

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ  
МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

А.В. Неклюдов, А.В. Калинкин

# ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ



Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»

А.В. Неклюдов, А.В. Калинкин

# Основы тензорной алгебры

## *Учебно-методическое пособие*



Москва

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МГТУ им. Н. Э. Баумана

2021

УДК 514.743

ББК 22.151.5

Н47

Издание доступно в электронном виде по адресу  
<https://bmstu.press/catalog/item/7296/>

Факультет «Фундаментальные науки»  
Кафедра «Высшая математика»

*Рекомендовано Научно-методическим советом  
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебно-методического пособия*

**Неклюдов, А. В.**

Н47      Основы тензорной алгебры : учебно-методическое пособие /  
А. В. Неклюдов, А. В. Калинкин. — Москва: Издательство МГТУ  
им. Н. Э. Баумана, 2021. — 61, [3] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-5720-5

Представлены необходимые теоретические сведения и методические указания к решению задач по тензорному исчислению. Приведены соответствующие примеры, даны условия вариантов типового расчета.

Для студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана, изучающих дисциплину «Вариационное исчисление и тензоры».

УДК 514.743

ББК 22.151.5



Уважаемые читатели! Пожелания, предложения, а также сообщения о замеченных опечатках и неточностях Издательство просит направлять по электронной почте:  
[info@bmstu.press](mailto:info@bmstu.press)

ISBN 978-5-7038-5720-5

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021

© Оформление. Издательство

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021

## **Предисловие**

В учебно-методическом пособии рассмотрены основные понятия тензорной алгебры в трехмерном евклидовом пространстве, которые имеют многочисленные приложения в теоретической физике и механике сплошной среды, в частности в теории упругости и пластичности, механике тонкостенных конструкций, механике пластин, стержней и оболочек, механике жидкости и газа, физике горения и взрыва. Тензоры вводятся как (поли-) линейные операторы, различные виды координат тензора рассматриваются как разные виды матриц линейного оператора. Включены также векторная алгебра в ковариантных координатах, инварианты тензоров 2-го ранга и теорема Гамильтона — Кэли, спектральная теория симметричных тензоров 2-го ранга. Имеется обширная литература по данной тематике и ее приложениям. Задачи по тензорной алгебре можно найти в [1], подробное изложение теории и ее приложений — в [2–10].

Изложенный материал соответствует второму модулю курса «Вариационное исчисление и тензоры» и программе подготовки специалистов по специальности «Прикладная механика» факультета «Робототехника и комплексная автоматизация».

Цель учебно-методического пособия — способствовать приобретению студентами и аспирантами ряда компетенций, необходимых для расчета и исследования задач динамики и прочности машин, а также механики сплошных сред.

Критериями достижения указанной цели являются усвоение учащимися определяемых в данном курсе базовых понятий тензорной алгебры и решение предлагаемых в пособии задач типового расчета.

## 1. Базис и координаты вектора в базисе. Переход к новому базису

Рассмотрим геометрические векторы в трехмерном пространстве. Напомним, что базисом в этом пространстве называется упорядоченный набор любых трех линейно независимых, т. е. некомпланарных векторов. В отличие от курса аналитической геометрии, в котором главным образом используют ортонормированные базисы, в тензорной алгебре рассматривается произвольный базис  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  (рис. 1). Будем называть его основным базисом.

Разложим произвольный вектор  $\bar{x}$  по базису:

$$\bar{x} = x^1 \bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_2 + x^3 \bar{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x^i \bar{e}_i.$$

Числа  $(x^1, x^2, x^3)$  — координаты вектора  $\bar{x}$  в базисе  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ . В тензорной алгебре координаты вектора в основном базисе обозначаются верхними индексами и называются контравариантными.

Заметим, что индекс суммирования («глухой», «слепой», немой) может быть обозначен любой буквой:  $i, j, k, \dots$ , т. е. разложение вектора  $\bar{x}$  можно записать также в виде

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^3 x^j \bar{e}_j = \sum_{k=1}^3 x^k \bar{e}_k = \dots$$

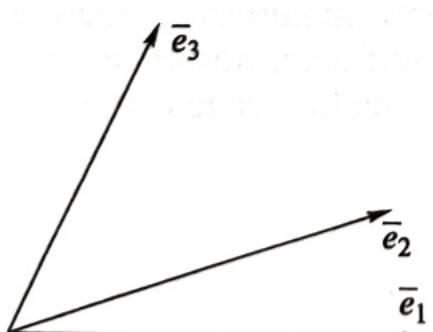


Рис. 1

Будем следовать общепринятым и удобным в тензорном исчислении и его приложениях «соглашению Эйнштейна» о суммировании. Оно состоит в том, что если индекс суммирования повторяется дважды (сверху и снизу), то знак суммирования  $\sum$  опускается. Индекс сумми-

рования при этом меняется от 1 до 3 (или до размерности  $n$  пространства в случае многомерных пространств, на плоскости от 1 до 2). Тогда разложение вектора  $\bar{x}$  по базису записывается в виде

$$\bar{x} = x^i \bar{e}_i = x^j \bar{e}_j = x^k \bar{e}_k = \dots$$

В курсе линейной алгебры подробно рассматривается переход от базиса  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  к новому базису  $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ . Напомним основные факты, относящиеся к этому вопросу, при этом будем пользоваться обозначениями, несколько отличающимися от обозначений во многих курсах линейной алгебры, но более удобными для тензорной алгебры.

Разложим векторы нового базиса  $\bar{e}'_k$  по старому базису:

$$\begin{cases} \bar{e}'_1 = a_1^1 \bar{e}_1 + a_1^2 \bar{e}_2 + a_1^3 \bar{e}_3, \\ \bar{e}'_2 = a_2^1 \bar{e}_1 + a_2^2 \bar{e}_2 + a_2^3 \bar{e}_3, \\ \bar{e}'_3 = a_3^1 \bar{e}_1 + a_3^2 \bar{e}_2 + a_3^3 \bar{e}_3 \end{cases}$$

или

$$\bar{e}'_j = \sum_{i=1}^3 a_j^i \bar{e}_i = a_j^i \bar{e}_i, \quad j = 1, 2, 3.$$

Здесь использовано суммирование по повторяющемуся внизу и вверху индексу  $i$ .

Заметим, что уже в этих простейших равенствах выполнено важное правило тензорной алгебры, касающееся неподвижных индексов, которые не являются индексами суммирования, т. е. не повторяются сверху и снизу. Неподвижные индексы могут принимать значения от 1 до 3. Это правило позволяет контролировать корректность выписываемых формул. Если неподвижный индекс в левой части равенства находится сверху (снизу), то и в правой части равенства он должен быть сверху (соответственно, снизу). В данных формулах таким неподвижным индексом является нижний индекс  $j$ .

Матрица

$$A = (a_i^j)_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix}$$

называется матрицей перехода от старого базиса к новому. Отметим, что координаты новых базисных векторов в старом базисе традиционно для тензорной алгебры записаны в матрице перехода по строкам, а не по столбцам в отличие от некоторых курсов линейной алгебры. Для элемента матрицы  $a_i^j$  нижний индекс  $i$  равен номеру строки элемента, верхний индекс  $j$  — номеру столбца. Легко видеть, что разложение новых базисных векторов по старому базису можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \bar{e}'_1 \\ \bar{e}'_2 \\ \bar{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Матрица перехода является невырожденной, т. е. ее определитель отличен от нуля  $|A| \neq 0$ . Для матрицы  $A$  существует обратная матрица  $A^{-1} = B = (b_i^j)_{3 \times 3}$ . По определению обратной матрицы имеем

$$AB = BA = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

или в координатной форме по правилу «строка на столбец», умножая строку матрицы  $A$  на столбец матрицы  $B$ , получим

$$a_i^k b_k^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Величины  $\delta_i^j$  называются символами Кронекера; также обозначаются  $\delta_{ij}$ .

Из формулы (1.1) выражаем векторы старого базиса через новый:

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 \\ b_2^1 & b_2^2 & b_2^3 \\ b_3^1 & b_3^2 & b_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}'_1 \\ \bar{e}'_2 \\ \bar{e}'_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \bar{e}'_1 \\ \bar{e}'_2 \\ \bar{e}'_3 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

или

$$\bar{e}_j = b_j^i \bar{e}'_i, \quad j = 1, 2, 3.$$

Произвольный вектор  $\bar{x}$  может быть разложен как по старому, так и по новому базису:

$$\bar{x} = x^i \bar{e}_i = x'^i \bar{e}'_i.$$

Новые координаты вектора выражаются через старые с помощью элементов матрицы  $B$ , обратной матрице перехода,

$$\begin{pmatrix} x^1' \\ x^2' \\ x^3' \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

где  $B^T$  — транспонированная матрица.

В покомпонентной записи  $x^i' = b_j^i x^j$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Название «контравариантные» для координат вектора в основном базисе объясняется тем обстоятельством, что при переходе к новому базису они меняются с помощью элементов обратной матрицы перехода.

Старые координаты вектора выражаются через новые с помощью элементов самой матрицы перехода:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} x^1' \\ x^2' \\ x^3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1' \\ x^2' \\ x^3' \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

В покомпонентной записи  $x^i = a_j^i x^j$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Символически преобразования базиса и координат (соотношения (1.1)–(1.4)) с помощью матрицы перехода и обратной к ней можно записать следующим образом:

$$\bar{e}_j \xrightarrow{A} \bar{e}'_j, \quad x^i \xrightarrow{B^T} x'^i;$$

$$\bar{e}'_j \xrightarrow{B} \bar{e}_j, \quad x'^i \xrightarrow{A^T} x^i.$$

При двойном изменении базиса

$$\bar{e}_j \xrightarrow{A} \bar{e}'_j \xrightarrow{D} \bar{e}''_j$$

имеем

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1'' \\ \bar{e}_2'' \\ \bar{e}_3'' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \bar{e}_1' \\ \bar{e}_2' \\ \bar{e}_3' \end{pmatrix} = DA \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix},$$

т. е. матрица двойного перехода равна произведению матриц перехода  $DA$ ,

$$\bar{e}_j \rightarrow \bar{e}_j''.$$

В дальнейшем мы будем использовать операции векторной алгебры: скалярное произведение векторов  $\bar{x} \cdot \bar{y}$ , векторное произведение векторов  $\bar{x} \times \bar{y}$ , смешанное произведение трех векторов  $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$ .

## 2. Скалярное произведение векторов. Матрица Грама

В курсе аналитической геометрии определялось скалярное произведение векторов

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}| |\bar{y}| \cos(\widehat{\bar{x}, \bar{y}}),$$

где  $\widehat{\bar{x}, \bar{y}}$  — величина угла между векторами  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ . Скалярное произведение симметрично ( $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$ ), дистрибутивно относительно сложения векторов ( $\bar{x} \cdot (\bar{y} + \bar{z}) = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot \bar{z}$ ), также  $\alpha \bar{x} \cdot \bar{y} = \alpha(\bar{x} \cdot \bar{y})$ , где  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Квадрат длины вектора  $|\bar{x}|^2 = \bar{x} \cdot \bar{x}$ .

Для основного базиса  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  введем попарные скалярные произведения его векторов  $g_{ij} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j$ . Очевидно, что  $g_{ij} = g_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Матрицей Грама базиса  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  называется матрица попарных скалярных произведений  $g_{ij}$ , которую также можно представить как произведение строки базисных векторов на столбец базисных векторов:

$$G = (g_{ij})_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix} (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3). \quad (2.1)$$

Матрица Грама является симметричной, т. е.  $G = G^T$ .

Для векторов  $\bar{x} = x^i \bar{e}_i$ ,  $\bar{y} = y^j \bar{e}_j$  скалярное произведение можно записать так:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = (x^i \bar{e}_i) \cdot (y^j \bar{e}_j) = x^i y^j (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j) = g_{ij} x^i y^j.$$

В этой формуле предполагается суммирование по двум повторяющимся сверху и снизу индексам  $i, j$ . Таким образом, скалярное произведение векторов пространства, заданных координатами в произвольном базисе, выражается суммой девяти слагаемых.

В частности, для длины вектора имеем  $|\bar{x}|^2 = \bar{x} \cdot \bar{x} = g_{ii} x^i x^i$ .

Так как длина положительна для любого ненулевого вектора, выражение  $g_{ii} x^i x^i$  является положительно определенной квадратичной формой. Согласно критерию Сильвестра главные (диагональные) миноры матрицы  $G$  положительны, в том числе ее определитель  $|G| > 0$ . Можно показать, что  $|G| = (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3)^2$ , где  $\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3$  — смешанное произведение трех векторов.

Рассмотрим изменение матрицы Грама при переходе к новому базису. Пусть  $\bar{e}_j \xrightarrow{A} \bar{e}'_j$ ,  $G$  и  $G'$  — матрицы Грама старого и нового базиса, соответственно  $g_{ij} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j$ ,  $g'_{ij} = \bar{e}'_i \cdot \bar{e}'_j$ .

Тогда  $G$  — матрица квадратичной формы  $|\bar{x}|^2$  в базисе  $\bar{e}_j$ , т. е.  $|\bar{x}|^2 = g_{ij} x^i x^j$ ;  $G'$  — матрица квадратичной формы  $|\bar{x}|^2$  в базисе  $\bar{e}'_j$ , т. е.  $|\bar{x}|^2 = g'_{ij} x^i x^j$ . В курсе линейной алгебры показано, что матрица квадратичной формы при переходе к новому базису меняется следующим образом:

$$G' = A G A^T. \quad (2.2)$$

### 3. Взаимный базис. Ковариантные координаты

Пусть  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  — основной базис в пространстве. Произвольный вектор  $\bar{x}$  имеет контравариантные координаты  $x^i$ , т. е.  $\bar{x} = x^i \bar{e}_i$ .

**Определение 1.** Базис  $\bar{e}^{-1}, \bar{e}^{-2}, \bar{e}^{-3}$  называется взаимным к базису  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ , если скалярные произведения векторов основного и взаимного базиса связаны соотношениями

$$\bar{e}^j \cdot \bar{e}_i = \delta_i^j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

где  $\delta_i^j$  — символы Кронекера.

Таким образом, вектор взаимного базиса  $\bar{e}^{-j}$  ортогонален векторам основного базиса, имеющим номера, отличные от  $j$ , т. е. он ортогонален плоскости этих двух векторов основного базиса. Например, вектор  $\bar{e}^{-1}$  ортогонален плоскости векторов  $\bar{e}_2$  и  $\bar{e}_3$  и т. д.

**Пример 1.** Очевидно, что ортонормированный базис  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  взаимен самому себе. Рассмотрим базис  $\bar{e}_1 = 2\bar{i}, \bar{e}_2 = 3\bar{j}, \bar{e}_3 = 4\bar{k}$ .

Тогда взаимный базис  $\bar{e}^{-1} = \frac{1}{2}\bar{i} = \frac{1}{4}\bar{e}_1, \bar{e}^{-2} = \frac{1}{3}\bar{j} = \frac{1}{9}\bar{e}_2, \bar{e}^{-3} = \frac{1}{4}\bar{k} = \frac{1}{16}\bar{e}_3$ .

Матрица перехода от основного базиса к взаимному в этом случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}^{-1},$$

т. е. является обратной к матрице Грама основного базиса, что, как будет видно из последующих рассуждений, имеет место и в общем случае.

Матричная запись формулы (3.1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 \\ e \\ -2 \\ e \\ -3 \\ e \end{pmatrix} (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ \bar{e} \cdot \bar{e}_1 & \bar{e} \cdot \bar{e}_2 & \bar{e} \cdot \bar{e}_3 \\ -2 & -2 & -2 \\ \bar{e} \cdot \bar{e}_1 & \bar{e} \cdot \bar{e}_2 & \bar{e} \cdot \bar{e}_3 \\ -3 & -3 & -3 \\ \bar{e} \cdot \bar{e}_1 & \bar{e} \cdot \bar{e}_2 & \bar{e} \cdot \bar{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем векторы  $\bar{e}^{-1}, \bar{e}^{-2}, \bar{e}^{-3}$ . Так как вектор  $\bar{e}^{-1}$  ортогонален векторам  $\bar{e}_2$  и  $\bar{e}_3$ , то он параллелен векторному произведению  $\bar{e}_2 \times \bar{e}_3$ , т. е.  $\bar{e}^{-1} = \alpha \bar{e}_2 \times \bar{e}_3$ , где  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Подставим это выражение в равенство  $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}^{-1} = 1$  и, учитывая, что скалярное произведение вектора на векторное произведение есть смешанное произведение трех векторов, получим  $\alpha \bar{e}_1 \cdot (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3) = \alpha \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3 = 1$ . В силу того, что векторы базиса некомпланарны, их смешанное произведение не равно нулю и  $\alpha = (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3)^{-1}$ .

