1)$, $(1;0)$, где y_1, y_2, y_3 — неизвестные (рис. 8, случай *б*). Следуя (21), функционал (25) заменяем функцией

$$\Phi(y_1,y_2,y_3) = \Big(\Big(\frac{y_1 - y_0}{\Delta x}\Big)^2 - y_0^2 - 2x_0y_0 + \Big(\frac{y_2 - y_1}{\Delta x}\Big)^2 - y_1^2 -$$

$$-2x_1y_1 + \Big(\frac{y_3 - y_2}{\Delta x}\Big)^2 - y_2^2 - 2x_2y_2 + \Big(\frac{y_4 - y_3}{\Delta x}\Big)^2 - y_3^2 - 2x_3y_3\Big)\Delta x =$$

$$= \Big(16y_1^2 + 16(y_2 - y_1)^2 - y_1^2 - \frac{1}{2}y_1 + 16(y_3 - y_2)^2 - y_2^2 - y_2 + 16y_3^2 -$$

$$- y_3^2 - \frac{3}{2}y_3\Big) \cdot \frac{1}{4} = \frac{31}{4}y_1^2 + \frac{31}{4}y_2^2 + \frac{31}{4}y_3^2 - 8y_1y_2 - 8y_2y_3 - \frac{1}{8}y_1 -$$

$$- \frac{1}{4}y_2 - \frac{3}{8}y_3 \to \text{extr.}$$

Для исследования функции $\Phi(y_1, y_2, y_3)$ на экстремум приравниваем нулю частные производные, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1} = \dfrac{31}{2}y_1 - 8y_2 - \dfrac{1}{8} = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_2} = -8y_1 + \dfrac{31}{2}y_2 - 8y_3 - \dfrac{1}{4} = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_3} = -8y_2 + \dfrac{31}{2}y_3 - \dfrac{3}{8} = 0. \end{cases}$$

Отсюда $y_1^* \approx 0,044274$, $y_2^* \approx 0,070156$, $y_3^* \approx 0,060403$.

Б. Метод Ритца.

В качестве приближающих функций для экстремали возьмем многочлены

$$y_n(x) = x(1-x)(\alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_n x^{n-1}).$$

Здесь $\varphi_0(x) \equiv 0$ и координатные функции имеют вид

$$\varphi_1(x) = x - x^2, \ \ldots, \ \varphi_n(x) = x^n - x^{n+1}.$$

Первое приближение: $y_1(x) = \alpha_1 x(1-x)$. После подстановки $y_1(x)$ в (25) и интегрирования получаем задачу

$$\Phi(\alpha_1) = \int_0^1 (\alpha_1^2(1-2x)^2 - \alpha_1^2 x^2(1-x)^2 - 2\alpha_1 x^2(1-x))\,dx =$$

$$= \frac{3}{10}\alpha_1^2 - \frac{1}{6}\alpha_1 \to \text{extr.}$$

Далее

$$\frac{d\Phi}{d\alpha_1} = \frac{3}{5}\alpha_1 - \frac{1}{6} = 0,$$

и следовательно, $\alpha_1^* = \dfrac{5}{18}$. Приближение для экстремали имеет вид

$$y_1^*(x) = \frac{5}{18}x(1-x) \approx 0,277777x(1-x).$$

Второе приближение: $y_2(x) = x(1-x)(\alpha_1 + \alpha_2 x)$. Подставляем $y_2(x)$ в (25) и вычисляем интеграл

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 ((\alpha_1(1-2x)+\alpha_2(2x^2-3x^3))^2 - x^2(1-x)^2(\alpha_1+$$
$$+\alpha_2 x)^2 - 2x^2(1-x)(\alpha_1+\alpha_2 x))\,dx = \frac{3}{10}\alpha_1^2 + \frac{3}{10}\alpha_1\alpha_2 + \frac{13}{105}\alpha_2^2 -$$
$$-\frac{1}{6}\alpha_1 - \frac{1}{10}\alpha_2 \to \text{extr.}$$

В вычислениях использован табличный интеграл

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}, \quad n, m = 0, 1, 2\ldots$$

Для определения возможного экстремума исследуем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} = -\dfrac{3}{5}\alpha_1 + \dfrac{3}{10}\alpha_2 - \dfrac{1}{6} = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} = \dfrac{3}{10}\alpha_1 - \dfrac{26}{105}\alpha_2 - \dfrac{1}{10} = 0. \end{cases}$$

Отсюда $\alpha_1^* = \dfrac{71}{369}$, $\alpha_2^* = \dfrac{7}{41}$ и приближение для экстремали

$$y_2^*(x) \approx x(1-x)(0,192411 + 0,170731x).$$

В. Точное решение.

