А. В. Калинкин (Москва, МГТУ). **Курс теории марковских процессов.**

В Московском государственном техническом университете им. Н. Э. Баумана с 1998/1999 учебного года читается обязательный семестровый курс «Дополнительные главы теории случайных процессов» для студентов специальности «Прикладная математика» факультета «Фундаментальные науки». В учебном курсе излагаются основы аналитического метода для случайных процессов с дискретными состояниями. Для решения уравнений Колмогорова для переходных вероятностей марковских процессов используются методы обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, интегральные преобразования. Даются примеры прикладных задач, возникших в различных областях естествознания и техники на основе теории случайных процессов. Программа курса включает в себя следующие разделы.

Целочисленные случайные величины и их производящие функции. Факториальные моменты. Мультипликативное свойство. Экспоненциальные производящие функции. Многомерные производящие функции.

Переходные вероятности однородных марковских процессов со счетным множеством состояний $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Инфинитезимальные характеристики и их вероятностная интерпретация. Классификация состояний. Вывод первой и второй (линейных) систем дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей.

Процессы гибели и размножения, вложенная цепь Маркова для которых является случайным блужданием. Оператор обобщенного дифференцирования Гельфонда–Леонтьева. Свертка с помощью производящих функций первой и второй систем уравнений для переходных вероятностей. Асимптотическое поведение средних для процессов чистого размножения пуассоновского, степенного и линейного типов. Процессы квадратичного и полиномиального типов.

Ветвящийся процесс и его уравнения. Вывод свойства ветвления для переходных вероятностей. Вывод нелинейного дифференциального уравнения Колмогорова. Интерпретация ветвящегося процесса через частицы. Приложения в физике. Цепная ядерная реакция размножения нейтронов $T \to kT$. Докритические, критические, надкритические процессы и вероятностный смысл параметра критичности. Вычисление вероятности вырождения ветвящегося процесса, исходя из стационарного первого уравнения.

Структура множества марковских процессов при дискретном фазовом пространстве $\mathbf{N}^n$. Марковские процессы с взаимодействием. Второе уравнение для многомерной производящей функции переходных вероятностей. Конструктивное описание как процессов с взаимодействием частиц. Схема взаимодействий. Иммиграция частиц, финальные частицы. Ветвящиеся процессы с взаимодействием. Первое и второе уравнения для экспоненциальной производящей функции и производящей функции переходных вероятностей (уравнения в частных производных). Ветвящиеся процессы. Свойство ветвления и нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Приложения в формальной химической кинетике. Виды кинетических уравнений. Детерминированная и вероятностная модели мономолекулярной реакции $T_1 \to T_2$. Явное решение уравнений Колмогорова. Предельная теорема при большом начальном числе частиц. Бимолекулярная реакция $T_1 + T_2 \to T_3$ и закон действующих масс. Бимолекулярная реакция $2T \to T$. Приложения в экологии. Детерминированная и вероятностная модели системы «хищник-жертва». Применение статистического моделирования. Стохастическая модель эпидемии. Пороговая предельная теорема для финальных вероятностей. Приложения в технике. Вычисление стационарного распределения для системы массового обслуживания $0 \to T$, $T \to 0$.

Сведения из истории развития теории случайных процессов. Макроскопический

и микроскопический, детерминистический и стохастический, непрерывный и дискретный подходы при построении математических моделей сложных систем. Перечисление основных схем взаимодействий, задача классификации схем. Проблема вывода третьего (нелинейного) уравнения для специальных классов марковских процессов.

Для более глубокого освоения специального курса студентами выполняется типовой расчет по решению уравнений Колмогорова для марковских процессов. Методические материалы по дисциплине отражены в учебном пособии [5]. Содержание представляемого курса определено в основном монографиями и работами [1–4], [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гихман И. И.*, *Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977, 568 с.
2. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
3. *Баруча–Рид А. Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969, 512 с.
4. *Севастьянов Б. А.*, *Калинкин А. В.* Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц. — Докл. АН СССР, 1982, т. 264, в. 2, с. 306–308.
5. *Калинкин А. В.* Случайные процессы в естествознании: дискретное фазовое пространство. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999, 40 с. (Препринт архивирован: http://www.bmstu.ru/facult/fn/kalin/ branching/nature.zip.)
6. *Калинкин А. В.* Марковские процессы с взаимодействием. — Успехи матем. наук, 2001, т. 56 (в печати).