Аналогично находим векторы  $\bar{e}^{-2}$  и  $\bar{e}^{-3}$ . Получаем

$$\begin{cases} \bar{e}^{-1} = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3}, \\ \bar{e}^{-2} = \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3}, \\ \bar{e}^{-3} = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Покажем, что векторы  $\bar{e}^{-1}, \bar{e}^{-2}, \bar{e}^{-3}$  некомпланарны. Предположим, что они компланарны, тогда один из них является линейной комбинацией двух других, например:

$$\bar{e}^{-1} = \beta \bar{e}^{-2} + \gamma \bar{e}^{-3}, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Используя формулу (3.2), получаем  $\bar{e}_2 \times \bar{e}_3 = \beta \bar{e}_3 \times \bar{e}_1 + \gamma \bar{e}_1 \times \bar{e}_2$ .

Умножая скалярно на  $\bar{e}_1$ , получаем  $\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3 = \beta \bar{e}_1 \bar{e}_3 \bar{e}_1 + \gamma \bar{e}_1 \bar{e}_1 \bar{e}_2 = 0$ , что противоречит некомпланарности векторов основного базиса.

Таким образом, векторы  $\bar{e}^{-1}, \bar{e}^{-2}, \bar{e}^{-3}$  некомпланарны и образуют базис.

**Определение 2.** Координаты  $(x_1, x_2, x_3)$  вектора  $\bar{x}$  во взаимном базисе  $\bar{e}^{-1}, \bar{e}^{-2}, \bar{e}^{-3}$  называются ковариантными координатами вектора.

Ковариантные координаты обозначаются нижними индексами.

Разложение вектора по взаимному базису  $\bar{x} = x_1 \bar{e}^{-1} + x_2 \bar{e}^{-2} + x_3 \bar{e}^{-3}$  можно записать как и разложение по основному базису — без использования знака суммы:

$$\bar{x} = x_i \bar{e}^{-i}.$$

Скалярно умножая обе части разложения вектора по основному базису на вектор  $\bar{e}^{-1}$ , получаем

$$\bar{x} \cdot \bar{e}^{-1} = (x^1 \bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_2 + x^3 \bar{e}_3) \cdot \bar{e}^{-1} = x^1 \bar{e}_1 \cdot \bar{e}^{-1} = x^1.$$

Аналогично получаем равенства для  $x^2, x^3$ , тогда  $x^i = \bar{x} \cdot \bar{e}^{-i}$ ,  $i = 1, 2, 3$  и

$$\bar{x} = x^i \bar{e}_i = (\bar{x} \cdot \bar{e}^{-i}) \bar{e}_i.$$

Аналогично имеем  $x_i = \bar{x} \cdot \bar{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  и

$$\bar{x} = x_i \bar{e}^{-i} = (\bar{x} \cdot \bar{e}_i) \bar{e}^{-i}.$$

Таким образом, координаты вектора в основном (соответственно взаимном) базисе равны скалярным произведениям этого вектора на векторы взаимного (соответственно основного) базиса с теми же номерами. Эти соотношения для контравариантных и ковариантных координат

$$\begin{cases} x^i = \bar{x} \cdot \bar{e}^{-i}; \\ x_i = \bar{x} \cdot \bar{e}_i \end{cases} \quad (3.3)$$

иногда называют формулами Гиббса. Здесь, как и в целом в тензорной алгебре, положение неподвижного индекса (верхнее или

нижнее) должно быть одинаковым в обеих частях равенства. В данном случае это означает, что при скалярном умножении вектора  $\bar{x}$  на базисный вектор с верхним (нижним) индексом получаем координату вектора с тем же положением индекса (верхним или нижним соответственно).

Формулы Гиббса (3.3) позволяют выразить координаты вектора в основном (или взаимном) базисе через его ортогональные проекции на векторы взаимного (или основного) базиса:

$$x^i = \bar{x} \cdot \bar{e}^i = |\bar{x}| |\bar{e}^i| \cos(\widehat{\bar{x}, \bar{e}_i}) = |\bar{e}^i| \text{Пр}_{\bar{e}^i} \bar{x};$$

$$x_i = \bar{x} \cdot \bar{e}_i = |\bar{x}| |\bar{e}_i| \cos(\widehat{\bar{x}, \bar{e}_i}) = |\bar{e}_i| \text{Пр}_{\bar{e}_i} \bar{x}.$$

Проекции  $\text{Пр}_{\bar{e}^i} \bar{x}$  и  $\text{Пр}_{\bar{e}_i} \bar{x}$  называются физическими компонентами вектора  $\bar{x}$ . Они не зависят от длин базисных векторов, а только от их направлений (не меняются, в отличие от координат  $x^i$  и  $x_i$ , при изменении масштаба на координатной оси).

#### 4. Операции с векторами с использованием ковариантных координат

*Скалярное произведение.* Для двух произвольных векторов имеем разложения по основному и взаимному базисам:  $\bar{x} = x^i \bar{e}_i = x_i \bar{e}^i$ ,  $\bar{y} = y^i \bar{e}_i = y_i \bar{e}^i$ . Тогда, с учетом ортогональности векторов основного и взаимного базисов с разными номерами и с учетом условий  $\bar{e}_i \cdot \bar{e}^i = 1$ , получаем

$$\begin{aligned} \bar{x} \cdot \bar{y} &= (x^1 \bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_2 + x^3 \bar{e}_3) \cdot (y_1 \bar{e}^1 + y_2 \bar{e}^2 + y_3 \bar{e}^3) = \\ &= x^1 y_1 + x^2 y_2 + x^3 y_3 = x^i y_i. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y^1 + x_2 y^2 + x_3 y^3 = x_i y^i. \quad (4.1)$$

Таким образом, для скалярного произведения получены выражения, аналогичные выражению для скалярного произведения

в ортонормированном базисе, или сумме произведений соответствующих координат векторов. Для одного вектора координаты нужно брать контравариантные, для другого — ковариантные.

Соответственно, квадрат длины вектора равен сумме «квадратов координат», если под «квадратом координаты» понимать произведение контравариантной координаты на ковариантную:

$$|\bar{x}|^2 = \bar{x} \cdot \bar{x} = x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3 = x_i x^i.$$

*Векторное произведение.* В исходном базисе имеем для двух векторов  $\bar{x} = x^i \bar{e}_i$ ,  $\bar{y} = y^i \bar{e}_i$ . Получаем, используя свойства линейности векторного произведения и учитывая что  $\bar{e}_i \times \bar{e}_i = \bar{0}$ ,

$$\begin{aligned}\bar{x} \times \bar{y} &= (x^1 \bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_2 + x^3 \bar{e}_3) \times (y^1 \bar{e}_1 + y^2 \bar{e}_2 + y^3 \bar{e}_3) = \\ &= x^1 y^2 \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 + x^1 y^3 \bar{e}_1 \times \bar{e}_3 + x^2 y^1 \bar{e}_2 \times \bar{e}_1 + \\ &\quad + x^2 y^3 \bar{e}_2 \times \bar{e}_3 + x^3 y^1 \bar{e}_3 \times \bar{e}_1 + x^3 y^2 \bar{e}_3 \times \bar{e}_2.\end{aligned}$$

Подставляя соотношения из формулы (3.2) в виде

$$\bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \bar{e}^3 (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3), \quad \bar{e}_1 \times \bar{e}_3 = -\bar{e}^2 (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3), \quad \bar{e}_2 \times \bar{e}_3 = \bar{e}^3 (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3),$$

имеем

$$\begin{aligned}\bar{x} \times \bar{y} &= (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3) (x^1 y^2 \bar{e}^{-3} - x^1 y^3 \bar{e}^{-2} - x^2 y^1 \bar{e}^{-3} + x^2 y^3 \bar{e}^{-1} + x^3 y^1 \bar{e}^{-2} - x^3 y^2 \bar{e}^{-1}) = \\ &= (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3) \left( \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ y^2 & y^3 \end{vmatrix}_{\bar{e}}^{-1} - \begin{vmatrix} x^1 & x^3 \\ y^1 & y^3 \end{vmatrix}_{\bar{e}}^{-2} + \begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ y^1 & y^2 \end{vmatrix}_{\bar{e}}^{-3} \right).\end{aligned}$$

Окончательно

$$\bar{x} \times \bar{y} = (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3) \begin{vmatrix} \bar{e}^{-1} & \bar{e}^{-2} & \bar{e}^{-3} \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix}. \quad (4.2)$$

Таким образом, справедлива формула, аналогичная формуле для векторного произведения векторов в ортонормированном базисе, выражающая векторное произведение в виде определителя 3-го порядка. Координаты перемножаемых векторов берутся в основном базисе, а на выходе получается разложение векторного произведения по взаимному базису.

Аналогично выводится разложение по основному базису векторного произведения векторов, заданных координатами во взаимном базисе:

$$\bar{x} \times \bar{y} = (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3) \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

*Смешанное произведение.* По определению,  $\bar{x} \bar{y} \bar{z} = (\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \bar{z}$ . В основном базисе имеем разложения по основному базису векторов  $\bar{x} = x^i \bar{e}_i$ ,  $\bar{y} = y^i \bar{e}_i$ ,  $\bar{z} = z^i \bar{e}_i$ . Обозначим  $\bar{w} = \bar{x} \times \bar{y}$ . Согласно формуле (4.2), имеем ковариантные координаты вектора  $\bar{w}$ :

$$(w_1, w_2, w_3) = (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3) \left( \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ y^2 & y^3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x^1 & x^3 \\ y^1 & y^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ y^1 & y^2 \end{vmatrix} \right).$$

Пользуясь выражением (4.1) для скалярного произведения векторов, один из которых задан ковариантными, а другой — контравариантными координатами, получаем

$$\begin{aligned} \bar{x} \bar{y} \bar{z} &= \bar{w} \cdot \bar{z} = w_1 z^1 + w_2 z^2 + w_3 z^3 = \\ &= (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3) \left( \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ y^2 & y^3 \end{vmatrix} z^1 - \begin{vmatrix} x^1 & x^3 \\ y^1 & y^3 \end{vmatrix} z^2 + \begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ y^1 & y^2 \end{vmatrix} z^3 \right) = \\ &= (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3) \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Таким образом, смешанное произведение векторов в произвольном базисе выражается через определитель 3-го порядка, составленный из координат этих векторов в произвольном базисе (как и в случае ортонормированного базиса). В общем случае появляется нормирующий множитель  $\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3$ , зависящий только от базисных векторов и не зависящий от перемножаемых векторов  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ .

Аналогично формуле (4.3) выводится выражение для смешанного произведения через ковариантные координаты векторов:

$$xyz = (\bar{e}^{-1} \bar{e}^{-2} \bar{e}^{-3}) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

## 5. Матрица перехода от основного базиса к взаимному. Подъем и спуск индексов

Пусть  $C$  — матрица перехода от основного базиса  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  к взаимному базису  $\bar{e}^{-1}, \bar{e}^{-2}, \bar{e}^{-3}$ . Тогда

$$\begin{pmatrix} -1 \\ \bar{e} \\ -2 \\ \bar{e} \\ -3 \\ \bar{e} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Умножим справа на строку  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ \bar{e} \\ -2 \\ \bar{e} \\ -3 \\ \bar{e} \end{pmatrix} (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = C \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix} (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3).$$

Согласно формуле (3.1) и определению матрицы Грама, последнее равенство записывается как  $E = CG$ , т. е.  $C = G^{-1}$ . Матрицей перехода от основного базиса к взаимному является матрица, обратная матрице Грама основного базиса. Символически можно записать

$$\bar{e}_j \xrightarrow{G^{-1}} \bar{e}^j,$$

$$\bar{e}^j \xrightarrow{G} \bar{e}_j.$$

Пусть  $\tilde{G}$  — матрица Грама взаимного базиса  $\bar{e}^{-1}, \bar{e}^{-2}, \bar{e}^{-3}$ . Тогда обратная к ней матрица является матрицей перехода от взаимного

базиса к основному  $\bar{e}^j \rightarrow \bar{e}_j$ , т. е.  $G = \tilde{G}^{-1}$ ,  $G^{-1} = \tilde{G}$ . Итак, матрицы Грама базисов  $\bar{e}_j$  и  $\bar{e}^j$  обратны друг другу.

Обозначим элементы матрицы  $G^{-1}$  через  $g^{ij}$ , т. е.  $g^{ij} = \bar{e}^i \cdot \bar{e}^j$ ,

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \bar{e}^1 \\ \bar{e}^2 \\ \bar{e}^3 \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\bar{e}^j = g^{jk} \bar{e}_k. \quad (5.1)$$

Из формулы (5.1) получаем

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \bar{e}^1 \\ \bar{e}^2 \\ \bar{e}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}^1 \\ \bar{e}^2 \\ \bar{e}^3 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\bar{e}_j = g_{jk} \bar{e}^k. \quad (5.2)$$

Координаты  $x_i$  выражаются через  $x^i$  с помощью обратной транспонированной матрицы перехода от основного базиса к взаимному  $((G^{-1})^{-1})^T = G^T$ . Матрицы  $G$  и  $G^{-1}$  симметричны, поэтому знак транспонирования при них можно опускать, но оставим соответствующие формулы со знаком транспонирования как напоминание о том, что преобразование координат осуществляется

с помощью транспонированных матриц. Тогда переход от контравариантных координат к ковариантным имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = G^T \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix},$$

или в координатной форме

$$x_i = g_{ki} x^k. \quad (5.3)$$

Обратный переход имеет вид

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = (G^{-1})^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{21} & g^{31} \\ g^{12} & g^{22} & g^{32} \\ g^{13} & g^{23} & g^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

или в координатной форме

$$x^i = g^{ki} x_k. \quad (5.4)$$

Полученные выше соотношения принято называть спуском и подъемом индексов у векторов (формулы (5.1), (5.2)) и координат (формулы (5.3), (5.4)). Спуск осуществляется с помощью матрицы Грама с нижними индексами  $g_{ij}$ , подъем — с помощью матрицы с верхними индексами  $g^{ij}$ . Чтобы вместо верхнего (соответственно нижнего) индекса  $k$  координаты вектора получить нижний (соответственно верхний) индекс  $i$ , нужно умножить координату с верхним (соответственно нижним) индексом  $k$  на элемент матрицы Грама с этими индексами  $k$  и  $i$ , т. е. на  $g_{ki}$  (соответственно  $g^{ki}$ ). Порядок индексов  $i$  и  $k$  несуществен в силу симметричности матриц. При этом по повторяющемуся индексу  $k$  проводится суммирование от 1 до 3.

Операции подъема и спуска индексов также иногда называют жонглированием индексами.

В дальнейшем спуск и подъем индексов будет распространен на объекты с двумя, тремя и с произвольным числом индексов.

## 6. Изменение взаимного базиса и ковариантных координат при изменении основного базиса

Пусть имеются исходный (старый) основной базис  $\bar{e}_j$  и новый основной базис  $\bar{e}'_j$ ,  $A$  — матрица перехода от старого основного базиса к новому. Найдем матрицу перехода между соответствующими взаимными базисами — старым, т. е. взаимным к старому основному базису  $\bar{e}^j$ , и новым, т. е. взаимным к новому основному базису,  $\bar{e}'^{j'}$ . Переход от основного базиса к взаимному осуществляется с помощью обратной матрицы Грама  $G^{-1}$  для старых базисов и обратной матрицы Грама  $(G')^{-1}$  для новых базисов, а обратные переходы — с помощью прямых матриц Грама  $G$  и  $G'$ . Тогда переходы между данными четырьмя базисами описываются следующей диаграммой, в которой через  $X$  обозначена искомая матрица перехода между взаимными базисами (рис. 2).