Уравнение Эйлера для задачи (25) имеет вид

$$y'' + y = -x.$$

Экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям,

$$y = -x + \frac{\sin x}{\sin 1}.$$

Результаты, полученные разными методами, представлены в таблице.

Сравнение значений ординат при $x = 0,25;\ 0,50;\ 0,75$ для вторых приближенных решений и точного решения показывает, что они совпадают с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

Таблица

Метод решения	x_i				
	0	0,25	0,50	0,75	1
Первое приближение метода Эйлера, y_i^*	0		0,071428		0
Второе приближение метода Эйлера, y_i^*	0	0,044274	0,070156	0,060403	0
Первое приближение метода Ритца, $y_1^*(x)$	0	0,052083	0,069444	0,052083	0
Второе приближение метода Ритца, $y_2^*(x)$	0	0,044080	0,069444	0,060086	0
Точное решение, $y(x)$	0	0,044014	0,069746	0,060056	0

З а м е ч а н и е 3. Для рассматриваемых в приложениях вариационных задач точное решение неизвестно, и при оценке погрешности приближенного решения используют следующий прием, возникший в практике приближенных вычислений. Вычисляют приближение $y_n^*(x)$ и приближение $y_{n+1}^*(x)$, и если

$$|y_{n+1}^*(x) - y_n^*(x)| < \varepsilon$$

для всех рассматриваемых x (ε — выбранное малое число), то требуемая точность считается достигнутой. В противном случае вычисляют $y_{n+2}^*(x)$, рассматривают неравенство

$$|y_{n+2}^*(x) - y_{n+1}^*(x)| < \varepsilon$$

и т. д.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

Задача 1. Найти все экстремали функционала $J(y)$, удовлетворяющие указанным граничным условиям.

1. $J(y) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2 + 8xy\cos x)\,dx;$

$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$

2. $J(y) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + y^2 - 4xy\sin x)\,dx;$

$y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$

3. $J(y) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + 4y^2 + 2ye^{2x}\sin 2x)\,dx;$

$y(0) = -\frac{1}{10}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{\pi}}{10}.$

4. $J(y) = \int_0^{1} (y'^2 + y^2 + 2xye^{x})\,dx;$

$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

5. $J(y) = \int_0^{\pi/6} (y'^2 - 9y^2 + 4xy\sin x)\,dx;$

$y(0) = -\frac{1}{16}, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{48}.$

6. $J(y) = \int_0^{1/3} (y'^2 - 9y^2 + 2xye^{3x})\,dx;$

$y(0) = -\frac{1}{54}, \quad y\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$

7. $J(y) = \int_0^{\pi} (y'^2 + 2y^2 + 4xye^{x}(\cos x - \sin x))\,dx;$

$y(0) = 1, \quad y(\pi) = -e^{\pi}.$

8. $J(y) = \int_0^{e} (x^3y'^2 - xy^2)\,dx;$

$y(1) = 0, \quad y(e) = \frac{1}{e}.$

9. $J(y) = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2y'^2 + y^2}{x}\,dx;$

$y(1) = 0, \quad y(2) = \dfrac{3}{2}.$

10. $J(y) = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2y'^2 + 3y^2}{x^3}\,dx;$

$y(1) = 0, \quad y(2) = \dfrac{15}{2}.$

11. $J(y) = \displaystyle\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{x^2y'^2 - 4y^2}{x}\,dx;$

$y(1) = 1, \quad y(e^{\pi/4}) = 1.$

12. $J(y) = \displaystyle\int_{-1/3}^2 (3x+2)^{7/3}y'^2\,dx;$

$y\Big(-\dfrac{1}{3}\Big) = 1, \quad y(2) = \dfrac{1}{16}.$

13. $J(y) = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2y'^2 + 2y^2}{x^2}\,dx;$

