А. В. Калинкин (Москва, МГТУ). **Уравнения марковского процесса, уравнения формальной кинетики и уравнения движения твердого тела около неподвижной точки.**

1. Пусть однородный во времени марковский процесс класса [4] $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_6(t))$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $\mathbf{N}^6 = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_6),\ \alpha_1, \ldots, \alpha_6 = 0, 1, \ldots\}$ задан следующей схемой взаимодействий:

$$
\begin{array}{lll}
T_2 + T_3 \to T_1 + T_2 + T_3; & T_1 + T_3 \to T_1 + T_2 + T_3; & T_1 + T_2 \to T_1 + T_2 + T_3; \\
T_3 + T_5 \to T_3 + T_4 + T_5; & T_1 + T_6 \to T_1 + T_5 + T_6; & T_2 + T_4 \to T_2 + T_4 + T_6; \\
T_2 + T_6 \to T_2 + T_4 + T_6; & T_3 + T_4 \to T_3 + T_4 + T_5; & T_1 + T_5 \to T_1 + T_5 + T_6; \\
T_4 \to T_2 + T_4, T_3 + T_4; & T_5 \to T_1 + T_5, T_3 + T_5; & T_6 \to T_1 + T_6, T_2 + T_6.
\end{array} \tag{1}
$$

Событие $\{\xi(t) = (\beta_1, \ldots, \beta_6)\}$ интерпетируется как наличие β_1 частиц типа T_1, ..., β_6 частиц типа T_6.

Вторая (прямая) система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей $P_{\alpha\beta}(t)$, $\beta \in \mathbf{N}^6$, при помощи многомерной производящей функции $F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = \sum_{\beta \in \mathbf{N}^6} P_{\alpha\beta}(t)\, s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2} s_3^{\beta_3} s_4^{\beta_4} s_5^{\beta_5} s_6^{\beta_6}$ ($|s_i| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, 6$) записывается в виде линейного уравнения в частных производных второго порядка [3], [4] ($\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, 12$; $p_2^4 \geqslant 0$, $p_3^4 \geqslant 0$, $p_2^4 + p_3^4 = 1$; $p_1^5 \geqslant 0$, $p_3^5 \geqslant 0$, $p_1^5 + p_3^5 = 1$; $p_1^6 \geqslant 0$, $p_2^6 \geqslant 0$, $p_1^6 + p_2^6 = 1$):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} &= \lambda_1 (s_1 s_2 s_3 - s_2 s_3) \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial s_2 \partial s_3} + \lambda_2 (s_1 s_2 s_3 - s_1 s_3) \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial s_1 \partial s_3} + \lambda_3 (s_1 s_2 s_3 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial s_1 \partial s_2} \\
&+ \lambda_4 (s_3 s_4 s_5 - s_3 s_5) \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial s_3 \partial s_5} + \lambda_5 (s_1 s_5 s_6 - s_1 s_6) \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial s_1 \partial s_6} + \lambda_6 (s_2 s_4 s_6 - s_2 s_4) \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial s_2 \partial s_4} \\
&+ \lambda_7 (s_2 s_4 s_6 - s_2 s_6) \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial s_2 \partial s_6} + \lambda_8 (s_3 s_4 s_5 - s_3 s_4) \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial s_3 \partial s_4} \\
&+ \lambda_9 (s_1 s_5 s_6 - s_1 s_5) \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial s_1 \partial s_5} + \lambda_{10} (p_2^4 s_2 s_4 + p_3^4 s_3 s_4 - s_4) \frac{\partial F_\alpha}{\partial s_4} \\
&+ \lambda_{11} (p_1^5 s_1 s_5 + p_3^5 s_3 s_5 - s_5) \frac{\partial F_\alpha}{\partial s_5} + \lambda_{12} (p_1^6 s_1 s_6 + p_2^6 s_2 s_6 - s_6) \frac{\partial F_\alpha}{\partial s_6}
\end{aligned} \tag{2}
$$

с начальным условием $F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} s_3^{\alpha_3} s_4^{\alpha_4} s_5^{\alpha_5} s_6^{\alpha_6}$.

2. Кинетику химической реакции описывают количеством $x_i(t)$ реагента типа T_i в момент времени t; в случае бимолекулярной схемы (1) функции $x_1(t), \ldots, x_6(t)$ удовлетворяют, согласно закону действующих масс, системе обыкновенных дифференциальных уравнений [2]:

$$
\begin{cases}
\dot x_1 = \lambda_1 x_2 x_3 + \lambda_{12} p_1^6 x_6 + \lambda_{11} p_1^5 x_5 \\
\dot x_2 = \lambda_2 x_1 x_3 + \lambda_{10} p_2^4 x_4 + \lambda_{12} p_2^6 x_6 \\
\dot x_3 = \lambda_3 x_1 x_2 + \lambda_{11} p_3^5 x_5 + \lambda_{10} p_3^4 x_4 \\
\dot x_4 = \lambda_4 x_3 x_5 + \lambda_7 x_2 x_6 \\
\dot x_5 = \lambda_5 x_1 x_6 + \lambda_8 x_3 x_4 \\
\dot x_6 = \lambda_6 x_2 x_4 + \lambda_9 x_1 x_5
\end{cases} \tag{3}
$$

с начальными условиями $x_1(0) = x_1^0$, ..., $x_6(0) = x_6^0$.

Уравнения формальной кинетики (3) дают детерминированное приближение для процесса $\xi(t)$ при большом начальном числе частиц (полагают $\boldsymbol{\alpha} = (n\alpha_1, \ldots, n\alpha_6)$ и $n \to \infty$ [3]). Приближение системы (3) для средних $A_i(t) = \mathbf{M}\,\xi_i(t) = (\partial F_\alpha / \partial s_i)|_{s_1 = 1, \ldots, s_6 = 1}$, $i = 1, \ldots, 6$, получается из уравнения (2) дифференцированием.

3. Система уравнений (3) совпадает, с точностью до значений числовых коэффициентов, с системой нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки [1]:

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr &= Mg\,(y_0\gamma'' - z_0\gamma'), \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp &= Mg\,(z_0\gamma - x_0\gamma''), \\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq &= Mg\,(x_0\gamma' - y_0\gamma), \\ \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'', \quad \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma, \quad \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma', \end{aligned} \tag{4}$$

где p, q, r, γ, γ', γ'' — функции времени t, постоянные A, B, C, x_0, y_0, z_0 характеризуют распределение массы тела относительно некоторой выбранной системы координат (M — масса тела и g — ускорение силы тяжести).

4. В [5] для некоторых уравнений вида (2) выявлены положения, характерные при рассмотрении систем (3) и (4): решения выражаются через эллиптические функции; комплексификация времени. Пример процесса (1) показывает сложность задачи построения явных решений уравнений Колмогорова для марковских процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: ГИТТЛ, 1953, 288 с.
2. *Эмануэль Н. М.*, *Кнорре Д. Г.* Курс химической кинетики. М.: Высшая школа, 1974, 400 с.
3. *Леонтович М. А.* Основные уравнения кинетической теории газов с точки зрения теории случайных процессов. — Ж. эксперим. теор. физ., 1935, т. 5, в. 3–4, с. 211–231. (Перепечатано: *М. А. Леонтович.* Избранные труды. Теоретическая физика. М.: Наука, 1985, с. 151–171.)
4. *Севастьянов Б. А.*, *Калинкин А. В.* Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц. — Докл. АН СССР, 1982, т. 264, в. 2, с. 306–308.
5. *Калинкин А. В.* Марковские процессы с взаимодействием. — Успехи матем. наук, 2001, т. 56 (в печати).