Согласно формуле (2.2), матрица Грама нового базиса имеет вид

$$G' = AGA^T,$$

тогда

$$(G')^{-1} = (AGA^T)^{-1} = (A^{-1})^T G^{-1} A^{-1}.$$

Переход  $\bar{e}^j \rightarrow \bar{e}'^{j'}$  является последовательной композицией перехода с помощью матриц соответственно  $G$ ,  $A$ ,  $(G')^{-1}$ . Тогда матрица этого перехода  $X$  равна произведению трех матриц переходов в противоположном порядке:

$$X = (G')^{-1} AG = (A^{-1})^T G^{-1} A^{-1} AG = (A^{-1})^T G^{-1} G = (A^{-1})^T = B^T,$$

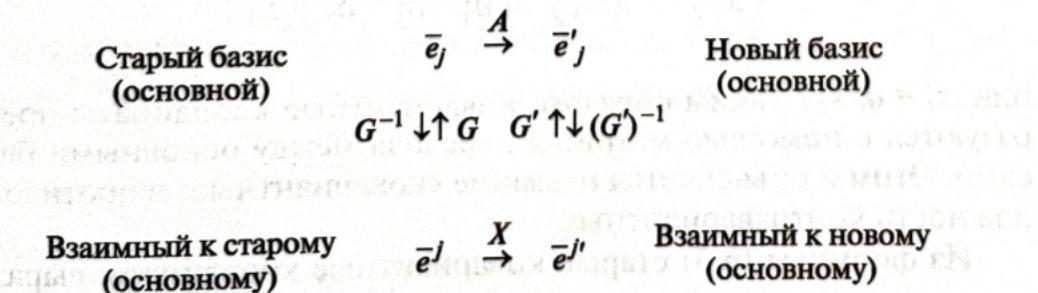


Рис. 2

т. е.  $\overset{-j}{e} \xrightarrow{B^T} \overset{-j'}{e}$ . Таким образом, матрицей перехода между взаимными базисами является транспонированная обратная матрица перехода между основными базисами. В матричной форме этот переход имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1' \\ e^{-1} \\ -2' \\ e^{-2} \\ -3' \\ e^{-3} \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} -1' \\ e^{-1} \\ -2' \\ e^{-2} \\ -3' \\ e^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1' \\ e^{-1} \\ -2' \\ e^{-2} \\ -3' \\ e^{-3} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

или  $\overset{-j'}{e} = b_k^j e^{-k}$ .

Переход от нового взаимного базиса к старому взаимному записывается с помощью матрицы  $X^{-1} = A^T$ :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ e^{-1} \\ -2 \\ e^{-2} \\ -3 \\ e^{-3} \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} -1' \\ e^{-1} \\ -2' \\ e^{-2} \\ -3' \\ e^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1' \\ e^{-1} \\ -2' \\ e^{-2} \\ -3' \\ e^{-3} \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

или  $\overset{-j}{e} = a_k^j e^{-k}$ .

Новые ковариантные координаты  $x'_i$  выражаются через старые  $x_i$  с помощью матрицы  $(X^{-1})^T = (A^T)^T = A$ ,

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

или  $x'_i = a_i^k x_k$ . Таким образом, ковариантные координаты преобразуются с помощью матрицы перехода между основными базисами. Этим и объясняется название «ковариантные» в противоположность контравариантным.

Из формулы (6.3) старые ковариантные координаты выражаются через новые с помощью обратной матрицы  $A^{-1} = B$ ,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 \\ b_2^1 & b_2^2 & b_2^3 \\ b_3^1 & b_3^2 & b_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

или  $x_i = b_i^k x'_k$ . Кратко вышеизложенные преобразования (6.1)–(6.4) можно записать следующим образом:

$$\bar{e}_j \xrightarrow{A} \bar{e}'_j, \quad x^i \xrightarrow{B^T} x'^i;$$

$$\bar{e}'_j \xrightarrow{B} \bar{e}_j, \quad x'^i \xrightarrow{A^T} x^i;$$

$$\bar{e}^j \xrightarrow{B^T} \bar{e}^{j'}, \quad x_i \xrightarrow{A} x'_i;$$

$$\bar{e}^{j'} \xrightarrow{A^T} \bar{e}^j, \quad x'_i \xrightarrow{B} x_i.$$

## 7. Линейные операторы. Виды матрицы линейного оператора

Пусть  $T$  — линейный оператор в трехмерном пространстве, т. е. отображение, ставящее произвольному вектору  $\bar{x}$  его образ — вектор  $T\bar{x}$ :  $\bar{x} \rightarrow T\bar{x}$ , для которого

$$T(\bar{x} + \bar{y}) = T\bar{x} + T\bar{y}, \quad T(\alpha \bar{x}) = \alpha T\bar{x}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Пусть  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  — основной базис. Матрицей линейного оператора  $T$  в базисе  $\bar{e}_j$  в курсе линейной алгебры называется матрица, по столбцам которой записаны координаты в базисе  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  образов  $T\bar{e}_1, T\bar{e}_2, T\bar{e}_3$  базисных векторов  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ :

$$\begin{pmatrix} T^1_1 & T^1_2 & T^1_3 \\ T^2_1 & T^2_2 & T^2_3 \\ T^3_1 & T^3_2 & T^3_3 \end{pmatrix} = (T^i_j).$$

Матрицу линейного оператора с элементами  $T_j^i$  будем обозначать в скобках  $(T_j^i)$  и т. д. Обратим внимание на то, что в отличие от многих учебников по линейной алгебре элементы матрицы линейного оператора обозначаются верхним и нижним индексами. Причем первый (левый) индекс пишется вверху, а второй (правый) — внизу. Это можно объяснить следующим образом. Первый индекс является номером строки элемента матрицы, т. е. номером контравариантной координаты образа базисного вектора. Поэтому этот индекс пишется вверху, как и у контравариантных координат. Второй индекс — номер столбца, т. е. номер базисного вектора  $\bar{e}_j$ , координаты образа которого образуют данный столбец. Этот индекс, соответственно, нижний, как и индексы векторов основного базиса.

Рассмотрим образ  $\bar{w} = T\bar{x}$  произвольного вектора  $\bar{x}$ . Из линейной алгебры известно, что его (контравариантные) координаты  $(w^1, w^2, w^3)$  в базисе  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  могут быть выражены через контравариантные координаты вектора  $\bar{x}$  с помощью матрицы  $T$ :

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = (T_j^i) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^1 & T_2^1 & T_3^1 \\ T_1^2 & T_2^2 & T_3^2 \\ T_1^3 & T_2^3 & T_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

или  $w^i = T_k^i x^k$ .

Найдем матрицу линейного оператора  $T$  во взаимном базисе. Для этого нужно по столбцам записать координаты во взаимном базисе  $\bar{e}^{-1}, \bar{e}^{-2}, \bar{e}^{-3}$  образов векторов взаимного базиса  $T\bar{e}^{-1}, T\bar{e}^{-2}, T\bar{e}^{-3}$ . Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} T_1^1 & T_2^1 & T_3^1 \\ T_1^2 & T_2^2 & T_3^2 \\ T_1^3 & T_2^3 & T_3^3 \end{pmatrix} = (T_i^j).$$

Первый (левый) индекс записывается в данном случае снизу, поскольку он указывает номер ковариантной координаты образа базисного вектора. Второй (правый) индекс записывается сверху, он указывает номер базисного вектора  $\bar{e}^j$ , координаты образа которого образуют данный столбец.

Соответственно с помощью матрицы  $(T_i^j)$  можно выразить ковариантные координаты образа  $\bar{w} = T\bar{x}$  вектора  $\bar{x}$  через ковариантные координаты самого вектора  $\bar{x}$ :

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = (T_i^j) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^1 & T_1^2 & T_1^3 \\ T_2^1 & T_2^2 & T_2^3 \\ T_3^1 & T_3^2 & T_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

или  $w_i = T_i^k x_k$ .

Заметим, что возможен также следующий подход к понятию матрицы линейного оператора. Можно взять образы векторов одного базиса, а координаты этих образов брать в другом базисе и записать по столбцам матрицы. Рассмотрев образы векторов основного (или, соответственно, взаимного) базиса и записав их координаты во взаимном (соответственно основном) базисе, получим еще два вида матрицы линейного оператора. Расположение индексов и в этом случае соответствует расположению индексов у координат образов (первый индекс) и у базисных векторов (второй индекс).

Итак, рассмотрим координаты векторов  $T\bar{e}_1, T\bar{e}_2, T\bar{e}_3$  во взаимном базисе и запишем по столбцам матрицы:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = (T_{ij}).$$

Оба индекса внизу, поскольку и ковариантные координаты, и векторы основного базиса имеют нижние индексы.

Соответственно ковариантные координаты образа можно с помощью матрицы  $(T_{ij})$  выразить через контравариантные координаты прообраза:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = (T_{ij}) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

или  $w_i = T_{ik} x^k$ .

Наконец, возьмем координаты образов векторов взаимного базиса  $T\bar{e}^1, T\bar{e}^2, T\bar{e}^3$  в основном базисе  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ :

$$\begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} = (T^{ij}).$$

Оба индекса верхние, поскольку и контравариантные координаты образов, и векторы взаимного базиса имеют верхние индексы.

Соответственно находим контравариантные координаты образа через ковариантные координаты прообраза:

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = (T^{ij}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

или  $w^i = T^{ik} x_k$ .

**Пример 2.** Пусть  $T = I$  — тождественный оператор, т. е.  $T\bar{x} = \bar{x}$ , тогда его матрица является единичной в любом базисе, основном или взаимном,  $(T^i{}_j) = (T_i{}^j) = E$ . В матрице  $(T_{ij})$  по столбцам должны быть записаны координаты векторов  $T\bar{e}_j = \bar{e}_j$  во взаимном базисе, т. е. координаты векторов основного базиса во взаимном. Но тогда  $(T_{ij})$  — матрица перехода от взаимного базиса к основному, т. е. матрица Грама основного базиса  $(T_{ij}) = G$ ,  $T_{ij} = g_{ij}$ . Аналогично, матрица  $(T^{ij})$  образована координатами в основном базисе векторов взаимного базиса, т. е.  $(T^{ij}) = G^{-1}$ ,  $T^{ij} = g^{ij}$ .

### Задания для самоконтроля к пп. 1–7

1. Дать определение взаимного базиса и ковариантных координат.
2. Записать правила изменения контравариантных и ковариантных координат основного и взаимного базисов при переходе к новому основному базису.
3. Используя взаимный базис, записать операции векторной алгебры.

4. Записать правила спуска и подъема индексов для координат и базисных векторов.

5. Дать определения четырех видов матрицы линейного оператора.

## 8. Диадное умножение векторов. Разложение линейного оператора по базисным диадам

Для векторов  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  имеем разложения по основному и взаимному базисам  $\bar{x} = x^i \bar{e}_i = x_i \bar{e}^i$ ,  $\bar{y} = y^j \bar{e}_j = y_j \bar{e}^j$ .

**Определение 3.** Диадой (диадным произведением) векторов  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  называется линейный оператор  $D = \bar{x} \otimes \bar{y}$ , который на любой вектор  $\bar{z}$  действует следующим образом:

$$D\bar{z} = (\bar{x} \otimes \bar{y})\bar{z} = \bar{x}(\bar{y} \cdot \bar{z}),$$

где  $(\bar{y} \cdot \bar{z})$  — скалярное произведение.

Найдем матрицу  $(D^i{}_j)$  линейного оператора  $D$  в основном базисе  $\bar{e}_j$ . Для этого найдем образы векторов  $\bar{e}_j$

$$D\bar{e}_1 = (\bar{x} \otimes \bar{y})\bar{e}_1 = \bar{x}(\bar{y} \cdot \bar{e}_1) = \bar{x} \cdot y_1 = (x^1 y_1, x^2 y_1, x^3 y_1).$$

Здесь указаны координаты образа вектора  $\bar{e}_1$  в основном базисе (использована формула Гиббса  $\bar{y} \cdot \bar{e}_1 = y_1$ ). Аналогично:

$$D\bar{e}_2 = (\bar{x} \otimes \bar{y})\bar{e}_2 = \bar{x}(\bar{y} \cdot \bar{e}_2) = \bar{x} \cdot y_2 = (x^1 y_2, x^2 y_2, x^3 y_2),$$

$$D\bar{e}_3 = (\bar{x} \otimes \bar{y})\bar{e}_3 = \bar{x}(\bar{y} \cdot \bar{e}_3) = \bar{x} \cdot y_3 = (x^1 y_3, x^2 y_3, x^3 y_3).$$

Таким образом получаем матрицу  $(D^i{}_j)$ , которую можно представить в виде произведения столбца на строку:

$$(D^i{}_j) = \begin{pmatrix} x^1 y_1 & x^1 y_2 & x^1 y_3 \\ x^2 y_1 & x^2 y_2 & x^2 y_3 \\ x^3 y_1 & x^3 y_2 & x^3 y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} (y_1, y_2, y_3)$$

или  $D^i_j = x^i y_j$ .

Найдем матрицу  $(D_i^j)$  оператора  $D$  во взаимном базисе  $\bar{e}^j$ .

Образы векторов  $\bar{e}^j$  есть

$$D\bar{e}^1 = (\bar{x} \otimes \bar{y})\bar{e}^1 = \bar{x}(\bar{y} \cdot \bar{e}^1) = \bar{x} \cdot y^1 = (x_1 y^1, x_2 y^1, x_3 y^1)$$

(указанны координаты во взаимном базисе),

$$D\bar{e}^2 = (\bar{x} \otimes \bar{y})\bar{e}^2 = \bar{x}(\bar{y} \cdot \bar{e}^2) = \bar{x} \cdot y^2 = (x_1 y^2, x_2 y^2, x_3 y^2),$$

$$D\bar{e}^3 = (\bar{x} \otimes \bar{y})\bar{e}^3 = \bar{x}(\bar{y} \cdot \bar{e}^3) = \bar{x} \cdot y^3 = (x_1 y^3, x_2 y^3, x_3 y^3).$$

Итак,

$$(D_i^j) = \begin{pmatrix} x_1 y^1 & x_1 y^2 & x_1 y^3 \\ x_2 y^1 & x_2 y^2 & x_2 y^3 \\ x_3 y^1 & x_3 y^2 & x_3 y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} (y^1, y^2, y^3)$$

или  $D_i^j = x_i y^j$ .

Аналогично для оператора  $D$  найдем матрицу  $(D_{ij})$ , по столбцам которой записаны координаты векторов  $D\bar{e}_j$  в базисе  $\bar{e}^i$ . Находим

$$D\bar{e}_1 = \bar{x} \cdot y_1 = (x_1 y_1, x_2 y_1, x_3 y_1),$$

$$D\bar{e}_2 = \bar{x} \cdot y_2 = (x_1 y_2, x_2 y_2, x_3 y_2),$$

$$D\bar{e}_3 = \bar{x} \cdot y_3 = (x_1 y_3, x_2 y_3, x_3 y_3).$$

Тогда

$$(D_{ij}) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} (y_1, y_2, y_3)$$

или  $D_{ij} = x_i y_j$ .