$y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$

14. $J(y) = \displaystyle\int_1^{e^{\pi/2}} \frac{x^2y'^2 - y^2}{x}\,dx;$

$y(1) = 0, \quad y(e^{\pi/2}) = 1.$

15. $J(y) = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2y'^2 - 6y^2 + 2xy}{x^6}\,dx;$

$y(1) = \dfrac{1}{2}, \quad y(2) = 5.$

16. $J(y) = \displaystyle\int_1^e \frac{x^2y'^2 - 4y^2 + 2x^3y}{x^5}\,dx;$

$y(1) = 0, \quad y(e) = e^3 + e^2.$

17. $J(y) = \displaystyle\int_1^e \frac{x^2y'^2 - y^2 + 4xy}{x^3}\,dx;$

$y(1) = 0, \quad y(e) = e.$

18. $J(y) = \displaystyle\int_1^e (x^3y'^2 - xy^2 + 8x^2y)\,dx;$

$y(1) = 1, \quad y(e) = e + \dfrac{1}{e}.$

19. $J(y) = \int_1^{e^{\pi/2}} (2x^2y'^2 - 5y^2)\,dx;$
$y(1) = 0, \quad y(e^{\pi/2}) = e^{-\pi/6}.$

20. $J(y) = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(y'^2 + y^2 + \dfrac{4ye^{2x}}{e^x - 1}\right) dx;$
$y(\ln 2) = -1, \quad y(\ln 3) = \dfrac{8\ln 2}{3} - 1.$

21. $J(y) = \int_0^1 (y'^2 + 2y^2 + 8x^2ye^{x^2})\,dx;$
$y(0) = 1, \quad y(1) = e.$

22. $J(y) = \int_0^{(1/2)\ln 3} (y'^2 + y^2 + 2y\,\mathrm{th}\,x)\,dx;$
$y(0) = \dfrac{\pi}{2}, \quad y\left(\dfrac{\ln 3}{2}\right) = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$

23. $J(y) = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(y'^2 - y^2 + \dfrac{2y}{\sin x}\right) dx;$
$y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\ln 2}{2}, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$

24. $J(y) = \int_0^{\pi/3} \left(y'^2 - y^2 + \dfrac{2y}{\cos x}\right) dx;$
$y(0) = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\ln 2}{2}.$

25. $J(y) = \int_0^{\pi/6} (y'^2 - y^2 + 2y\,\mathrm{tg}\,x)\,dx;$
$y(0) = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}\ln 3}{4}.$

26. $J(y) = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} (y'^2 - y^2 - 2y'\ln\sin x)\,dx;$
$y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}\ln 3}{4}, \quad y\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}\ln 3}{4}.$

27. $J(y) = \int_0^1 (y'^2 + 4y(x+1))e^x\,dx;$
$y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$

28. $J(y) = \int_0^1 (y'^2 - y^2 + 2y)e^{-2x}\,dx;$
$y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$

29. $J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 - 4y\,\mathrm{ch}\,x)\,dx;$

$y(0) = 0, \quad y(1) = \dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}.$

30. $J(y) = \int_0^2 \sqrt{y(1 + y'^2)}\,dx;$

$y(0) = 1, \quad y(2) = 1.$

Задача 2. Найти все экстремали функционала $J(y)$, удовлетворяющие указанным граничным условиям.

1. $J(y) = \int_1^e \left(y'^2 - y^2 + \dfrac{2ye^x}{x}\right)e^{-2x}\,dx;$

$y(1) = 0, \quad y(e) = e^{1+e}.$

2. $J(y) = \int_0^{\ln 4} \dfrac{1 + y^2}{y'^2}\,dx;$

$y(0) = -\dfrac{3}{4}, \quad y(\ln 4) = \dfrac{3}{4}.$

3. $J(y) = \int_0^e (xy'^2 + yy')\,dx;$

$y(1) = 0, \quad y(e) = 1.$

4. $J(y) = \int_0^{\pi/8} \left(y'^2 - y^2 + \dfrac{2y}{\cos^{3/2} 2x}\right)dx;$

