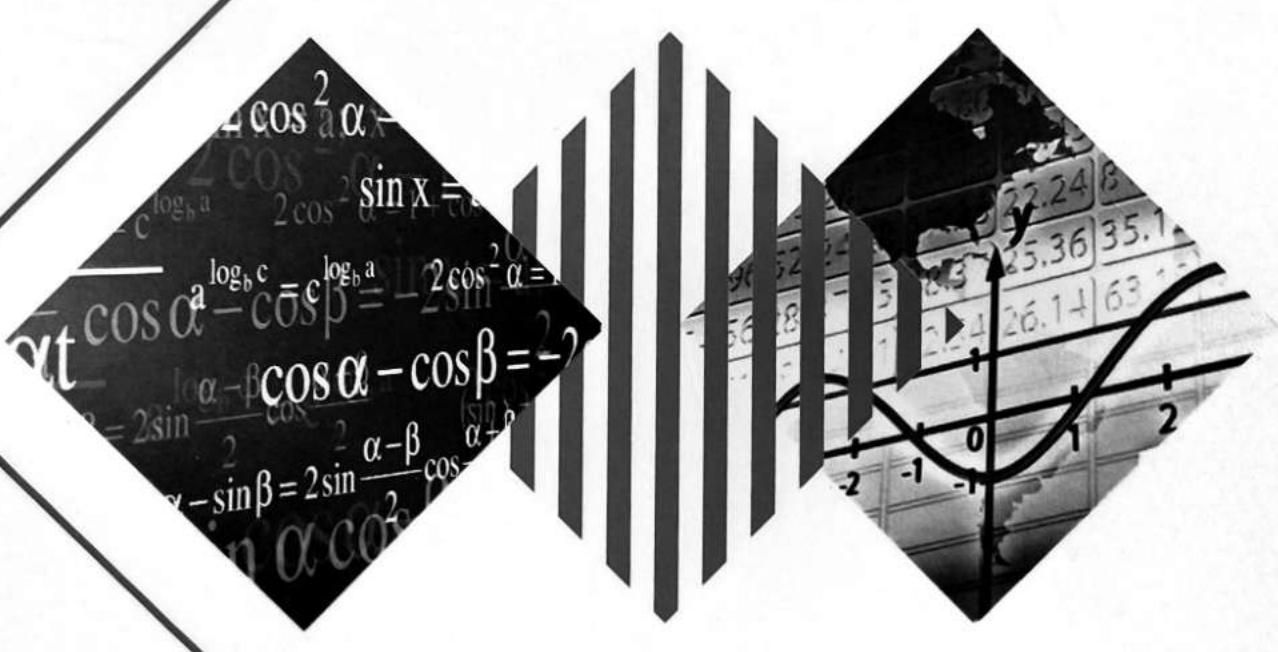


УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

А.В. Калинкин, И.В. Павлов

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Методические указания
к выполнению типового расчета



ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

А.В. Калинкин, И.В. Павлов

Основы математической теории надежности

*Методические указания
к выполнению типового расчета*



Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н. Э. Баумана

2017

УДК 519.248+519.873

ББК 30.14

К27

Издание доступно в электронном виде на портале ebooks.bmstu.ru
по адресу: <http://ebooks.bmstu.ru/catalog/109/book1600.html>

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Высшая математика»

*Рекомендовано Редакционно-издательским советом
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебно-методического пособия*

Калинкин, А. В.

К27 Основы математической теории надежности : методические
указания к выполнению типового расчета / А. В. Калинкин,
И. В. Павлов. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана,
2017. — 54 [2] с.

ISBN 978-5-7038-4609-4

Представлены необходимые теоретические сведения и методические
указания к решению задач по математическим методам теории надеж-
ности. Рассмотрены варианты задач типового расчета, для решения ко-
торых приведены справочные данные в таблицах.

Для студентов факультетов «Машиностроительные технологии»,
«Робототехника и комплексная автоматизация», «Специальное ма-
шиностроение», «Фундаментальные науки», обучающихся в МГТУ
им. Н.Э. Баумана.