Наконец, элементы матрицы  $(D^i_j)$  являются координатами векторов  $D\bar{e}^j$  в базисе  $\bar{e}_i$

$$De^{-1} = \bar{x} \cdot y^1 = (x^1 y^1, x^2 y^1, x^3 y^1),$$

$$De^{-2} = \bar{x} \cdot y^2 = (x^1 y^2, x^2 y^2, x^3 y^2),$$

$$De^{-3} = \bar{x} \cdot y^3 = (x^1 y^3, x^2 y^3, x^3 y^3),$$

т. е.

$$(D^{\bar{y}}) = \begin{pmatrix} x^1 y^1 & x^1 y^2 & x^1 y^3 \\ x^2 y^1 & x^2 y^2 & x^2 y^3 \\ x^3 y^1 & x^3 y^2 & x^3 y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} (y^1, y^2, y^3)$$

$$\text{или } D^{\bar{y}} = x^i y^j.$$

Таким образом получаем равенства для четырех видов координат диады  $D = \bar{x} \otimes \bar{y}$

$$D^i_j = x^i y_j, \quad D_i^j = x_i y^j, \quad D_{ij} = x_i y_j, \quad D^{\bar{y}} = x^i y^j.$$

Преобразуем матрицы оператора диады  $D$  при переходе к новому базису  $\bar{e}_j \xrightarrow{A} e'_j$ . Согласно формулам (1.3) и (6.3), имеем представления контравариантных и ковариантных координат в новом базисе соответственно:

$$x^{i'} = b_k^i x^k, \quad y^{j'} = b_m^j y^m;$$

$$x'_i = a_i^k x_k, \quad y'_j = a_j^m y_m.$$

Тогда

$$D^i_j' = x^{i'} y'_j = b_k^i x^k a_j^m y_m = x^k y_m b_k^i a_j^m = D_m^k b_k^i a_j^m.$$

Здесь использовано равенство  $D_m^k = x^k y_m$  и подразумевается сумма  $\sum_{k,m=1}^3$ . В матричном виде получаем известное из курсов линейной алгебры правило преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису  $(D^i_j)' = B^T (D_m^k) A^T$ .

Аналогично получаем формулы

$$D_i^{j'} = D_k^m a_i^k b_m^j, \quad D_{ij}' = D_{km} a_i^k a_j^m, \quad D^{\bar{y}'} = D^{km} b_k^i b_m^j$$

или то же в матричной форме:

$$(D_i^{j'}) = A(D_k^m)B, \quad (D'_{ij}) = A(D_{km})A, \quad (D^{ij'}) = B^T(D^{km})B.$$

Как видим, верхние (нижние) индексы диады преобразуются с помощью обратной (прямой) матрицы перехода, т. е. так же, как верхние (нижние) индексы у координат векторов или у самих базисных векторов.

*Подъем и спуск индексов диады.* Как и для координат векторов, опуская и поднимая индексы у диады, мы можем переходить от одного вида матрицы диады (координат диады) к другому. Так как для координат векторов

$$x^i = x_k g^{ki}, \quad x_i = x^k g_{ki},$$

то

$$D_{ij} = x_i y_j = x^k g_{ki} y_j = D^k{}_j g_{ki},$$

$$D_{ij} = D_i{}^k g_{kj} = D^{mk} g_{kj} g_{mi}$$

(здесь подразумевается сумма  $\sum_{k,m=1}^3$ ),

$$D^{ij} = D_k{}^j g^{ki}, \quad D_i{}^j = D_{ik} g^{jk}, \dots, \text{ и т. д.}$$

Принцип тот же, что и для координат векторов — подъем (спуск) проводится с помощью матрицы Грама с верхними (нижними) индексами. Чтобы вместо индекса  $p$  получить индекс  $q$ , нужно умножить преобразуемый элемент диады на элемент матрицы Грама с индексами  $p$  и  $q$ .

*Базисные диады.* Для линейного оператора  $D = \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1$  его матрица выглядит следующим образом:

$$(D^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для  $D = \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2$  имеем

$$(D^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и т. д.,}$$

для  $D = \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3$  имеем

$$(D^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для любого линейного оператора  $T$  и его матрицы с верхними индексами

$$\begin{aligned} (T^{ij}) &= \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} = \\ &= T^{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + T^{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + T^{33} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

или, используя двойное суммирование по  $i$  и  $j$ , запишем  $T = T^{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ .

Подобным образом получаем разложение линейного оператора  $T$  по другим базисным диадам:

$$T = T_{ij} \bar{e}^i \otimes \bar{e}^j, \quad T = T^i_j \bar{e}_i \otimes \bar{e}^j, \quad T = T^j_i \bar{e}^i \otimes \bar{e}_j.$$

Из этого следует, что любой тензор 2-го ранга можно представить в виде суммы трех диад. Например,

$$T = \bar{p}_j \otimes \bar{e}^j, \quad \bar{p}_j = T^i_j \bar{e}_i. \quad (8.1)$$

**Пример 3.** Изложим важный пример разложения по базисным диадам. Разложим тождественный оператор  $T = I$  по диадам вида  $\bar{e}^i \otimes \bar{e}_j$ . Так как матрица оператора в основном базисе — единичная, состоящая из элементов  $\delta_j^i$ , то имеем

$$T = I = \bar{e}^i \otimes \bar{e}_i. \quad (8.2)$$

Аналогично, используя единичность матрицы тождественного оператора во взаимном базисе, получим

$$T = I = \bar{e}_i \otimes \bar{e}^i. \quad (8.3)$$

Равенства (8.2) и (8.3) для тождественного оператора получены несколько формальным способом — разложением единичной матрицы по матрицам базисных диад. Но эти равенства имеют и простой геометрический вывод. Разложив вектор  $\bar{x}$  по основному базису, получим его представление через применение линейной комбинации базисных диад к нему самому:

$$\bar{x} = x^i \bar{e}_i = (\bar{x} \cdot \bar{e}^i) \bar{e}_i = (\bar{e}_i \otimes \bar{e}^i) \bar{x}.$$

Поскольку вектор  $\bar{x}$  может быть любым, то получаем представление тождественного оператора (8.3). Аналогично, разлагая вектор  $\bar{x}$  по взаимному базису, можно получить выражение (8.2).

В равенстве (8.3) заменим  $\bar{e}^i$  согласно формуле (3.2):

$$T = I = (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3)^{-1} (\bar{e}_1 \otimes (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3) + \bar{e}_2 \otimes (\bar{e}_3 \times \bar{e}_1) + \bar{e}_3 \otimes (\bar{e}_1 \times \bar{e}_2)). \quad (8.4)$$

Применим тождественный оператор к произвольному вектору  $\bar{x}$ , используя равенства вида  $(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)\bar{x} = \bar{e}_2 \bar{e}_3 \bar{x}$ :

$$\bar{x} = I \bar{x} = (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3)^{-1} (\bar{e}_1 (\bar{e}_2 \bar{e}_3 \bar{x}) + \bar{e}_2 (\bar{e}_3 \bar{e}_1 \bar{x}) + \bar{e}_3 (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{x})).$$

Полученное выражение — не что иное, как правило Крамера решения системы трех линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей. Коэффициенты разложения произвольного вектора  $\bar{x}$  по произвольному базису  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  выражаются через определитель системы, равный смешанному произведению  $\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3$  (если координаты векторов заданы в некотором правом ортонормированном базисе), и присоединенные определители, получаемые из основного заменой поочередно одного столбца на столбец правой части соответственно  $\bar{e}_2 \bar{e}_3 \bar{x} = \bar{x} \bar{e}_2 \bar{e}_3$ ,  $\bar{e}_3 \bar{e}_1 \bar{x} = \bar{e}_1 \bar{e}_3 \bar{x}$  и  $\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{x}$ .

Получим из формулы (8.4) некоторые следствия, которые будут использованы в дальнейшем. Запишем равенство (8.4) в виде

$$(\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3)I = \bar{e}_1 \otimes (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3) + \bar{e}_2 \otimes (\bar{e}_3 \times \bar{e}_1) + \bar{e}_3 \otimes (\bar{e}_1 \times \bar{e}_2).$$

Оно справедливо для любого вектора  $\bar{x}$  и любых линейно независимых векторов  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ . Поскольку любую тройку компланарных векторов  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  можно представить как предел последовательности некомпланарных векторов, то по непрерывности получим, что для любых векторов  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  справедливо равенство

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c})I = \bar{a} \otimes (\bar{b} \times \bar{c}) + \bar{b} \otimes (\bar{c} \times \bar{a}) + \bar{c} \otimes (\bar{a} \times \bar{b}). \quad (8.5)$$

## 9. Тензоры 2-го ранга как линейные операторы

**Определение 4.** Тензором 2-го ранга называется линейный оператор  $T$ .

**Определение 5.** Тензором 2-го ранга называется линейная комбинация диад.

Пусть  $T$  — любой линейный оператор, тогда для него имеем представления

$$T = T^{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j, \quad T = T_{ij} \bar{e}^i \otimes \bar{e}^j, \quad T = T^i{}_j \bar{e}_i \otimes \bar{e}^j, \quad T = T_j{}^i \bar{e}^i \otimes \bar{e}_j,$$

откуда следует эквивалентность двух определений тензоров 2-го ранга.

*Преобразование координат тензоров 2-го ранга.* При переходе к новому основному базису с помощью матрицы перехода  $A$  (обратная матрица  $B$ ) элементы матриц (компоненты или координаты) тензоров 2-го ранга как линейных операторов преобразуются так же, как компоненты диад:

$T^{ij'} = T^{km} b_k^i b_m^{j'}$  — контравариантные координаты (также принято говорить, что они образуют тензор типа  $(0,2)$ );

$T'_{ij} = T_{km} a_i^k a_j^m$  — ковариантные координаты (образуют тензор типа  $(2,0)$ );

$T^{i'}{}_j = T^k{}_m b_k^i a_j^m$  — смешанные координаты (образуют тензор типа  $(1,1)$ );

$T_i^{j'} = T_k^m a_i^k b_m^{j'}$  — смешанные координаты (также образуют тензор типа  $(1,1)$ , отличающийся от предыдущего тем, что первый

индекс — ковариантный, второй — контравариантный; у предыдущего — наоборот).

В матричном виде эти соотношения также имеют тот же вид, что и для диад:

$$(T^i{}_j) = B^T (T^i{}_j) A^T, \quad (T_i{}^j) = A (T_k{}^m) B,$$

$$(T'_{ij}) = A (T_{km}) A^T, \quad (T^{ij'}) = B^T (T^{km}) B.$$

*Спуск и подъем индексов тензоров 2-го ранга.* Переход от одного вида компонент тензора к другому проводится с помощью матриц Грама по тому же правилу, что и для диад:

$$T_{ij} = T^k{}_j g_{ki}, \quad T^{ij} = T^i{}_k g^{kj}, \quad T_i{}^j = T^{kj} g_{ki} \quad (9.1)$$

и т. д.

**Пример 4.** Тензором 2-го ранга является в частности тождественный линейный оператор  $T = I$ , т. е.  $I\bar{x} = \bar{x}$  для любого  $\bar{x}$ . Его матрица в основном и во взаимном базисе — единичная матрица

$$T^i{}_j = T_i{}^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

(тензоры типа (1,1)), т. е.  $(T^i{}_j) = (T_i{}^j) = E$ .

Ковариантные координаты  $T_{ij} = g_{ij}$  (ковариантный метрический тензор), тензор типа (2,0). Контравариантные координаты  $T^{ij} = g^{ij}$  (контравариантный метрический тензор), тензор типа (0,2).

Скалярное произведение  $\bar{x} \cdot \bar{y} = g_{ij} x^i y^j$  — в контравариантных координатах векторов,  $\bar{x} \cdot \bar{y} = g^{ij} x_i y_j$  — в ковариантных координатах векторов (подразумевается сумма  $\sum_{i,j=1}^3$ ). Также  $\bar{x} \cdot \bar{y} = x_i y^i = x^i y_i$ .

Таким образом, координаты тензора  $T = I$  задаются матрицами Грама,  $g_{ij}$  — тензор (2,0),  $g^{ij}$  — тензор (0,2),  $\delta_i^j$  — тензор (1,1).

**Пример 5.** Квадратичная форма  $\alpha_{ij} x^i x^j$  ( $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ ), где  $(\alpha_{ij})$  — матрица квадратичной формы в базисе  $\bar{e}_j$ . В новом базисе  $\bar{e}'_j$  (координаты  $x^{i'}$ )

$$\alpha_{ij} x^i x^j = \alpha_{ij} a_k^i x^{k'} a_m^j x^{m'} = \alpha_{ij} a_k^i a_m^j x^{k'} x^{m'} = \alpha'_{km} x^{k'} x^{m'}.$$

Таким образом, в новом базисе координаты матрицы квадратичной формы будут  $\alpha'_{km} = \alpha_{ij} a_k^i a_m^j$ , т. е. матрица  $(\alpha_{ij})$  — тензор типа  $(2, 0)$ .

Итак, тензоры 2-го ранга — это линейные операторы. Векторы естественно рассматривать как тензоры 1-го ранга, скалярные величины — как тензоры 0-го ранга.

## 10. Операции с тензорами 2-го ранга

**Определение 6.** Сумма тензоров 2-го ранга и их произведение на число определяются как соответствующие операции для линейных операторов:

$$(T_1 + T_2)\bar{x} = T_1\bar{x} + T_2\bar{x}, \quad (\alpha T)(\bar{x}) = \alpha(T\bar{x}), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Сумме тензоров соответствует сумма их матриц, произведению тензора на число — произведение матрицы на число.

**Определение 7.** Композиция (умножение) тензоров 2-го ранга определяется как композиция линейных операторов:

$$(T_1 T_2)\bar{x} = T_1(T_2\bar{x}).$$

В базисе  $\bar{e}_j$  либо  $\bar{e}^j$  для матриц соответственно  $(T^i{}_j)$  либо  $(T_j{}^i)$  матрица оператора композиции равна произведению матриц двух тензоров. Для матриц ковариантных либо контравариантных координат это уже неверно, поскольку они не являются матрицами оператора в одном базисе.

Рассмотрим композицию двух диад  $D_1 = \bar{x} \otimes \bar{y}$  и  $D_2 = \bar{v} \otimes \bar{w}$ . На произвольный вектор  $\bar{z}$  она действует следующим образом:

$$\begin{aligned} (D_1 D_2)\bar{z} &= D_1(D_2\bar{z}) = (\bar{x} \otimes \bar{y})((\bar{v} \otimes \bar{w})(\bar{z})) = (\bar{x} \otimes \bar{y})(\bar{v}(\bar{w} \cdot \bar{z})) = \\ &= \bar{x}(\bar{y} \cdot \bar{v})(\bar{w} \cdot \bar{z}) = (\bar{y} \cdot \bar{v})(\bar{x}(\bar{w} \cdot \bar{z})) = (\bar{y} \cdot \bar{v})(\bar{x} \otimes \bar{w})(\bar{z}). \end{aligned}$$

Таким образом, для оператора композиции диад имеем

$$(\bar{x} \otimes \bar{y})(\bar{v} \otimes \bar{w}) = (\bar{y} \cdot \bar{v})(\bar{x} \otimes \bar{w}). \quad (10.1)$$

Векторы  $\bar{y}$  и  $\bar{v}$ , стоящие рядом в середине записи композиции диад, скалярно умножаются. Этот скаляр умножается на диаду крайних векторов  $\bar{x}$  и  $\bar{w}$ .

Применим равенство (10.1) к композиции двух диад  $\bar{a} \otimes \bar{e}_1$  и  $\bar{e}^{-1} \otimes (\bar{b} \times \bar{c})$ :

$$(\bar{a} \otimes \bar{e}_1) \cdot (\bar{e}^{-1} \otimes (\bar{b} \times \bar{c})) = (\bar{e}_1 \cdot \bar{e}^{-1}) \bar{a} \otimes (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{a} \otimes (\bar{b} \times \bar{c}).$$

Аналогично

$$(\bar{b} \otimes \bar{e}_2) \cdot (\bar{e}^{-2} \otimes (\bar{c} \times \bar{a})) = \bar{b} \otimes (\bar{c} \times \bar{a}),$$

$$(\bar{c} \otimes \bar{e}_3) \cdot (\bar{e}^{-3} \otimes (\bar{a} \times \bar{b})) = \bar{c} \otimes (\bar{a} \times \bar{b}).$$

Используя эти равенства, получаем из равенства (8.5)

$$\begin{aligned} (\bar{a} \bar{b} \bar{c}) I &= \bar{a} \otimes (\bar{b} \times \bar{c}) + \bar{b} \otimes (\bar{c} \times \bar{a}) + \bar{c} \otimes (\bar{a} \times \bar{b}) = \\ &= (\bar{a} \otimes \bar{e}_1 + \bar{b} \otimes \bar{e}_2 + \bar{c} \otimes \bar{e}_3) \cdot (\bar{e}^{-1} \otimes (\bar{b} \times \bar{c}) + \bar{e}^{-2} \otimes (\bar{c} \times \bar{a}) + \bar{e}^{-3} \otimes (\bar{a} \times \bar{b})). \end{aligned} \quad (10.2)$$

При раскрытии скобок в правой части формулы (10.2) учтено, что слагаемые типа композиции диад  $(\bar{a} \otimes \bar{e}_1) \cdot (\bar{e}^{-2} \otimes (\bar{c} \times \bar{a}))$  в силу равенства (10.1) обращаются в нуль, так как  $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}^{-2} = 0$ . Напоминаем, что точка между скобками в правой части формулы (10.2) означает композицию операторов. Равенство (10.2) будет использовано в дальнейшем при доказательстве важной теоремы.