$y(0) = -1, \quad y\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}.$

5. $J(y) = \int_{-1}^0 (y'^2 - 2xy)\,dx;$

$y(-1) = 0, \quad y(0) = 2.$

6. $J(y) = \int_0^{\pi/4} (y'^2 + 7yy' - 4y^2)\,dx;$

$y(0) = 1, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0.$

7. $J(y) = \int_0^1 (x + y'^2)\,dx;$

$y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$

8. $J(y) = \int_0^{\pi} (y'^2 + y^2 - 2y'\cos x)\,dx;$

$y(0) = 0, \quad y(\pi) = \dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{4}.$

9. $J(y) = \int_{\pi/3}^{\pi/2} (y'^2 - y^2 + 2y \operatorname{ctg} x)\, dx;$

$y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}\ln 3}{4}, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$

10. $J(y) = \int_1^5 \dfrac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}\, dx;$

$y(1) = 3, \quad y(5) = 5.$

11. $J(y) = \int_0^2 (y'^2 + y^2 - 2y'e^x)\, dx;$

$y(0) = 0, \quad y(2) = e^2.$

12. $J(y) = \int_0^{\pi/6} (y'^2 - y^2 + 2y \operatorname{tg}^2 x)\, dx;$

$y(0) = -2, \quad y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\ln 3}{4}.$

13. $J(y) = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \left(y'^2 - y^2 + \dfrac{2y}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}\right) dx;$

$y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}.$

14. $J(y) = \int_0^1 yy'^2\, dx;$

$y(0) = 1, \quad y(1) = \sqrt[3]{4}.$

15. $J(y) = \int_0^1 (y'^2 - y^2 + 2y \cos x)\, dx;$

$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

16. $J(y) = \int_0^{\pi} (y'^2 - y^2 + 4y \cos x)\, dx;$

$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$

17. $J(y) = \int_{-1}^0 (12xy - y'^2)\, dx;$

$y(-1) = 1, \quad y(0) = 0.$

18. $J(y) = \int_0^{\pi} (y'^2 - y^2)\, dx;$

$y(0) = 1, \quad y(\pi) = -1.$

19. $J(y) = \int_0^1 (y'^2 + 4y^2)\, dx;$

$y(0) = e^2, \quad y(1) = 1.$

20. $J(y) = \int_{-1}^{1} (y'^2 - 2xy)\, dx;$
$y(-1) = -1, \quad y(1) = 1.$

21. $J(y) = \int_{0}^{\pi/2} (y'^2 - y^2 - 2y' \sin x)\, dx;$
$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$

22. $J(y) = \int_{0}^{\pi/4} (y'^2 - 4y^2 + 2y \sin x)\, dx;$
$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}.$

23. $J(y) = \int_{0}^{1} (y'^2 - y^2 - y)e^{2x}\, dx;$
$y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{e}.$

24. $J(y) = \int_{0}^{1} (y'^2 + y^2)\, dx;$
$y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$

25. $J(y) = \int_{1}^{3} xy'(6 + x^2 y')\, dx;$
$y(1) = 5, \quad y(3) = 3.$

26. $J(y) = \int_{0}^{2} (6x^2 y' + y'^2)\, dx;$
$y(0) = 1, \quad y(2) = 1.$

27. $J(y) = \int_{1}^{e} \left(x^3 y'^2 - xy^2 + \frac{2y}{x}\right) dx;$
$y(1) = 0, \quad y(e) = \frac{1}{e^2}.$

28. $J(y) = \int_{0}^{1} \frac{y'^2}{1 + y^2}\, dx;$
$y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{3}{4}.$

29. $J(y) = \int_{0}^{7} (1 + y)y'^2\, dx;$
$y(0) = 0, \quad y(7) = 3.$

30. $J(y) = \int_0^{\pi} (y'^2 + y^2 - 4y \sin x)\, dx;$

$y(0) = 0, \quad y(\pi) = \dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}.$

Задача 3. Используя необходимые и достаточные условия экстремума функционала, исследовать функционал $J(y)$. Если функционал имеет слабый или сильный экстремум, то вычислить экстремальное значение J^*.