УДК 519.248+519.87

ББК 30.14

Учебное издание

Калинкин Александр Вячеславович, Павлов Игорь Валерианович

Основы математической теории надежности

Подписано в печать 01.03.2017. Формат 60×90/16.

Усл. печ. л. 3,5. Тираж 100 экз. Изд. № 077-2016. Заказ 171

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5, стр. 1.
press@bmstu.ru www.baumanpress.ru

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5, стр. 1.
baumanprint@gmail.com

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017
© Оформление. Издательство
МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017

ISBN 978-5-7038-4609-4

Предисловие

Методические указания по курсу «Основы математической теории надежности» состоят из четырех глав: показатели надежности элемента; расчет надежности невосстанавливаемых систем; расчет надежности восстанавливаемых систем; статистическое оценивание показателей надежности. Соответствуют программе подготовки магистров факультета «Фундаментальные науки» по специальности «Прикладная математика».

Цель методических указаний — способствовать получению студентами и аспирантами ряда компетенций, необходимых для исследования и расчета основных показателей надежности современных сложных технических систем.

Критериями достижения указанной цели являются усвоение учащимися базовых понятий математической теории надежности, определяемых в данном курсе, и решение предлагаемых задач типового расчета как аналитическими, так и вычислительными методами.

1. Показатели надежности элемента

1.1. Основные понятия

Под *изделием* в зависимости от поставленной задачи можно понимать отдельную деталь, кинематическую пару, узел, агрегат, машину в целом или систему машин.

Работоспособность — состояние изделия, при котором оно способно выполнять заданные функции, сохраняя значения данных параметров в пределах, установленных нормативно-технической документацией.

Надежность — способность изделия сохранять во времени свою работоспособность при определенных условиях эксплуатации.

Безотказность — способность изделия непрерывно сохранять работоспособность в течение некоторого интервала времени в определенных условиях эксплуатации.

Отказ — событие, заключающееся в полной или частичной утрате работоспособности изделия.

Долговечность — способность изделия сохранять работоспособность в течение всего периода эксплуатации при установленной системе технического обслуживания и ремонта.

Ремонтопригодность — приспособленность изделия к предупреждению, обнаружению и устранению отказов.

1.2. Показатели надежности невосстанавливаемого элемента

Невосстанавливаемый элемент работает или хранится до наступления отказа, после чего его свойства не восстанавливаются. Отказ представляет собой случайное событие. Время возникновения отказа ξ , где $\xi \geq 0$, является случайной величиной, ξ — непрерывная случайная величина. Далее всегда предполагаем, что написанные производные существуют, а интегралы — сходятся.

Функция распределения $F(t)$ — вероятность того, что момент отказа ξ элемента наступит до момента времени t (здесь $t \geq 0$),

$$F(t) = \mathbf{P}\{\xi < t\}, \quad F(0) = 0, \quad F(+\infty) = 1.$$

Плотность распределения вероятностей

$$f(t) = F'(t), \quad F(t) = \int_0^t f(t)dt.$$

Вероятность безотказной работы $P(t)$ при $t \geq 0$ — вероятность такого события, когда за установленный промежуток времени $[0; t]$ изделие не откажет:

$$P(t) = \mathbf{P}\{\xi \geq t\} = 1 - \mathbf{P}\{\xi < t\} = 1 - F(t) = \int_t^\infty f(t)dt.$$

Средняя наработка на отказ (средний ресурс)

$$T = \mathbf{M}\xi = \int_0^\infty tf(t)dt.$$

Из определения следует

$$T = \int_0^\infty t dF(t) = - \int_0^\infty t dP(t) = -tP(t)|_0^\infty + \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty P(t)dt.$$

Интенсивность отказа $\lambda(t)$ — вероятность того, что изделие, не отказавшее до момента времени t , откажет в последующую единицу времени:

$$\lambda(t) = -\frac{P'(t)}{P(t)} = \frac{f(t)}{P(t)}.$$

Выражаем

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}.$$

Функция ресурса имеет вид

$$\Lambda(t) = -\ln P(t) = \int_0^t \lambda(t)dt.$$

Плотность распределения $\phi(x)$ и *функция распределения* $\Phi(x)$ *стандартного нормального закона*

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Далее приведены примеры соответствия плотности вероятностных распределений и вероятности безотказной работы в зависимости от используемого закона распределения.