**Определение 8.** Транспонированный тензор (сопряженный линейный оператор) определяется следующим образом. Тензор  $T^T$  называется транспонированным к тензору  $T$ , если  $T \bar{z} \cdot \bar{w} = \bar{z} \cdot T^T \bar{w}$  для всех векторов  $\bar{z}, \bar{w}$ .

Иными словами, тензор можно «перебрасывать» с одного вектора на другой в скалярном произведении с помощью транспонированного тензора. В курсе линейной алгебры оператор  $T^T$  называется сопряженным линейным оператором.

Рассмотрим диаду  $D = \bar{x} \otimes \bar{y}$ . Найдем  $D^T$ :

$$D \bar{z} \cdot \bar{w} = ((\bar{x} \otimes \bar{y}) \bar{z}) \cdot \bar{w} = (\bar{x} (\bar{y} \cdot \bar{z})) \cdot \bar{w} = (\bar{y} \cdot \bar{z}) (\bar{x} \cdot \bar{w}) =$$

$$= \bar{z} \cdot (\bar{y}(\bar{x} \cdot \bar{w})) = \bar{z} \cdot ((\bar{y} \otimes \bar{x})\bar{w}),$$

т. е.  $D^T = \bar{y} \otimes \bar{x}$ . В ковариантных координатах

$$(D_{ij}^T) = \begin{pmatrix} y_1x_1 & y_1x_2 & y_1x_3 \\ y_2x_1 & y_2x_2 & y_2x_3 \\ y_3x_1 & y_3x_2 & y_3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{pmatrix}^T,$$

т. е.  $(D_{ij}^T) = (D_{ij})^T$ .

Аналогично в контравариантных координатах

$$(D^{Tii}) = \begin{pmatrix} y^1x^1 & y^1x^2 & y^1x^3 \\ y^2x^1 & y^2x^2 & y^2x^3 \\ y^3x^1 & y^3x^2 & y^3x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1y^1 & x^1y^2 & x^1y^3 \\ x^2y^1 & x^2y^2 & x^2y^3 \\ x^3y^1 & x^3y^2 & x^3y^3 \end{pmatrix}^T = (D^{ii})^T.$$

Таким образом, матрицы ковариантных или контравариантных компонент транспонированной диады получаются транспонированием соответствующих матриц самой диады.

Для смешанных компонент диады получаем

$$(D^{Ti_j}) = \begin{pmatrix} y^1x_1 & y^1x_2 & y^1x_3 \\ y^2x_1 & y^2x_2 & y^2x_3 \\ y^3x_1 & y^3x_2 & y^3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y^1 & x_1y^2 & x_1y^3 \\ x_2y^1 & x_2y^2 & x_2y^3 \\ x_3y^1 & x_3y^2 & x_3y^3 \end{pmatrix}^T = (D_i{}^j)^T,$$

аналогично  $(D_i{}^j)^T = (D_{ij})^T$ . Таким образом, при транспонировании матрицы смешанных координат диады получаем матрицу сопряженной диады в смешанных координатах другого вида, т. е. из матрицы в основном базисе получаем матрицу во взаимном и наоборот.

Так как тензор 2-го ранга  $T$  является линейной комбинацией диад, то для него аналогично получим  $(T_{ij}^T) = (T_{ij})^T$ , что в координатах означает  $T_{ij}^T = T_{ji}$ .

Аналогично  $(T^{Tii}) = (T^{ii})^T$ ,  $T^{Tii} = T^{ii}$ .

Для смешанных координат получаем

$$(T^{Ti_j}) = (T_i{}^j)^T, \quad T^{Ti_j} = T_j{}^i,$$

$$(T_i^{\mathsf{T}^j}) = (T^i_j)^{\mathsf{T}}, \quad T_i^{\mathsf{T}^j} = T^j_i.$$

Таким образом, при транспонировании матрицы линейного оператора в любом основном базисе получаем матрицу сопряженного оператора во взаимном базисе, при транспонировании матрицы ковариантных либо контравариантных координат — матрицу тех же координат сопряженного (транспонированного) оператора (в курсе линейной алгебры для матрицы сопряженного линейного оператора в некотором базисе, т. е. для смешанных координат тензора, это верно только в случае ортонормированного базиса).

Вышеприведенные формулы для координат транспонированного тензора 2-го ранга можно кратко описать очень простым образом. Элемент с левым индексом  $i$  и правым индексом  $j$  для транспонированного тензора получается, если для элемента исходного тензора с индексами  $i$  и  $j$  индекс  $i$  сделать правым, а индекс  $j$  — левым. При этом каждый индекс сохраняет свое верхнее или нижнее положение. Для координат  $T_{ij}$  и  $T^{ij}$  это равносильно транспонированию — два нижних (верхних) индекса просто меняются местами. Для смешанных координат получаем смешанные координаты другого вида.

**Определение 9.** Тензор 2-го ранга  $T$  называется симметричным, если  $T^{\mathsf{T}} = T$ .

Симметричный тензор  $T$  является самосопряженным линейным оператором. Тензор  $T$  является симметричным, если матрица транспонированного (сопряженного) оператора в любом из четырех ее видов —  $(T_{ij})$ ,  $(T^{ij})$ ,  $(T_i^j)$ ,  $(T^i_j)$  — совпадает с матрицей оператора этого же вида, т. е.

$$T_{ji} = T_{ij}, \quad T^{ji} = T^{ij}, \quad T^i_j = T_j^i, \quad T_i^j = T^j_i$$

(последние два равенства повторяют друг друга). На практике достаточно проверить совпадения матриц только для одного вида, остальные три будут также совпадать.

**Определение 10.** Тензор 2-го ранга  $T$  называется антисимметричным, если  $T^{\mathsf{T}} = -T$ .

Антисимметричность тензора означает для матриц, что

$$T_{ji} = -T_{ij}, \quad T^{ji} = -T^{ij}, \quad T^i_j = -T_j^i, \quad T_i^j = -T^j_i.$$

**Определение 11.** Симметрированием тензора  $T$  называется тензор

$$T_s = \frac{1}{2}(T + T^T).$$

**Определение 12.** Альтернированием тензора  $T$  называется тензор

$$T_a = \frac{1}{2}(T - T^T).$$

Здесь видно, что  $T_s$  — симметричный тензор, а  $T_a$  — антисимметричный тензор. Действительно,

$$(T_s)^T = \frac{1}{2}(T + T^T)^T = \frac{1}{2}(T^T + (T^T)^T) = \frac{1}{2}(T^T + T) = T_s,$$

$$(T_a)^T = \frac{1}{2}(T - T^T)^T = \frac{1}{2}(T^T - (T^T)^T) = \frac{1}{2}(T^T - T) = -T_a.$$

Очевидно,  $T = T_s + T_a$ . Таким образом, любой тензор 2-го ранга может быть представлен в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров.

**Определение 13.** Следом тензора 2-го ранга называется величина

$$\text{Sp}(T) = \text{Tr}(T) = \bar{T} \bar{e}_1 \cdot \bar{e}^1 + \bar{T} \bar{e}_2 \cdot \bar{e}^2 + \bar{T} \bar{e}_3 \cdot \bar{e}^3 = \bar{T} \bar{e}_i \cdot \bar{e}^i,$$

где  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  — произвольный базис пространства.

Покажем, что определение корректно, т. е. след не зависит от выбора базиса. По формуле Гиббса (3.3) получаем, что  $\bar{T} \bar{e}_1 \cdot \bar{e}^1$  — первая координата вектора  $\bar{T} \bar{e}_1$  в базисе  $\bar{e}_j$ , т. е. элемент первой строки и первого столбца матрицы  $(T^i{}_j)$  тензора (оператора)  $T$  в базисе  $\bar{e}_j$ :  $\bar{T} \bar{e}_1 \cdot \bar{e}^1 = T^1{}_1$ . Аналогично,  $\bar{T} \bar{e}_2 \cdot \bar{e}^2 = T^2{}_2$ ,  $\bar{T} \bar{e}_3 \cdot \bar{e}^3 = T^3{}_3$ , т. е.

$$\text{Sp}(T) = T^1{}_1 + T^2{}_2 + T^3{}_3 = T^i{}_i.$$

В новом базисе  $\bar{e}'_j$  имеем  $T'^i{}_j = T^k{}_m b'_k a'_i = T^k{}_k$ , так как в силу того, что матрицы  $A$  и  $B$  — взаимно обратные,

$$b_k^i a_i^m = (b_k^1, b_k^2, b_k^3) \begin{pmatrix} a_1^m \\ a_2^m \\ a_3^m \end{pmatrix} = \delta_k^m = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Итак, определение следа не зависит от базиса.

След равен сумме диагональных элементов матрицы тензора в произвольном базисе, т. е. матрицы смешанных ( $T^i{}_j$ ) координат тензора. В частности, это верно и для базиса  $\bar{e}^j$ , взаимного к произвольному базису  $\bar{e}_j$ , т. е.

$$\text{Sp}(T) = T_i{}^i.$$

В ковариантных или контравариантных координатах, используя подъем индексов у ковариантных или спуск индексов у контравариантных координат, получим

$$\text{Sp}(T) = T^i{}_i = T_{ki} g^{ki}, \quad \text{Sp}(T) = T^{ik} g_{ik}.$$

Здесь подразумевается двойное суммирование  $\sum_{k,i=1}^3$ .

Для диады  $D = \bar{x} \otimes \bar{y}$  имеем  $\text{Sp}(D) = D^i{}_i = x^i y_i = \bar{x} \cdot \bar{y}$ , т. е. след диады равен скалярному произведению векторов, образующих диаду.

**Определение 14.** Шаровой частью тензора 2-го ранга  $T$  называют тензор  $T_b = \frac{1}{3} \text{Sp}(T) I$ , где  $I$  — тождественный оператор.

$T_b$  — линейный оператор растяжения (сжатия). В смешанных координатах

$$(T_b)^i{}_j = (T_b)_i{}^j = \frac{1}{3} \text{Sp}(T) E = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \text{Sp}(T) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \text{Sp}(T) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \text{Sp}(T) \end{pmatrix}.$$

Таким образом,  $\text{Sp}(T_b) = \text{Sp}(T)$ .

**Определение 15.** Девиаторной частью (девиатором) тензора 2-го ранга  $T$  называют тензор  $T_d = T - T_b$ .

Здесь видно, что след девиатора равен нулю:

$$\text{Sp}(T_d) = \text{Sp}(T - T_b) = \text{Sp}(T) - \text{Sp}(T_b) = 0.$$

Очевидно, что  $T = T_b + T_d$ , т. е. любой тензор 2-го ранга можно представить в виде суммы тензора растяжения (сжатия) и тензора с нулевым следом.

*Функции от тензоров.* Композиция (произведение) тензоров позволяет определить степени тензора 2-го ранга:  $T \cdot T = T^2$ ,  $T^2 \cdot T = T^3$  и т. д. В координатах  $T_j^i$  и  $T_j^i$  степени тензора соответствует аналогичная степень матрицы. Если существует обратный линейный оператор  $T^{-1}$ , то можно определить  $T^{-2} = (T^{-1})^2$ ,  $T^{-3} = (T^{-2}) \cdot (T^{-1}) = (T^{-1})^3$  и т. д.

Можно определить многочлен от тензора

$$Q(T) = a_0 T^n + a_1 T^{n-1} + \dots + a_{n-1} T + a_n I.$$

В координатах  $T_j^i$  и  $T_j^i$  многочлен от тензора соответствует многочлену от матрицы.

Используя предельный переход, можно определить аналитическую функцию от тензора  $T$ , например

$$\exp[T] = e^T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} = I + \frac{T}{1!} + \frac{T^2}{2!} + \frac{T^3}{3!} + \dots + \frac{T^n}{n!} + \dots$$

Сходимость матричного ряда можно понимать как существование предела для каждого из элементов в последовательности матриц — частичных сумм ряда. Для экспоненты (как и для любой функции, аналитической на всей комплексной плоскости) этот ряд сходится для любой квадратной матрицы и, соответственно, для любого тензора  $T$ .

## 11. Тензоры высших рангов

Из вышеизложенного материала видно, что диаду  $D = \bar{x} \otimes \bar{y}$  можно рассматривать как совокупность чисел  $D^{ij} = x^i y^j$  (контравариантные координаты), или  $D_{ij} = x_i y_j$  (ковариантные коор-

наны), или  $D^i_j = x^i y_j$ , или  $D_i^j = x_i y^j$  (два вида смешанных координат).

Аналогично можно ввести понятие тензорного произведения трех, четырех и любого числа векторов.

**Определение 16.** Триадой  $\tau = \bar{x} \otimes \bar{y} \otimes \bar{z}$  векторов  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  называют совокупность чисел

$$\tau^{ijk} = x^i y^j z^k, \quad \tau^{\bar{i}}_{\bar{k}} = x^i y^j z_k, \quad \tau^{\bar{i} k}_{\bar{j}} = x^i y_j z^k, \quad \tau^{\bar{i} \bar{j} k} = x_i y^j z^k,$$

$$\tau^i_{jk} = x^i y_j z_k, \quad \tau^j_{ik} = x_i y^j z_k, \quad \tau^{\bar{i} \bar{j} k} = x_i y_j z^k, \quad \tau_{ijk} = x_i y_j z_k.$$

Всего имеется  $2^3 = 8$  видов координат триады. Каждый из 8 видов координат триады может рассматриваться как кубическая матрица из  $3^3 = 27$  элементов, где третий индекс задает номер уровня («этажа») данного элемента матрицы внутри куба. Первые два индекса задают номер строки и столбца элемента в квадратной матрице, являющейся горизонтальным сечением («этажом») кубической матрицы.

Триаду можно рассмотреть как линейный оператор, действующий на пару векторов (билинейный оператор). Триада  $\tau = \bar{x} \otimes \bar{y} \otimes \bar{z}$  действует на пару векторов  $\bar{u}, \bar{v}$  следующим образом:

$$\tau(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{x} \otimes \bar{y} \otimes \bar{z})(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{z} \cdot \bar{u})(\bar{x} \otimes \bar{y})(\bar{v}) = (\bar{z} \cdot \bar{u})(\bar{y} \cdot \bar{v})\bar{x}.$$

Мнемонически результат действия триады на пару векторов  $(\bar{x} \otimes \bar{y} \otimes \bar{z})(\bar{u}, \bar{v})$  легко запомнить по следующему принципу: сначала третий вектор триады  $\bar{z}$  скалярно умножается на ближайший к нему вектор  $\bar{u}$  из пары  $\bar{u}, \bar{v}$ ; полученное число  $\bar{z} \cdot \bar{u}$  умножается на результат действия диады  $\bar{x} \otimes \bar{y}$  на вектор  $\bar{v}$ .

Преобразование координат триады при переходе к новому базису аналогично преобразованию координат диады. Верхние индексы преобразуются с помощью обратной матрицы  $B = A^{-1}$ , нижние — с помощью прямой матрицы перехода  $A$ , т. е.

$$\tau^{ijk'} = \tau^{mn} b_m^i b_n^j b_l^k, \quad \tau^{\bar{i}}_{\bar{k}'} = \tau^{\bar{m} \bar{n}} b_m^i b_n^j a_k^l, \dots$$

$$\tau^{\bar{i} \bar{k}'} = \tau^{\bar{l}}_{mn} a_i^m a_j^n b_l^k, \quad \tau_{ijk'} = \tau_{mn} a_i^m a_j^n a_k^l.$$

Здесь подразумевается тройная сумма  $\sum_{m,n,l=1}^3$ .