1. $J(y) = \int_0^2 (xy' + y'^2)\, dx;$

$y(0) = 1, \quad y(2) = 0.$

2. $J(y) = \int_1^2 y'(1 + x^2 y')\, dx;$

$y(1) = 3, \quad y(2) = 5.$

3. $J(y) = \int_{-1}^2 y'(1 + x^2 y')\, dx;$

$y(-1) = 1, \quad y(2) = 1.$

4. $J(y) = \int_0^{\pi/4} (4y^2 - y'^2 + 8y)\, dx;$

$y(0) = -1, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0.$

5. $J(y) = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 12y^2)\, dx;$

$y(1) = 1, \quad y(2) = 8.$

6. $J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^{2x})\, dx;$

$y(0) = \dfrac{1}{3}, \quad y(1) = \dfrac{e^2}{3}.$

7. $J(y) = \int_0^{\pi/4} (y^2 - y'^2 + 6y \sin 2x)\, dx;$

$y(0) = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1.$

8. $J(y) = \int_0^2 \dfrac{1}{y'}\, dx;$

$y(0) = 0, \quad y(2) = 5.$

9. $J(y) = \int_0^3 \frac{1}{y'^2}\,dx;$
$y(0) = 0, \quad y(3) = 4.$

10. $J(y) = \int_0^1 (x^2 + x + y^2 + y'^2)\,dx;$
$y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$

11. $J(y) = \int_0^1 (xy^2 + x^2yy' + (1 + x^2)y'^2)\,dx;$
$y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$

12. $J(y) = \int_0^1 (y + y')^2\,dx;$
$y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$

13. $J(y) = \int_0^1 (y + y'^2)\,dx;$
$y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{4}.$

14. $J(y) = \int_0^1 (y'^2 - y^2 + 8xy)\,dx;$
$y(0) = 0, \quad y(1) = 5.$

15. $J(y) = \int_0^{\pi/8} (y'^2 + 2yy' - 16y^2)\,dx;$
$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1.$

16. $J(y) = \int_1^2 \frac{y'^2}{x^3}\,dx;$
$y(1) = 2, \quad y(2) = 17.$

17. $J(y) = \int_0^{\pi/2} (y^2 + y'^2 - 2y\sin x)\,dx;$
$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$

18. $J(y) = \int_0^{\pi/2} (y^2 - y'^2 + 2y\,\mathrm{sh}\,x)\,dx;$
$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}}{4}.$

19. $J(y) = \int_0^{\pi/2} (y^2 - y'^2 - 2y\sin x)\,dx;$
$y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

20. $J(y) = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (2xyy' + y'^2)\,dx;$

$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

21. $J(y) = \int_{1}^{2} y'(y + x^2y')\,dx;$

$y(1) = 0, \quad y(2) = \dfrac{1}{2}.$

22. $J(y) = \int_{1}^{2} xy'^2\,dx;$

$y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$

23. $J(y) = \int_{0}^{1} (y + xy' + y'^2)\,dx;$

$y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$

24. $J(y) = \int_{-1}^{1} x^{2/3}y'^2\,dx;$

$y(-1) = -1, \quad y(1) = 1.$

25. $J(y) = \int_{0}^{1} (2xy + y'^2)\,dx;$

$y(0) = 0, \quad y(1) = \dfrac{1}{6}.$

26. $J(y) = \int_{1}^{2} (xy'^4 - 2yy'^3)\,dx;$

$y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$

27. $J(y) = \int_{2}^{3} \dfrac{x^3}{y'^2}\,dx;$

$y(2) = 4, \quad y(3) = 9.$

28. $J(y) = \int_{0}^{\pi/2} (y'^2 - 2y^2 + 4y\cos^2 x)\,dx;$

$y(0) = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

29. $J(y) = \int_{1}^{e} xy'(xy' - 2)\,dx;$

$y(1) = 0, \quad y(e) = \dfrac{1}{e}.$

30. $J(y) = \int_{0}^{6} (y'^2 - xy')\,dx;$

$y(0) = 0, \quad y(6) = 0.$

Задача 4. Найти экстремали функционалов: со старшей производной (варианты 1–8); от вектор-функции (варианты 9–11); с дифференциальными связями (варианты 12–16); в изопериметрических задачах (варианты 17–24). Найти первое и второе приближения для экстремали: методом Эйлера (варианты 25–27; указано число n звеньев ломаной); методом Ритца (варианты 28–30; указан вид $y_1(x)$ и $y_2(x)$).