1. Показательный (экспоненциальный) закон распределения, где $\lambda > 0$,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{при } t \geq 0, \end{cases} \quad P(t) = e^{-\lambda t}, \quad M\xi = \frac{1}{\lambda}.$$

2. Нормальный закон распределения, где $-\infty < m < \infty$ и $\sigma > 0$,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t-m)^2/(2\sigma^2)}, \quad P(t) = 1 - \Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right), \quad M\xi = m.$$

3. Усеченный нормальный закон, где $-\infty < m < \infty$ и $\sigma > 0$,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(1 - \Phi(-m/\sigma))} e^{-(t-m)^2/(2\sigma^2)} & \text{при } t \geq 0; \end{cases}$$

$$P(t) = \frac{1 - \Phi((t-m)/\sigma)}{1 - \Phi(-m/\sigma)}, \quad M\xi = m + \frac{2\sigma\phi(m/\sigma)}{1 - \Phi(-m/\sigma)}.$$

4. Распределение Вейбулла — Гнеденко, где $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ \lambda \alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha} & \text{при } t \geq 0, \end{cases} \quad P(t) = e^{-\lambda t^\alpha}, \quad M\xi = \frac{\Gamma(1+1/\alpha)}{\lambda^{1/\alpha}}.$$

5. Распределение Рэлея, где $\sigma > 0$,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ \frac{t}{\sigma^2} e^{-t^2/(2\sigma^2)} & \text{при } t \geq 0, \end{cases} \quad P(t) = e^{-t^2/(2\sigma^2)}, \quad M\xi = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

6. Гамма-распределение, где $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} & \text{при } t \geq 0, \end{cases} \quad P(t) = \int_t^\infty f(t) dt, \quad M\xi = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Графики плотности распределения соответствующих законов представлены на рис. 1.1 — 1.6.