Подъем и спуск индексов триады аналогичен этой процедуре для векторов и тензоров 2-го ранга

$$\tau^{\bar{y}}_k = \tau^{\bar{y}m} g_{mk}, \quad \tau^i_j = \tau^{imk} g_{mj}, \dots$$

Чтобы опустить верхний индекс  $m$  и превратить его в  $k$  (или  $j$ ), умножаем преобразуемую координату на элемент матрицы Грама  $G$  с нижними индексами  $g_{mk}$  (или  $g_{mj}$  соответственно), суммируя при этом по повторяющемуся индексу  $m$ .

Аналогично при поднятии индекса используют матрицу Грама  $G^{-1}$  с верхними индексами

$$\tau^i_{jk} = \tau_{mj} g^{mi}, \quad \tau^j_{ik} = \tau_{imk} g^{mj}, \dots$$

**Определение 17.** Тензором 3-го ранга  $P$  называется линейная комбинация триад.

Координаты тензоров 3-го ранга:  $P^{ijk}$  — контравариантные,  $P^{\bar{y}}_k, P^{ik}_j, P^{jk}_i, P^i_{jk}, P_i^{jk}, P_{ij}^k$  — смешанные,  $P_{ijk}$  — ковариантные.

Преобразование координат тензора 3-го ранга происходит по аналогичным для триадам правилам

$$P^{ijk} = P^{mnk} b_m^i b_n^j b_l^k, \quad P_i^{jk} = P_m^{nl} a_i^m b_n^j b_l^k, \dots, \quad P_{ijk} = P_{mnk} a_i^m a_j^n a_k^l.$$

Здесь подразумевается сумма  $\sum_{m,n,l=1}^3$ .

Подъем и спуск индексов также проводится аналогично триадам

$$P^{ijk} = P_m^{ik} g^{mj}, \quad P_{ijk} = P_i^{mk} g_{mj}, \dots$$

здесь подразумевается сумма  $\sum_{m=1}^3$ .

Как и триада, тензор 3-го ранга может быть определен как билинейный оператор, переводящий упорядоченную пару векторов  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$  в их образ — вектор  $\bar{w} = P(\bar{u}, \bar{v})$ . Координаты тензора 3-го ранга при этом могут быть определены как координаты образов пар базисных векторов  $P(e^{-j}, e^{-k}), P(e^{-j}, e_k)$  и т. д. Причем эти координаты могут быть представлены по формулам Гиббса (3.3) как скалярные произведения базисных векторов на образы

$P^{ijk} = \bar{e}^i \cdot P(\bar{e}^j, \bar{e}^k)$ ,  $P_{\bar{k}}^{ij} = \bar{e}^i \cdot P(\bar{e}^j, \bar{e}_k)$ , ...,  $P_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} = \bar{e}_i \cdot P(\bar{e}_j, \bar{e}_k)$  (умножение на  $\bar{e}^i$  дает координату образа в основном базисе, на  $\bar{e}_i$  — во взаимном базисе). Первый (левый) индекс при этом соответствует номеру координаты образа, второй и третий индексы — номерам базисных векторов, образ которых рассматривается. Заметим, что, как и ранее, расположение индекса вверху (внизу) в левой части равенств полностью соответствует их расположению в правой части, что позволяет легко выписывать эти соотношения.

Как и в случае линейных операторов от одного вектора — тензоров 2-го ранга — координаты образа пары векторов  $w = P(\bar{u}, \bar{v})$  могут быть найдены с использованием координат тензора 3-го ранга (элементов соответствующих кубических матриц)  $w^i = P^{ikm} u_k v_m$ ,  $w^i = P_{\bar{m}}^{ik} u_k v^m$ , ...,  $w_i = P_{ikm} u^k v^m$  с помощью суммирования по двум парам повторяющихся сверху и снизу индексов.

**Пример 6.** Рассмотрим следующий тензор 3-го ранга  $\mathcal{E}$  или билинейный оператор, который переводит пару векторов  $\bar{u}, \bar{v}$  в их векторное произведение, т. е.  $\mathcal{E}(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{u} \times \bar{v}$ . Этот тензор называется тензором Леви — Чивиты. Найдем, например, ковариантные координаты тензора  $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{E}_{ijk} = \bar{e}_i \cdot \mathcal{E}(\bar{e}_j, \bar{e}_k) = \bar{e}_i \cdot (\bar{e}_j \times \bar{e}_k) = \bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}_k.$$

Таким образом, ковариантные координаты тензора Леви—Чивиты равны смешанным произведениям соответствующих векторов основного базиса. Очевидно, что  $\mathcal{E}_{ijk} = 0$  в том случае, если хотя бы два индекса  $i, j, k$  совпадают, например  $\mathcal{E}_{112} = 0$  и тому подобное. Ненулевые координаты равны  $\pm \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3$ , а именно, при попарной перестановке двух индексов в тройке 123 получаем знак минус, например  $\mathcal{E}_{213} = -\mathcal{E}_{123} = -\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3$ . При циклической перестановке индексов 123 получаем знак плюс, например  $\mathcal{E}_{312} = \mathcal{E}_{123} = \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3$ . Введем символы Леви—Чивиты  $\epsilon_{ijk}$  следующим образом. По определению  $\epsilon_{123} = 1$ . При попарной перестановке индексов меняется знак символа:  $\epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1$ . При циклической перестановке индексов знак остается прежним:  $\epsilon_{312} = \epsilon_{231} = \epsilon_{123} = 1$ . Если два индекса совпадают, то символ равен нулю. Тогда ковариантные координаты тензора Леви — Чивиты выражаются следующим образом:

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3.$$

Отметим также, что сами символы Леви — Чивиты (называемые также обобщенными символами Кронекера или символами Веблена) не образуют тензора, поскольку они не меняются при переходе к новому базису. Неизменными при переходе к любому базису могут только координаты нулевого тензора.

Векторное произведение любых векторов может быть тогда записано через координаты тензора Леви — Чивиты и символы Леви — Чивиты:

$$\bar{u} \times \bar{v} = \mathcal{E}(\bar{u}, \bar{v}) = \varepsilon_{ijk} u^j v^k \bar{e}^i = (\varepsilon_{ijk} u^j v^k \bar{e}^i)(\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3).$$

Аналогично можно рассмотреть другие виды координат тензора Леви — Чивиты, например  $\mathcal{E}_{ij}^k = \bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}^k$ , тогда  $\bar{u} \times \bar{v} = \mathcal{E}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathcal{E}_{ij}^k u^j v^k \bar{e}^i$ .

Аналогично диадам и триадам вводится определение тензорного произведения произвольного количества векторов.

**Определение 18.** Полиадой  $\bar{x}_{(1)} \otimes \bar{x}_{(2)} \otimes \dots \otimes \bar{x}_{(r)}$  называют совокупность чисел

$$x_{(1)}^{i_1} \cdot x_{(2)}^{i_2} \cdot \dots \cdot x_{(r)}^{i_r},$$

$$x_{(1)i_1} \cdot x_{(2)i_2} \cdot \dots \cdot x_{(r)i_r},$$

...,

$$x_{(1)\bar{i}_1} \cdot x_{(2)\bar{i}_2} \cdot \dots \cdot x_{(r)\bar{i}_r}.$$

Здесь нижний индекс в скобках означает номер вектора, индексы внизу или вверху без скобок — ковариантные или контравариантные координаты соответствующего вектора. Полиада имеет  $2^r$  видов координат, каждая координата равна произведению  $r$  множителей. Всего координат данного вида (например, ковариантных, когда все индексы у координат векторов — нижние) имеется  $3^r$ .

Можно дать определение полиады как линейного оператора, действующего на совокупность, состоящую из  $r-1$  векторов.

**Определение 19.** Линейная комбинация полиад называется тензором ранга  $r$ .

Преобразование координат тензора ранга  $r$  при переходе к новому базису проводится так же, как и для тензоров низших рангов. Верхние индексы преобразуются с помощью элементов обратной матрицы перехода  $B$ , нижние — с помощью элементов прямой матрицы перехода  $A$ .

**Определение 20.** Тензорное произведение тензоров ранга  $r_1$  и  $r_2$  есть тензор ранга  $r_1 + r_2$ , образованный произведениями координат этих тензоров.

**Пример 7.** Пусть  $T, S$  — тензоры 2-го ранга. Тогда  $T \otimes S$  — тензор 4-го ранга. Его координаты определяются следующим образом:

$$R^{ijkl} = T^{ij} S^{kl}, \quad R^{\bar{i}j\bar{k}}_{\bar{l}} = T^{\bar{i}\bar{j}} S^{\bar{k}\bar{l}}, \quad \dots, \quad R_{ijkl} = T_{ij} S_{kl}.$$

**Пример 8.** Пусть  $T$  — тензор 2-го ранга,  $\bar{w}$  — вектор. Тогда  $P = T \otimes \bar{w}$  — тензор 3-го ранга, имеющий координаты

$$P^{\bar{i}j\bar{k}} = T^{\bar{i}\bar{j}} w^{\bar{k}}, \quad P^{\bar{i}j}_{\bar{k}} = T^{\bar{i}\bar{j}} w_k, \quad \dots, \quad P_{\bar{i}j\bar{k}} = T_{\bar{i}\bar{j}} w_{\bar{k}}.$$

**Определение 21.** Свертка тензора по верхнему и нижнему индексу определяется следующим образом: фиксируем один верхний и один нижний индекс и задаем им одинаковое значение  $k$ ; суммируем по повторяющемуся индексу  $k$ .

Таким образом, ранг полученного тензора будет на два ниже, чем у исходного тензора.

**Пример 9.** Свертка тензора 4-го ранга дает тензор 2-го ранга  $R^{\bar{i}j\bar{k}}_{\bar{k}} = Q^{\bar{i}\bar{j}}$ , где в левой части подразумевается сумма  $\sum_{k=1}^3$ .

**Пример 10.** Свертка тензора 2-го ранга  $T^i{}_i = \text{Sp}(T)$  — равна следу тензора (скаляру, тензору 0-го ранга).

## 12. Главные значения (собственные значения) и главные направления (собственные векторы) тензора 2-го ранга.

**Инварианты. Теорема Гамильтона — Кэли**

Пусть  $T$  — тензор 2-го ранга (линейный оператор). Его матрица в основном базисе  $\bar{e}_j$ , т. е. матрица смешанных координат:

$$(T^i{}_j) = \begin{pmatrix} T^1_1 & T^1_2 & T^1_3 \\ T^2_1 & T^2_2 & T^2_3 \\ T^3_1 & T^3_2 & T^3_3 \end{pmatrix}.$$

**Определение 22.** Число  $\lambda \in \mathbb{R}$  и вектор  $\bar{x} \neq \bar{0}$  называются, соответственно, собственным значением и собственным вектором тензора  $T$ , если  $T\bar{x} = \lambda\bar{x}$ .

Из курса линейной алгебры известно, что число  $\lambda$  является собственным значением тогда и только тогда, когда  $\lambda$  — корень характеристического уравнения  $P(\lambda) = 0$ , где  $P(\lambda)$  — характеристический многочлен тензора  $T$ , равный определителю 3-го порядка:

$$P(\lambda) = |(T^i{}_j) - \lambda E| = \begin{vmatrix} T^1_1 - \lambda & T^1_2 & T^1_3 \\ T^2_1 & T^2_2 - \lambda & T^2_3 \\ T^3_1 & T^3_2 & T^3_3 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Характеристический многочлен не зависит от выбора базиса. Вычисляя определитель, получаем

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2(T^1_1 + T^2_2 + T^3_3) -$$

$$-\lambda \left( \begin{vmatrix} T^1_1 & T^1_2 \\ T^2_1 & T^2_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T^1_1 & T^1_3 \\ T^3_1 & T^3_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T^2_2 & T^2_3 \\ T^3_2 & T^3_3 \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} T^1_1 & T^1_2 & T^1_3 \\ T^2_1 & T^2_2 & T^2_3 \\ T^3_1 & T^3_2 & T^3_3 \end{vmatrix},$$

т. е.

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + J_1\lambda^2 - J_2\lambda + J_3,$$

где коэффициенты  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  — инварианты тензора  $T$  (не зависят от базиса, так как характеристический многочлен инвариантен относительно перехода к другому базису),  $J_1 = T^i{}_i = \text{Sp}(T) = T_i^i$  — след тензора,  $J_2 = \begin{vmatrix} T^1{}_1 & T^1{}_2 \\ T^2{}_1 & T^2{}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T^1{}_1 & T^1{}_3 \\ T^3{}_1 & T^3{}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T^2{}_2 & T^2{}_3 \\ T^3{}_2 & T^3{}_3 \end{vmatrix}$  — сумма дополнительных миноров диагональных элементов матрицы тензора,

$$J_3 = \begin{vmatrix} T^1{}_1 & T^1{}_2 & T^1{}_3 \\ T^2{}_1 & T^2{}_2 & T^2{}_3 \\ T^3{}_1 & T^3{}_2 & T^3{}_3 \end{vmatrix} = |(T^i{}_j)|$$

— определитель матрицы оператора в базисе  $\bar{e}_j$ .

Выразим инварианты  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  через базисные векторы  $\bar{e}_j$  и их образы  $T\bar{e}_j$ . Используем тот факт, что координаты векторов  $T\bar{e}_j$ , записанные по столбцам, образуют матрицу  $(T^i{}_j)$ .

Для следа  $J_1$  имеем

$$\begin{aligned} J_1 &= \text{Sp}(T) = T_i^i = T\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1^{-1} + T\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2^{-2} + T\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3^{-3} = \\ &= T\bar{e}_1 \cdot \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3} + T\bar{e}_2 \cdot \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3} + T\bar{e}_3 \cdot \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3} = \\ &= \frac{T\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3 + \bar{e}_1 T\bar{e}_2 \bar{e}_3 + \bar{e}_1 \bar{e}_2 T\bar{e}_3}{\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3}. \end{aligned}$$

Рассмотрим инвариант  $J_2$ :

$$J_2 = \begin{vmatrix} T^1{}_1 & T^1{}_2 \\ T^2{}_1 & T^2{}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T^1{}_1 & T^1{}_3 \\ T^3{}_1 & T^3{}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T^2{}_2 & T^2{}_3 \\ T^3{}_2 & T^3{}_3 \end{vmatrix}.$$

Так как согласно формуле (4.2) векторное произведение образов векторов  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$

$$T\bar{e}_1 \times T\bar{e}_2 = \begin{vmatrix} \bar{e}^{-1} & \bar{e}^{-2} & \bar{e}^{-3} \\ T^1{}_1 & T^2{}_1 & T^3{}_1 \\ T^1{}_2 & T^2{}_2 & T^3{}_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3 =$$

$$= \left( \bar{e}^1 \begin{vmatrix} T^2_1 & T^3_1 \\ T^2_2 & T^3_2 \end{vmatrix} - \bar{e}^2 \begin{vmatrix} T^1_1 & T^3_1 \\ T^1_2 & T^3_2 \end{vmatrix} + \bar{e}^3 \begin{vmatrix} T^1_1 & T^2_1 \\ T^1_2 & T^2_2 \end{vmatrix} \right) \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3,$$

то минор  $\begin{vmatrix} T^1_1 & T^1_2 \\ T^2_1 & T^2_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T^1_1 & T^2_1 \\ T^1_2 & T^2_2 \end{vmatrix}$  — третья координата вектора  $T\bar{e}_1 \times T\bar{e}_2$  в базисе  $\bar{e}^j$ , деленная на  $\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3$ . Согласно формулам Гиббса (3.3), получаем

$$\begin{vmatrix} T^1_1 & T^1_2 \\ T^2_1 & T^2_2 \end{vmatrix} = \frac{(T\bar{e}_1 \times T\bar{e}_2) \cdot \bar{e}_3}{\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3} = \frac{T\bar{e}_1 T\bar{e}_2 \bar{e}_3}{\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3}.$$

Аналогично рассмотрев два других минора в выражении для  $J_2$ , получим

$$J_2 = \frac{T\bar{e}_1 T\bar{e}_2 \bar{e}_3 + T\bar{e}_1 \bar{e}_2 T\bar{e}_3 + \bar{e}_1 T\bar{e}_2 T\bar{e}_3}{\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3}.$$

Для третьего инварианта, используя формулу (4.3):

$$J_3 = |(T_j^i)| = \begin{vmatrix} T^1_1 & T^1_2 & T^1_3 \\ T^2_1 & T^2_2 & T^2_3 \\ T^3_1 & T^3_2 & T^3_3 \end{vmatrix} \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3 \frac{1}{\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3} = \frac{T\bar{e}_1 T\bar{e}_2 T\bar{e}_3}{\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3}.$$

**Теорема Гамильтона — Кэли.** Тензор 2-го ранга удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$P(T) \equiv -T^3 + J_1 T^2 - J_2 T + J_3 I = 0,$$

где  $I$  — тождественный оператор;  $0$  — нулевой линейный оператор.