1. $J(y) = \int_0^{\pi/2} (16y^2 - y''^2 + x^2)\,dx;$

$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sh}\pi,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2(\operatorname{ch}\pi + 1).$

2. $J(y) = \int_1^{e} (x+1)xy''^2\,dx;$

$y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ y(e) = e,\ y'(e) = 2.$

3. $J(y) = \int_0^{1} (24xy - y''^2)\,dx;$

$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = \frac{1}{10}.$

4. $J(y) = \int_0^{\pi} (y''^2 - 2y'^2 - 16y\sin x)\,dx;$

$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y(\pi) = 0,\ y'(\pi) = \pi^2.$

5. $J(y) = \int_0^{1} (y'''^2 + y''^2)\,dx;$

$y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0,\ y(1) = \operatorname{sh}1,$
$y'(1) = \operatorname{ch}1,\ y''(1) = \operatorname{sh}1.$

6. $J(y) = \int_0^{1} (x+1)^2 y''^2\,dx;$

$y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y(1) = \ln 2,\ y'(1) = \frac{1}{2}.$

7. $J(y) = \int_0^{\pi} (y''^2 + 4y^2)\,dx;$

$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y(\pi) = 0,\ y'(\pi) = \operatorname{ch}\pi.$

8. $J(y) = \int_0^{\pi/2} (y''^2 - 2y'^2 + y^2 + 16y\cos x)\,dx;$

$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4}.$

9. $J(y_1,y_2)=\displaystyle\int_0^{\pi}(2y_1y_2-2y_1^2+y_1'^2-y_2'^2)\,dx;$
$y_1(0)=1,\ y_1(\pi)=-1,\ y_2(0)=-1,\ y_2(\pi)=1.$

10. $J(y_1,y_2,y_3)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}(y_1'^2+y_3'^2+2y_1y_2+2y_2y_3)\,dx;$
$y_1(0)=1,\ y_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2},\ y_2(0)=-1,\ y_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0,\ y_3(0)=1,$
$y_3\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}.$

11. $J(y_1,y_2)=\displaystyle\int_0^{1}(y_1^2+y_2^2+2y_1'y_2')\,dx;$
$y_1(0)=1,\ y_1(1)=\dfrac{e+e^{-1}}{2},\ y_2(0)=1,\ y_2(1)=\dfrac{e+e^{-1}}{2}.$

12. $J(y_1,y_2)=\displaystyle\int_0^{1}(y_1'^2+y_2'^2-2y_1y_2)\,dx;$
$y_1(0)=1,\ y_1(1)=1+e,\ y_2(0)=-1,\ y_2(1)=1-e;$
$y_1'+y_2'-4x=0.$

13. $J(y_1,y_2)=\displaystyle\int_0^{\pi}(y_1'^2-y_2'^2)\,dx;$
$y_1(0)=-1,\ y_1(\pi)=1,\ y_2(0)=0,\ y_2(\pi)=-\pi;$
$y_1'-y_2-2\sin x=0.$

14. $J(y_1,y_2)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}(y_1'^2+y_2'^2-2y_2^2)\,dx;$
$y_1(0)=-4,\ y_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2},\ y_2(0)=0,\ y_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2};$
$y_1+y_2+4\cos x=0.$

15. $J(y_1,y_2)=\displaystyle\int_0^{1}(y_1'^2+2y_2'^2+y_2^2)\,dx;$
$y_1(0)=1,\ y_1(1)=2e,\ y_2(0)=0,\ y_2(1)=e;$
$y_1-y_2'=0.$

16. $J(y_1,y_2)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}(y_1'^2-2y_2'^2+y_2^2)\,dx;$
$y_1(0)=0,\ y_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1,\ y_2(0)=0,\ y_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2};$
$y_1-y_2'=0.$

17. $J(y)=\displaystyle\int_0^{1}y'^2\,dx;\quad y(0)=0,\ y(1)=1;$
$\displaystyle\int_0^1 y\,dx=\frac{3}{4},\qquad \int_0^1 xy\,dx=\frac{1}{2}.$