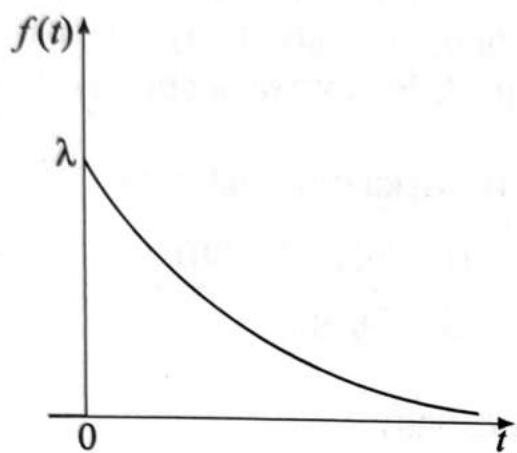


Рис. 1.1

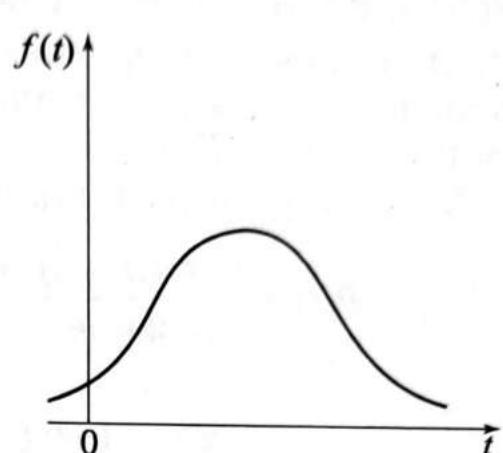


Рис. 1.2

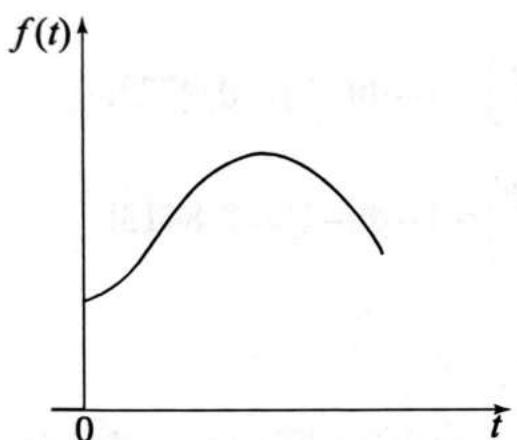


Рис. 1.3

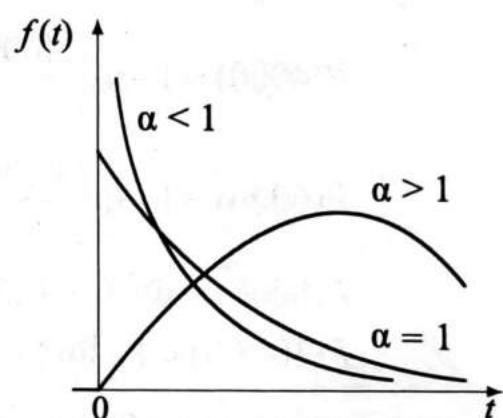


Рис. 1.4

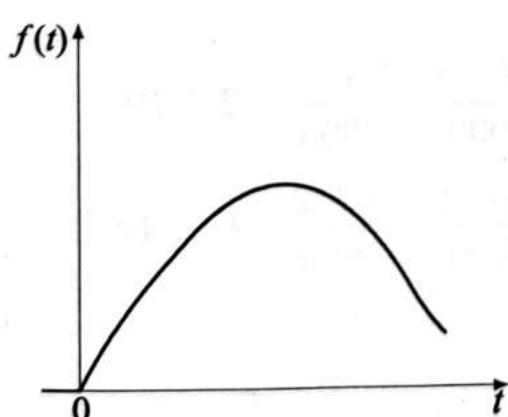


Рис. 1.5

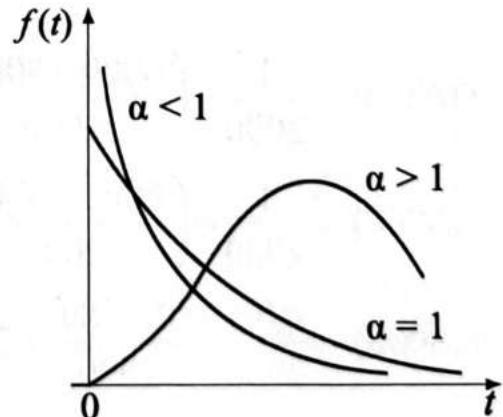


Рис. 1.6

Пример 1. Предположим, что время работы элемента до отказа подчиняется усеченному нормальному закону с параметрами $m = 8000$ ч, $\sigma = 2000$ ч. Вычислить показатели надежности $P(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$ для значений $t_1 = 4000$, $t_2 = 6000$, $t_3 = 8000$, $t_4 = 10000$ ч. Построить графики указанных функций. Рассчитать среднюю наработку на отказ T , ч.

Решение. Вычисляем вероятность безотказной работы

$$P(t) = \frac{1 - \Phi((t - m) / \sigma)}{1 - \Phi(-m / \sigma)} = \frac{1 - \Phi((t - 8000) / 2000)}{1 - \Phi(-4)} = \\ \approx \frac{1 - \Phi((t - 8000) / 2000)}{1}.$$