**Доказательство.** Воспользуемся представлением тензора в виде суммы трех диад (формула (8.1)):  $T = \bar{p}_j \otimes \bar{e}^j$ , где  $\bar{p}_j = T_j^i \bar{e}_i$ . Для произвольного  $\lambda \in \mathbb{R}$  рассмотрим векторы  $\bar{a} = \bar{p}_1 - \lambda \bar{e}_1$ ,  $\bar{b} = \bar{p}_2 - \lambda \bar{e}_2$ ,  $\bar{c} = \bar{p}_3 - \lambda \bar{e}_3$  и применим к ним формулу (10.2), в которой основной базис заменен на взаимный,

$$\begin{aligned} & \left( (\bar{p}_1 - \lambda \bar{e}_1) \otimes \bar{e}^1 + (\bar{p}_2 - \lambda \bar{e}_2) \otimes \bar{e}^2 + (\bar{p}_3 - \lambda \bar{e}_3) \otimes \bar{e}^3 \right) \times \\ & \times (K_0 + \lambda K_1 + \lambda^2 K_2) = (\bar{p}_1 - \lambda \bar{e}_1)(\bar{p}_2 - \lambda \bar{e}_2)(\bar{p}_3 - \lambda \bar{e}_3)I, \end{aligned} \quad (12.1)$$

где  $K_0, K_1, K_2$  — некоторые тензоры 2-го ранга, явное выражение для которых не имеет значения в данном случае. Отметим, что первый множитель в скобках в левой части формулы (12.1)

$$\bar{p}_j \otimes \bar{e}^j - \lambda \bar{e}_j \otimes \bar{e}^j = T - \lambda I.$$

Так как координаты векторов  $\bar{p}_j$  в основном базисе равны  $T_j^i$ , то смешанное произведение в правой части формулы (12.1), согласно формуле (4.3),

$$|(T_j^i) - \lambda E|(\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3) = P(\lambda)V,$$

где  $V = \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3$ . Тогда формула (12.1) примет вид

$$(T - \lambda I) \cdot (K_0 + \lambda K_1 + \lambda^2 K_2) = P(\lambda)V$$

и, разделив на  $V$ , получим равенство того же вида

$$(T - \lambda I) \cdot (K_0 + \lambda K_1 + \lambda^2 K_2) = P(\lambda)I = (-\lambda^3 + J_1 \lambda^2 - J_2 \lambda + J_3)I, \quad (12.2)$$

где  $K_0, K_1, K_2$  — также некоторые тензоры, за которыми мы сохранили прежние обозначения. Приравнивая коэффициенты при  $\lambda^3$  в формуле (12.2), получаем  $-IK_2 = -I$ , т. е.  $K_2 = I$ .

Приравнивая в формуле (12.2) коэффициенты при  $\lambda^2$ , получаем  $TK_2 - K_1 = J_1 I$ , т. е.  $K_1 = TK_2 - J_1 I = TI - J_1 I = T - J_1 I$ .

Приравнивая в формуле (12.2) коэффициенты при  $\lambda$ , получаем  $TK_1 - K_0 = -J_2 I$ , т. е.  $K_0 = TK_1 + J_2 I = T^2 - J_1 T + J_2 I$ .

Приравнивая в (12.2) свободные коэффициенты, получаем  $TK_0 = J_3 I$ , т. е.  $T^3 - J_1 T^2 + J_2 T = J_3 I$  или  $-T^3 + J_1 T^2 - J_2 T + J_3 I = 0$ .

Теорема доказана.

Теорема Гамильтона — Кэли позволяет выразить третью степень тензора через младшие степени:

$$T^3 = J_1 T^2 - J_2 T + J_3 I.$$

Применяя оператор  $T$ , получим представление четвертой степени тензора через младшие степени

$$T^4 = J_1 T^3 - J_2 T^2 + J_3 T.$$

Выражая в этом равенстве  $T^3$  по теореме Гамильтона — Кэли, получим, что четвертая степень тензора выражается через  $T^2$ ,  $T$ ,  $I$ . Аналогично, любая натуральная степень тензора  $T^n$  выражается через  $T^2$ ,  $T$ ,  $I$ .

Выразим при  $J_3 \neq 0$  из теоремы Гамильтона — Кэли тождественный оператор

$$I = \frac{T^2 - J_1 T + J_2 I}{J_3} \cdot T.$$

Таким образом, при  $J_3 \neq 0$  существует обратный оператор

$$T^{-1} = \frac{T^2 - J_1 T + J_2 I}{J_3}.$$

Аналогично, при  $J_3 \neq 0$  существует оператор  $T^{-2} = (T^2)^{-1}$ . Поскольку

$$I = \frac{T - J_1 I + J_2 T^{-1}}{J_3} \cdot T^2,$$

тогда

$$T^{-2} = \frac{T - J_1 I + J_2 T^{-1}}{J_3},$$

причем  $T^{-2}$  может быть выражен через  $T^2$ ,  $T$ ,  $I$ .

Аналогично,  $T^{-n} = (T^n)^{-1}$  выражается через  $T^2$ ,  $T$ ,  $I$  при  $J_3 \neq 0$ .

Пусть  $T$  — симметричный тензор 2-го ранга, т. е.  $T^T = T$ . Из курса линейной алгебры известно, что существует ортонормированный базис из его собственных векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ , соответствующих собственным значениям  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Так как  $T\bar{a}_1 = \lambda_1 \bar{a}_1$ ,  $T\bar{a}_2 = \lambda_2 \bar{a}_2$ ,  $T\bar{a}_3 = \lambda_3 \bar{a}_3$ , в базисе  $\bar{a}_i$  матрица тензора  $T$  имеет диагональный вид

$$(T^i_j)' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, инварианты симметричного тензора имеют вид

$$J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad J_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3, \quad J_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Выразим компоненты тензора  $T$  через собственные значения  $\lambda_i$ . Матрица  $T$  в основном базисе  $(T^i_j)$  и матрица  $(T^i_j')$  в базисе из собственных векторов  $\bar{a}_i$  связаны соотношением  $T^i_j = T^k_m' a_k^i b_j^m$ , где  $A = B^{-1}$  матрица перехода от базиса  $\bar{e}_j$  к базису  $\bar{a}_j$ . Так как

$$T^k_m' = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \lambda_k, & k = m, \end{cases}$$

то

$$T^i_j = \sum_{k=1}^3 \lambda_k a_k^i b_j^k$$

(поскольку индексы у собственных значений принято писать внизу, то в этой формуле знак суммирования по индексу  $k$  написан в явном виде).

Если исходный базис  $\bar{e}_j$  — ортонормированный, то матрица  $A$  перехода к ортонормированному базису из собственных векторов является ортогональной, т. е.  $B = A^{-1} = A^T$  и  $b_j^k = a_k^j$ . Отсюда

$$T^i_j = \sum_{k=1}^3 \lambda_k a_k^i a_k^j = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \cos(\widehat{\bar{a}_k}, \widehat{\bar{e}_i}) \cos(\widehat{\bar{a}_k}, \widehat{\bar{e}_j}).$$

Здесь учтен тот факт, что координаты единичного вектора  $\bar{a}_k$  в ортонормированном базисе  $\bar{e}_i$  равны направляющим косинусам вектора  $\bar{a}_k$ , т. е.  $i$ -я и  $j$ -я координаты вектора  $\bar{a}_k$  в базисе  $\bar{e}_i$  будут  $a_k^i = \cos(\widehat{\bar{a}_k}, \widehat{\bar{e}_i})$  и  $a_k^j = \cos(\widehat{\bar{a}_k}, \widehat{\bar{e}_j})$ .

## Задания для самоконтроля к пп. 8–12

1. Дать определение диадного умножения векторов. Для одного из четырех видов матрицы линейного оператора вывести матрицу диады векторов  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ .
2. Дать определение базисных диад. Разложить тензор второго ранга по базисным диадам.
3. Дать определение тензора второго ранга. Записать законы преобразования компонент тензора при переходе к новому базису и правила спуска и подъема индексов.
4. Дать определения триады и тензора третьего ранга. Написать формулы изменения координат, подъема и спуска индексов для тензора третьего ранга.
5. Записать инварианты тензора второго ранга.
6. Дать определение характеристического многочлена тензора второго ранга. Сформулировать теорему Гамильтона–Кэли.
7. Сформулировать теорему о приведении симметричного тензора второго ранга к диагональному виду. Представить формулы для его инвариантов.

## 13. Пример решения задачи типового расчета

Векторы основного базиса заданы своими координатами в некотором ортнормированном базисе  $\bar{e}_1 = (2; -1; -1)$ ,  $\bar{e}_2 = (-5; 3; -4)$ ,  $\bar{e}_3 = (-3; 1; 2)$ .

1. Матрица Грама основного базиса находится по определению (2.1). Сначала вычисляются попарные скалярные произведения:

$$g_{11} = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 4 + 1 + 1 = 6, \quad g_{12} = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = -10 - 3 + 4 = -9,$$

$$g_{13} = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 = -6 - 1 - 2 = -9, \quad g_{22} = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = 25 + 9 + 16 = 50,$$

$$g_{23} = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 = 15 + 3 - 8 = 10, \quad g_{33} = \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3 = 9 + 1 + 4 = 14.$$

Матрица Грама (матрица ковариантного метрического тензора) имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -9 \\ -9 & 50 & 10 \\ -9 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Составляем присоединенную матрицу (матрицу алгебраических дополнений, в силу симметричности матрицы  $G$  транспонирование излишне):

$$\begin{pmatrix} 600 & 36 & 360 \\ 36 & 3 & 21 \\ 360 & 21 & 219 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем определитель  $|G|$ , например, с помощью разложения по 2-й строке:  $|G| = -324 + 150 + 210 = 36$ . Обратная матрица (матрица контравариантного метрического тензора) равна

$$G^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 600 & 36 & 360 \\ 36 & 3 & 21 \\ 360 & 21 & 219 \end{pmatrix},$$

а элементы матрицы

$$g^{11} = \frac{50}{3}, \quad g^{12} = 1, \quad g^{13} = 10,$$

$$g^{21} = 1, \quad g^{22} = \frac{1}{12}, \quad g^{23} = \frac{7}{12},$$

$$g^{31} = 10, \quad g^{32} = \frac{7}{12}, \quad g^{33} = \frac{73}{12}.$$

2. Взаимный базис  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  может быть найден по формулам (3.2) с использованием векторного и смешанного произведений векторов.

При другом способе нахождения взаимного базиса используется матрица Грама, т. е. поднятие индексов у базисных векторов. По формуле (5.1):

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 50/3 & 1 & 10 \\ 1 & 1/12 & 7/12 \\ 10 & 7/12 & 73/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{e}^1 &= g^{1k} \bar{e}_k = \frac{50}{3} \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 10 \bar{e}_3 = \\ &= \frac{50}{3} (2\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}) + 1(-5\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}) + 10(-3\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}) = -\frac{5}{3}\bar{i} - \frac{11}{3}\bar{j} - \frac{2}{3}\bar{k}; \\ \bar{e}^2 &= g^{2k} \bar{e}_k = \bar{e}_1 + \frac{1}{12} \bar{e}_2 + \frac{7}{12} \bar{e}_3 = \\ &= 1(2\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}) + \frac{1}{12}(-5\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}) + \frac{7}{12}(-3\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}) = -\frac{1}{6}\bar{i} - \frac{1}{6}\bar{j} - \frac{1}{6}\bar{k}; \\ \bar{e}^3 &= g^{3k} \bar{e}_k = 10 \bar{e}_1 + \frac{7}{12} \bar{e}_2 + \frac{73}{12} \bar{e}_3 = \\ &= 10(2\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}) + \frac{7}{12}(-5\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}) + \frac{73}{12}(-3\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}) = -\frac{7}{6}\bar{i} - \frac{13}{6}\bar{j} - \frac{1}{6}\bar{k}. \end{aligned}$$

Взаимный базис

$$\bar{e}^1 = \left( -\frac{5}{3}; -\frac{11}{3}; -\frac{2}{3} \right), \quad \bar{e}^2 = \left( -\frac{1}{6}; -\frac{1}{6}; -\frac{1}{6} \right), \quad \bar{e}^3 = \left( -\frac{7}{6}; -\frac{13}{6}; -\frac{1}{6} \right).$$

3. Для вектора  $\bar{x}$ , заданного контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (-7; 1; 6)$ , найдем его ковариантные координаты  $(x_1, x_2, x_3)$ . Воспользуемся формулой (5.3):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= G^T \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -9 & -9 \\ -9 & 50 & 10 \\ -9 & 10 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -9 \\ -9 & 50 & 10 \\ -9 & 10 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

т. е., проводя вычисления в координатной форме, получаем

$$x_1 = g_{k1}x^k = 6x^1 - 9x^2 - 9x^3 = -42 - 9 - 54 = -105;$$

$$x_2 = g_{k2}x^k = -9x^1 + 50x^2 + 10x^3 = 63 + 50 + 60 = 173;$$

$$x_3 = g_{k3}x^k = -9x^1 + 10x^2 + 14x^3 = 63 + 10 + 84 = 157.$$

Ковариантные координаты  $(x_1, x_2, x_3) = (-105, 173, 157)$ .

Для вектора  $\bar{y}$ , заданного ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (1; 1; 2)$ , найдем его контравариантные координаты  $(y^1, y^2, y^3)$ . Воспользуемся формулой (5.4):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} &= (G^{-1})^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{21} & g^{31} \\ g^{12} & g^{22} & g^{32} \\ g^{13} & g^{23} & g^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 600 & 36 & 360 \\ 36 & 3 & 21 \\ 360 & 21 & 219 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 600 + 36 + 720 \\ 36 + 3 + 42 \\ 360 + 21 + 438 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 1356 \\ 81 \\ 819 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Контравариантные координаты  $(y^1, y^2, y^3) = \left(\frac{113}{3}, \frac{9}{4}, \frac{91}{4}\right)$ .

4. Тензор 2-го ранга  $T$  задан своей матрицей  $T^i{}_j$ ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Воспользуемся формулами (9.1) для нахождения координат  $T_{12}$  и  $T^{33}$ .

Для нахождения ковариантной координаты  $T_{12}$  тензора, если известны его смешанные координаты  $T^i{}_j$ , нужно опустить верхний индекс  $i$ , получив вместо него нижний индекс 1. При этом нижний индекс  $j$  фиксирован ( $j = 2$ ). Умножаем  $T^i{}_2$  на элемент матрицы Грама  $G$  с нижними индексами  $g_{l i}$ :

$$T_{12} = T^i{}_2 g_{1i} = T^1{}_2 g_{11} + T^2{}_2 g_{12} + T^3{}_2 g_{13} = \\ = 2 \cdot 6 + (-6) \cdot (-9) + 2 \cdot (-9) = 12 + 54 - 18 = 48.$$

Для того чтобы получить контравариантную координату  $T^{33}$  при известных смешанных координатах тензора  $T^i{}_j$ , нужно при фиксированном индексе  $i$  ( $i = 3$ ) поднять нижний индекс  $j$  и получить вместо него верхний индекс 3. Умножаем  $T^3_j$  на  $g^{j3}$ :

$$T^{33} = T^3{}_j g^{j3} = T^3{}_1 g^{13} + T^3{}_2 g^{23} + T^3{}_3 g^{33} = 0 \cdot 10 + 2 \cdot \frac{7}{12} + 1 \cdot \frac{73}{12} = \frac{29}{4}.$$

Итак, координаты  $T_{12} = 48$ ,  $T^{33} = \frac{29}{4}$ . Аналогичным образом можно найти остальные координаты тензора.