18. $J(y)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}(y'^2-y^2)\,dx;\quad y(0)=0,\ y\Big(\frac{\pi}{2}\Big)=\pi;$
$\displaystyle\int_0^{\pi/2} y\cos x\,dx=\frac{\pi}{2}.$

19. $J(y)=\displaystyle\int_0^{1} y'^2\,dx;\quad y(0)=2,\ y(1)=2e+1;$
$\displaystyle\int_0^{1} ye^{x-1}\,dx=e.$

20. $J(y)=\displaystyle\int_0^{\ln 2}(y'^2+y^2)\,dx;\quad y(0)=-3,\ y(\ln 2)=0;$
$\displaystyle\int_0^{\ln 2} y\,dx=1-3\ln 2.$

21. $J(y)=\displaystyle\int_0^{1}(x^2+y'^2)\,dx;\quad y(0)=0,\ y(1)=0;$
$\displaystyle\int_0^{1} y^2\,dx=2.$

22. $J(y_1,y_2)=\displaystyle\int_0^{1}(y_1'^2+y_2'^2-xy_2'-y_2)\,dx;$
$y_1(0)=0,\ y_1(1)=1,\ y_2(0)=0,\ y_2(1)=1;$
$\displaystyle\int_0^{1}(xy_1'-y_1'^2+y_2'^2)\,dx=\frac{1}{2}.$

23. $J(y)=\displaystyle\int_0^{1}(y-y'^2)\,dx;\quad y(0)=0,\ y(1)=\frac{1}{4};$
$\displaystyle\int_0^{1} y'^2\,dx=\frac{1}{12}.$

24. $J(y)=\displaystyle\int_0^{1}(y^2+y'^2)\,dx;\quad y(0)=0,\ y(1)=0;$
$\displaystyle\int_0^{1} y^2\,dx=1.$

25. $J(y)=\displaystyle\int_0^{1}(y'^2+2y)\,dx;\quad y(0)=0,\ y(1)=0;$
$n=2,\ n=4.$

26. $J(y)=\displaystyle\int_1^{2}\Big(xy'^2-\frac{x^2-1}{x}y^2-2x^2y\Big)dx;\quad y(1)=0,$
$y(2)=0;\quad n=2,\ n=3.$

27. $J(y) = \int_0^2 (y^2 + 2xy + y'^2)\,dx; \quad y(0) = 0,\ y(2) = 0;$
$n = 2,\ n = 3.$

28. $J(y) = \int_0^1 (y'^2 + 2y)\,dx; \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0;$
$y_1 = \alpha_1 x(1 - x),$
$y_2 = \alpha_1 x(1 - x) + \alpha_2 x^2(1 - x).$

29. $J(y) = \int_0^1 (y'^2 + 2xy - x^2y^2)dx; \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0;$
$y_1 = \alpha_1 x(1 - x),$
$y_2 = \alpha_1 x(1 - x) + \alpha_2 x^2(1 - x).$

30. $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 - (1 + x^2)y - 2y)dx; \quad y(-1) = 0,\ y(1) = 0;$
$y_1 = \alpha_1(1 - x^2),$
$y_2 = \alpha_1(1 - x^2) + \alpha_2(1 - x^4).$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965. 424 с.

2. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 228 с.

3. *Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И.* Вариационное исчисление. М.: Наука, 1973. 192 с.

4. *Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н.* Вариационное исчисление и оптимальное управление: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 488 с.

5. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 4: Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения / Под ред. А.В. Ефимова. М.: Наука, 1990. 304 с.

6. *Богомолов Г.И.* Методические указания к решению задач по курсу «Вариационное исчисление» / МВТУ им. Н.Э. Баумана. М., 1986. 44 с.

7. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2: Специальные разделы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1986. 368 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Паршев Леонид Петрович
Калинкин Александр Вячеславович
Мастихин Антон Вячеславович

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *Е.К. Кошелева*
Корректор *М.А. Василевская*
Компьютерная верстка *В.И. Товстоног*

Подписано в печать 01.11.2010. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 3,26. Тираж 400 экз. Изд. № 1.
Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5.

ДЛЯ ЗАМЕТОК