Здесь значение $\Phi(-4) \approx 0,000$ и все последующие значения функции $\Phi(x)$ берем из табл. П.2:

$$P(4000) \approx 1 - \Phi\left(\frac{4000 - 8000}{2000}\right) = 1 - \Phi(-2) \approx 0,9772;$$

$$P(6000) \approx 1 - \Phi\left(\frac{6000 - 8000}{2000}\right) = 1 - \Phi(-1) \approx 0,8413;$$

$$P(8000) \approx \Phi(0) = 0,5;$$

$$P(10000) \approx 1 - \Phi(1) \approx 0,1587.$$

Далее получаем $1 - \Phi(-m / \sigma) = 1 - \Phi(-8000 / 2000) = 1 - \Phi(-4) \approx 1$ и рассчитываем $f(t)$, 1/ч, по приближенной формуле $f(t) \approx \frac{1}{\sigma} \varphi((t - m) / \sigma)$:

$$f(4000) \approx \frac{1}{2000} \varphi\left(\frac{4000 - 8000}{2000}\right) = \frac{\varphi(-2)}{2000} \approx \frac{0,054}{2000} = 2,7 \cdot 10^{-5};$$

$$f(6000) \approx \frac{1}{2000} \varphi\left(\frac{6000 - 8000}{2000}\right) = \frac{\varphi(-1)}{2000} \approx \frac{0,242}{2000} = 12,1 \cdot 10^{-5};$$

$$f(8000) \approx \frac{\varphi(0)}{2000} \approx \frac{0,3989}{2000} \approx 2 \cdot 10^{-4};$$

$$f(10000) \approx \frac{\varphi(1)}{2000} \approx 12,1 \cdot 10^{-5}.$$

Интенсивность отказа $\lambda(t)$, 1/ч, рассчитываем по формуле $\lambda(t) = f(t) / P(t)$:

$$\lambda(4000) = \frac{f(4000)}{P(4000)} \approx \frac{2,7 \cdot 10^{-5}}{0,9772} \approx 2,76 \cdot 10^{-5};$$

$$\lambda(6000) = \frac{f(6000)}{P(6000)} \approx \frac{2,1 \cdot 10^{-5}}{0,8413} \approx 14,4 \cdot 10^{-5};$$

$$\lambda(8000) \approx \frac{2 \cdot 10^{-4}}{0,5} \approx 40 \cdot 10^{-5};$$

$$\lambda(10\,000) \approx \frac{12,1 \cdot 10^{-5}}{0,1587} \approx 76 \cdot 10^{-5}.$$

Графики показателей надежности в зависимости от времени представлены на рис. 1.7–1.9.

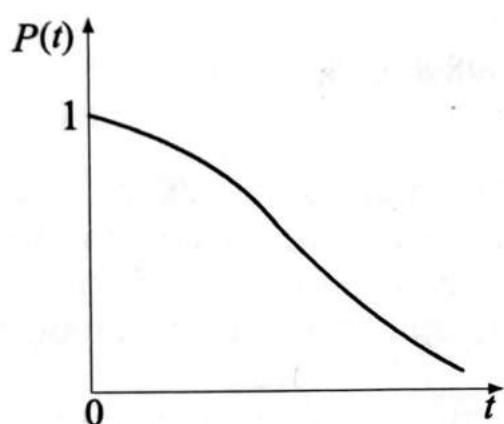


Рис. 1.7

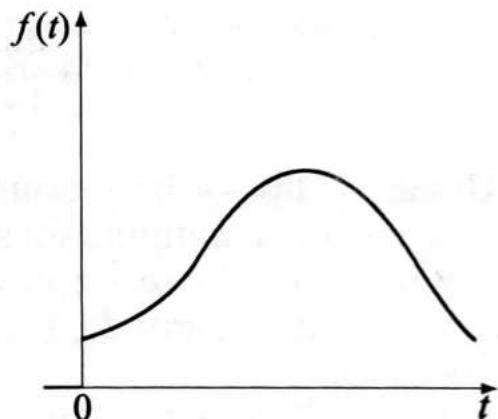


Рис. 1.8

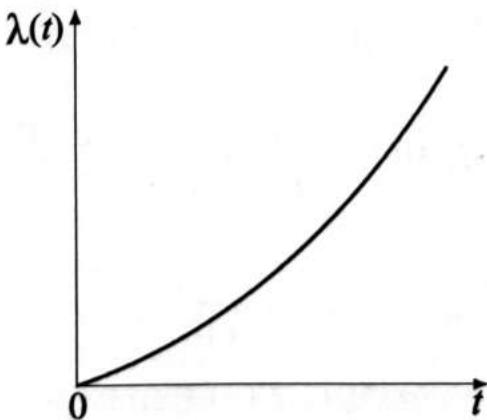


Рис. 1.9

Среднюю наработку на отказ вычисляем по формуле

$$T = \int_0^\infty t f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(1-\Phi(m/\sigma))} \int_0^\infty t e^{-(t-m)^2/(2\sigma^2)} dt.$$