### Типовой расчет

В данном разделе представлена задача типового расчета, для которой дано 30 вариантов условий.

**Задача.** Задан основной базис  $\bar{e}_1$ ,  $\bar{e}_2$ ,  $\bar{e}_3$  координатами в ортонормированном базисе.

1. Найти матрицы Грама: ковариантную  $G$  и контравариантную  $G^{-1}$ .

2. Найти взаимный базис  $\bar{e}^1$ ,  $\bar{e}^2$ ,  $\bar{e}^3$  двумя способами: находя векторное и смешанное произведение или используя матрицу Грама, т. е. поднятие индексов у базисных векторов.

3. Найти: для вектора  $\bar{x}$ , заданного контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3)$ , его ковариантные координаты  $(x_1, x_2, x_3)$ , а также для вектора  $\bar{y}$ , заданного ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3)$ , его контравариантные координаты  $(y^1, y^2, y^3)$ .

4. Тензор 2-го ранга  $T$  задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(одна из матриц  $(T_{ij})$ ,  $(T_j^i)$ ,  $(T_i^j)$ ,  $(T^{ij})$  согласно варианту). Найти координаты тензора указанных видов.

1. Основной базис  $\bar{e}_1 = (-2; 3; -1)$ ,  $\bar{e}_2 = (1; -2; 2)$ ,  $\bar{e}_3 = (1; -2; 4)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (1; 0; -10)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (-1; 0; 3)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T_{ij}$ , найти координаты тензора  $T^2{}_3$  и  $T^1{}_1$ .

2. Основной базис  $\bar{e}_1 = (1; 3; 2)$ ,  $\bar{e}_2 = (2; 2; 3)$ ,  $\bar{e}_3 = (3; -1; 3)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (4; 8; 7)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (0; 1; 2)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T^i{}_j$ , найти координаты тензора  $T_{21}$  и  $T^{12}$ .

3. Основной базис  $\bar{e}_1 = (-6; 3; -4)$ ,  $\bar{e}_2 = (1; -2; 1)$ ,  $\bar{e}_3 = (2; 3; 0)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (-10; 9; -8)$ , вектор  $\bar{y}$  ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (2; 1; 1)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T_i^j$ , найти координаты тензора  $T^{32}$  и  $T_{11}$ .

4. Основной базис  $\bar{e}_1 = (-2; 2; -1)$ ,  $\bar{e}_2 = (3; -1; -3)$ ,  $\bar{e}_3 = (-1; -3; 3)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (-1; 7; 4)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (3; 0; 1)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T^{ij}$ , найти координаты тензора  $T^2{}_1$  и  $T^3{}_1$ .

5. Основной базис  $\bar{e}_1 = (1; 4; -4)$ ,  $\bar{e}_2 = (3; -1; -3)$ ,  $\bar{e}_3 = (-1; -3; 3)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (-2; 4; 0)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (1; 1; 1)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T_{ij}$ , найти координаты тензора  $T^1{}_2$  и  $T^3{}_1$ .

6. Основной базис  $\bar{e}_1 = (-1; -4; -3)$ ,  $\bar{e}_2 = (1; -2; -2)$ ,  $\bar{e}_3 = (-2; 3; 3)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (7; 2; 0)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (0; 0; 5)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T^i{}_j$ , найти координаты тензора  $T_{33}$  и  $T^{32}$ .

7. Основной базис  $\bar{e}_1 = (1; 0; 0)$ ,  $\bar{e}_2 = (-5; -4; -6)$ ,  $\bar{e}_3 = (-1; 3; -1)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (-8; 1; -9)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (-2; 0; 2)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T_i{}^j$ , найти координаты тензора  $T^{33}$  и  $T_{31}$ .

8. Основной базис  $\bar{e}_1 = (5; 4; 2)$ ,  $\bar{e}_2 = (1; -4; 4)$ ,  $\bar{e}_3 = (-1; 3; -3)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (6; 1; 5)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (-1; -1; 2)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T^{ij}$ , найти координаты тензора  $T^1{}_2$  и  $T^3{}_3$ .

9. Основной базис  $\bar{e}_1 = (1; -4; 3)$ ,  $\bar{e}_2 = (-1; 5; -4)$ ,  $\bar{e}_3 = (-4; 6; -5)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (-8; -3; 2)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (-4; 0; -1)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T_{ij}$ , найти координаты тензора  $T^3{}_3$  и  $T^3{}_2$ .

**10.** Основной базис  $\bar{e}_1 = (-1; 3; 4)$ ,  $\bar{e}_2 = (-2; 1; 1)$ ,  $\bar{e}_3 = (-3; 4; 6)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (4; -7; -7)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (2; 2; 2)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T^i_j$ , найти координаты тензора  $T_{13}$  и  $T^{23}$ .

**11.** Основной базис  $\bar{e}_1 = (-6; -2; 3)$ ,  $\bar{e}_2 = (-5; -3; 3)$ ,  $\bar{e}_3 = (2; 1; -1)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (8; -3; -2)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (-2; 3; 1)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T_i^j$ , найти координаты тензора  $T^{12}$  и  $T_{13}$ .

**12.** Основной базис  $\bar{e}_1 = (1; 5; -1)$ ,  $\bar{e}_2 = (4; 6; -5)$ ,  $\bar{e}_3 = (3; 6; -4)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (6; 7; -8)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (0; -1; 3)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T^{ij}$ , найти координаты тензора  $T_1^1$  и  $T_3^1$ .

**13.** Основной базис  $\bar{e}_1 = (1; 2; 1)$ ,  $\bar{e}_2 = (5; -1; 3)$ ,  $\bar{e}_3 = (0; 0; -2)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (-10; 3; -5)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (1; 4; -1)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T_{ij}$ , найти координаты тензора  $T_1^1$  и  $T_3^3$ .

**14.** Основной базис  $\bar{e}_1 = (3; 2; 2)$ ,  $\bar{e}_2 = (-2; 0; -1)$ ,  $\bar{e}_3 = (-3; 1; -1)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (-1; 5; 1)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (3; 0; -1)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T^i_j$ , найти координаты тензора  $T_{11}$  и  $T^{22}$ .

**15.** Основной базис  $\bar{e}_1 = (-1; -2; 4)$ ,  $\bar{e}_2 = (-1; 2; -1)$ ,  $\bar{e}_3 = (-6; 3; 5)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (-7; 2; 8)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (0; 5; -2)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T_i^j$ , найти координаты тензора  $T^{22}$  и  $T_{12}$ .

**16.** Основной базис  $\bar{e}_1 = (-2; -3; 0)$ ,  $\bar{e}_2 = (0; -2; 3)$ ,  $\bar{e}_3 = (1; 5; -5)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (-3; -7; 4)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (1; -4; 0)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T^{ij}$ , найти координаты тензора  $T_3^1$  и  $T_2^3$ .

**17.** Основной базис  $\bar{e}_1 = (-3; 2; -2)$ ,  $\bar{e}_2 = (-6; 4; -3)$ ,  $\bar{e}_3 = (-4; 1; 2)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (10; -5; 3)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (1; 2; 3)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T_{ij}$ , найти координаты тензора  $T_2^3$  и  $T_3^1$ .

**18.** Основной базис  $\bar{e}_1 = (4; 3; 3)$ ,  $\bar{e}_2 = (-5; -3; -1)$ ,  $\bar{e}_3 = (-5; -2; 2)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (3; 4; 8)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (3; 1; 2)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T^i_j$ , найти координаты тензора  $T_{13}$  и  $T^{23}$ .

**19.** Основной базис  $\bar{e}_1 = (0; -1; -2)$ ,  $\bar{e}_2 = (-4; -3; 1)$ ,  $\bar{e}_3 = (-5; -3; 4)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (5; 2; -6)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (-2; 4; 0)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T_i^j$ , найти координаты тензора  $T^{23}$  и  $T_{31}$ .

**20.** Основной базис  $\bar{e}_1 = (2; -2; -5)$ ,  $\bar{e}_2 = (5; -3; -3)$ ,  $\bar{e}_3 = (-6; 4; 5)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (1; 1; 7)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (-3; 1; 3)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T^{ij}$ , найти координаты тензора  $T^3_2$  и  $T_1^1$ .

**21.** Основной базис  $\bar{e}_1 = (-6; 0; 1)$ ,  $\bar{e}_2 = (2; 2; -3)$ ,  $\bar{e}_3 = (5; -1; 1)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (5; 5; -8)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (-2; -2; -2)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T_{ij}$ , найти координаты тензора  $T^1_3$  и  $T_1^2$ .

**22.** Основной базис  $\bar{e}_1 = (1; -1; -2)$ ,  $\bar{e}_2 = (3; -1; -3)$ ,  $\bar{e}_3 = (3; 3; 5)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (-1; 1; 4)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (5; 0; 1)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T^i_j$ , найти координаты тензора  $T_{12}$  и  $T^{32}$ .

**23.** Основной базис  $\bar{e}_1 = (6; -2; 1)$ ,  $\bar{e}_2 = (-1; -1; 4)$ ,  $\bar{e}_3 = (4; -2; 3)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (-4; 0; 3)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (-3; 1; 1)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T_i^j$ , найти координаты тензора  $T^{22}$  и  $T_{33}$ .

**24.** Основной базис  $\bar{e}_1 = (2; -6; 3)$ ,  $\bar{e}_2 = (0; -5; -1)$ ,  $\bar{e}_3 = (1; 1; 2)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (-3; -3; 6)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (-2; 0; -2)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T^{ij}$ , найти координаты тензора  $T^3_1$  и  $T^1_1$ .

25. Основной базис  $\bar{e}_1 = (-3; 2; -4)$ ,  $\bar{e}_2 = (-3; 1; -3)$ ,  $\bar{e}_3 = (4; -3; 5)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (-4; 7; -9)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (4; 1; 0)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T_{ij}$ , найти координаты тензора  $T^2_1$  и  $T^2_1$ .

26. Основной базис  $\bar{e}_1 = (4; -4; 1)$ ,  $\bar{e}_2 = (-1; 3; -1)$ ,  $\bar{e}_3 = (4; -5; 2)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (-5; 8; -3)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (1; -4; 0)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T^i_j$ , найти координаты тензора  $T_{31}$  и  $T^{33}$ .

27. Основной базис  $\bar{e}_1 = (-4; -5; 3)$ ,  $\bar{e}_2 = (1; -2; 2)$ ,  $\bar{e}_3 = (-5; -2; 0)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (-1; 3; -3)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (3; 2; 1)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T_i^j$ , найти координаты тензора  $T^{11}$  и  $T_{31}$ .

28. Основной базис  $\bar{e}_1 = (5; -5; -6)$ ,  $\bar{e}_2 = (-3; 0; 1)$ ,  $\bar{e}_3 = (3; -2; -3)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (5; -3; -4)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (-2; 1; 2)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T^{ij}$ , найти координаты тензора  $T^3_1$  и  $T^1_2$ .

29. Основной базис  $\bar{e}_1 = (3; -2; 3)$ ,  $\bar{e}_2 = (4; -1; 0)$ ,  $\bar{e}_3 = (-5; 2; -1)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (2; -5; 10)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (0; -3; 2)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T_{ij}$ , найти координаты тензора  $T^1_3$  и  $T^1_2$ .

30. Основной базис  $\bar{e}_1 = (-1; 4; 0)$ ,  $\bar{e}_2 = (-2; 5; -1)$ ,  $\bar{e}_3 = (-1; 6; 2)$ .

Вектор  $\bar{x}$  задан контравариантными координатами  $(x^1, x^2, x^3) = (-2; 0; -4)$ , вектор  $\bar{y}$  — ковариантными координатами  $(y_1, y_2, y_3) = (2; -3; 1)$ .

Тензор  $T$  задан матрицей  $T^i_j$ , найти координаты тензора  $T_{33}$  и  $T^{13}$ .

## Литература

1. Ефимов А.Н., Каракулин А.Ф., Кожухов И.Б. и др. / под ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. Сборник задач по математике для вузов. Ч. 1. М.: Физматлит, 2014. 288 с.
2. Келлер И.Э. Тензорное исчисление. СПб.: Лань, 2012. 188 с.
3. Речкалов В.Г. Векторная и тензорная алгебра для будущих физиков и техников. Челябинск: ИИУМЦ «Образование», 2008. 140 с.
4. Зенков А.В. Линейная алгебра и тензорное исчисление. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2010. 96 с.
5. Молчанов А.М. Математическое моделирование задач газодинамики и тепломассообмена. М.: Изд-во МАИ, 2013. 206 с.
6. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М.: Высшая школа, 1966. 251 с.
7. Коchin Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Изд-во Ленанд, 2017. 432 с.
8. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 264 с.
9. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление. М.: Высшая школа, 2001. 575 с.
10. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

## Содержание

Предисловие .....	3
1. Базис и координаты вектора в базисе. Переход к новому базису .....	4
2. Скалярное произведение векторов. Матрица Грама .....	8
3. Взаимный базис. Ковариантные координаты .....	10
4. Операции с векторами с использованием ковариантных координат .....	13
5. Матрица перехода от основного базиса к взаимному. Подъем и спуск индексов .....	16
6. Изменение взаимного базиса и ковариантных координат при изменении основного базиса .....	19
7. Линейные операторы. Виды матрицы линейного оператора .....	21
Задания для самоконтроля к пп. 1–7 .....	24
8. Диадное умножение векторов. Разложение линейного оператора по базисным диадам .....	25
9. Тензоры 2-го ранга как линейные операторы .....	31
10. Операции с тензорами 2-го ранга .....	33
11. Тензоры высших рангов .....	39
12. Главные значения (собственные значения) и главные направления (собственные векторы) тензора 2-го ранга. Инварианты. Теорема Гамильтона – Кэли .....	45
Задания для самоконтроля к пп. 8–12 .....	51
13. Пример решения задачи типового расчета .....	51
Типовой расчет .....	55
Литература .....	62

Библиотека БГУИР  
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
Белорусский национальный технический университет

*Учебное издание*

**Неклюдов Алексей Владимирович  
Калинкин Александр Вячеславович**

## **Основы тензорной алгебры**

**Редактор Н.Л. Пахомова**

**Художник Я.М. Асинкристова**

**Корректор Е.А. Моисеева**

**Компьютерная графика Т.Ю. Кутузовой**

**Компьютерная верстка Г.Ю. Молотковой**

**Оригинал-макет подготовлен  
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана**

**В оформлении использованы шрифты**

**Студии Артемия Лебедева.**

**Подписано в печать 21.10.2021. Формат 60×90/16.**

**Усл. печ. л. 4,0. Тираж 129 экз. Изд. № 938-2020.**

**Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
105005, г. Москва, улица 2-я Бауманская, д. 5, к. 1.**

**info@bmstu.press**

**<https://bmstu.press>**

**Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.**

**105005, г. Москва, улица 2-я Бауманская, д. 5, к. 1.**

**[baumanprint@gmail.com](mailto:baumanprint@gmail.com)**

**Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»**

Факультет «Фундаментальные науки»  
Кафедра «Высшая математика»

Представлены необходимые теоретические сведения и методические указания к решению задач по тензорному исчислению. Приведены соответствующие примеры, даны условия вариантов типового расчета.

**«Политехнический молодежный журнал»** МГТУ им. Н.Э. Баумана приглашает студентов, магистрантов, аспирантов и молодых преподавателей (специалистов) опубликовать свои статьи.

- Все публикации бесплатные
- Статьи индексируются в РИНЦ
- Каждой статье присваивается DOI

Полная информация о журнале, а также выпуски текущих номеров представлены на сайте [www.ptsj.ru](http://www.ptsj.ru)

МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
Главный учебный корпус,  
ауд. 298

+7 (499) 265-37-97  
[vk.com/ptsjournal](https://vk.com/ptsjournal)  
[ptsj@bmstu.ru](mailto:ptsj@bmstu.ru)

ISBN 978-5-7038-5720-5



[bmstu.press](http://bmstu.press)