Делаем замену переменных $v = (t - m) / \sigma$ и получаем T , ч:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-\Phi(-m/\sigma))} \int_{-m/\sigma}^\infty (m + \sigma v) e^{-v^2/2} dv = \\ &= m + \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}(1-\Phi(-m/\sigma))} e^{-m^2/(2\sigma^2)} = \\ &= m + \frac{2\sigma\phi(m/\sigma)}{1-\Phi(-m/\sigma)} = 8000 + \frac{4000\phi(8000/2000)}{1-\Phi(-8000/2000)} = \\ &= 8000 + \frac{4000\phi(4)}{1-\Phi(-4)} \approx 8000,04. \end{aligned}$$

Пример 2. Время безотказной работы гироскопического устройства с шарикоподшипниками в осях ротора гироскопа подчиняется закону Вейбулла с параметрами $\alpha = 1,5$, $\lambda = 10^{-4}$ 1/ч. Вычислить показатели надежности $P(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$ при $t = 100$ ч и среднюю наработку T , ч.

Решение. Рассчитываем показатели надежности следующим образом:

$$P(t) = \exp\{-\lambda t^\alpha\}, \quad P(100) = \exp\{-10^{-4} \cdot 100^{1,5}\} \approx 0,9;$$

$$f(t) = \lambda \alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha}, \quad f(100) \approx 10^{-4} \cdot 1,5 \cdot 100^{0,5} \cdot 0,9 \approx 1,35 \cdot 10^{-3};$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}, \quad \lambda(100) = \frac{f(100)}{P(100)} \approx \frac{1,35 \cdot 10^{-3}}{0,9} \approx 1,5 \cdot 10^{-3};$$

$$T = \frac{\Gamma(1+1/\alpha)}{\lambda^{1/\alpha}}, \quad T = \frac{\Gamma(1+1/1,5)}{(10^{-4})^{1/1,5}} \approx \frac{\Gamma(1,67)}{10^{-8/3}}.$$

Значение гамма-функции $\Gamma(x)$ берем из табл. П.1, $\Gamma(1,67) \approx 0,9033$. Получаем $T \approx 0,9033/10^{-8/3} \approx 419,2$.

2. Расчет надежности невосстанавливаемых систем

2.1. Структурная схема надежности

Сложная система представляет собой устройство, предназначенное для выполнения заданных функций, которое может быть разделено на элементы (части). Каждый из этих элементов выполняет определенные функции и взаимодействует с другими элементами системы. *Система* — устройство, состоящее из элементов (частей), надежность которых уже задана.

Элемент представляет собой часть сложной системы, характеризуемый своими входными и выходными параметрами. *Элемент* — устройство, надежность которого изучают вне связи с надежностью составляющих его частей.

Далее предположим, что элементы отказывают *независимо* друг от друга, т. е. отказ любого элемента или любой группы элементов не изменяет вероятности отказа элемента.

В данном разделе рассмотрим работу системы до ее первого отказа, т. е. *невосстанавливаемую систему*. Пусть система состоит из n элементов, вероятности безотказной работы которых $P_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, известны. Требуется выразить вероятность безотказной работы системы $P(t)$ через вероятности $P_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, безотказной работы ее элементов. Для такого расчета систему представляют в виде структурной схемы.

Структурная схема надежности (ССН) — графическое представление системы в виде схемы из элементов. Группу элементов изображают соединенной *последовательно*, если отказ любого из них приводит к неработоспособности всей группы, и соединенной *параллельно*, если отказ абсолютно всех элементов группы приводит к неработоспособности этой группы.

Например в различных гидравлических системах подачи топлива для повышения пропускной способности, долговечности или надежности используют параллельное или последовательное соединение двух фильтрующих элементов.

Отказ фильтрующего элемента обычно происходит по двум основным причинам — засорение или разрыв фильтрующей перегородки (сетки, ткани, пористой керамики, слоя зернистого материала и т. д.).

В случае засорения структурная схема соответствует конструктивной схеме системы. При последовательном соединении засорение любого из фильтров приводит к отказу системы, при параллельном соединении в случае засорения одного из фильтров весь поток жидкости пойдет через второй фильтр и отказа системы не произойдет, хотя ее характеристики изменятся.

В случае отказа из-за разрыва структурная схема противоположна конструктивной. При параллельном соединении разрыв перегородки в любом из фильтров приведет к прорыву неочищенной жидкости, т. е. в системе произойдет отказ, при последовательном соединении система останется работоспособной, хотя ее параметры изменятся. Данные утверждения можно представить в виде следующей таблицы.

Конструктивная схема	Структурная схема надежности	
	Засорение сетки	Разрыв сетки

Соответственно в зависимости от схемы соединения и рассматриваемого вида отказа параметры надежности рассчитывают по разным структурным схемам.

2.2. Расчет надежности при последовательном соединении элементов

Для безотказной работы системы из n элементов с последовательным соединением (рис. 2.1) необходимо, чтобы каждый элемент работал бесперебойно в течение установленного времени t .



Рис. 2.1

Поскольку отказы элементов являются независимыми событиями, то вероятность безотказной работы такой системы

$$P(t) = P_1(t)P_2(t)\dots P_n(t) = \prod_{i=1}^n P_i(t). \quad (2.1)$$

Для n элементов с одинаковой надежностью получаем $P(t) = P_1^n(t)$.

При последовательном соединении вероятность безотказной работы уменьшается. Система с последовательным соединением, состоящая из элементов высокой надежности, может обладать низкой надежностью ввиду их большого числа.

2.3. Расчет надежности при параллельном соединении элементов

Полный отказ системы из n элементов с параллельным соединением (рис. 2.2) наступает только тогда, когда отказывают все входящие в систему элементы.

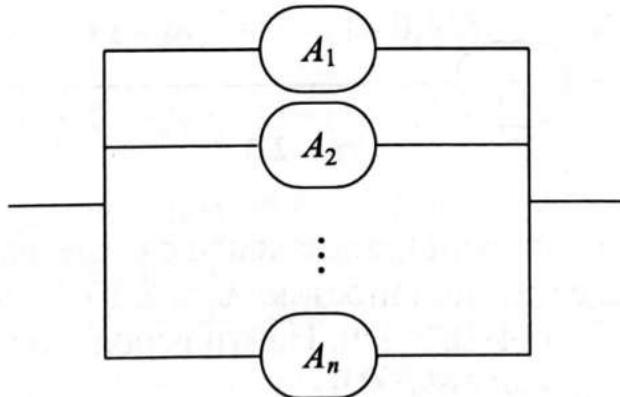


Рис. 2.2

Поскольку отказы элементов являются событиями независимыми, то вероятность совместного появления всех отказов

$$F(t) = F_1(t)F_2(t)\dots F_n(t) = \prod_{i=1}^n F_i(t).$$

Соответственно вероятность безотказной работы системы

$$P(t) = 1 - F(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_i(t)). \quad (2.2)$$

При параллельном соединении вероятность безотказной работы увеличивается. Высоконадежные системы можно создавать из элементов с низкой надежностью, применяя *резервирование*, т. е. дублируя малонадежные элементы.

2.4. Примеры расчета надежности невосстанавливаемых систем

Надежность сложных ССН рассчитывают с использованием стандартных формул теории вероятностей. Приведем примеры расчета надежности параллельно-последовательных ССН.

Пример 3. Данна ССН системы из четырех элементов A_1, A_2, A_3, A_4 (рис. 2.3).

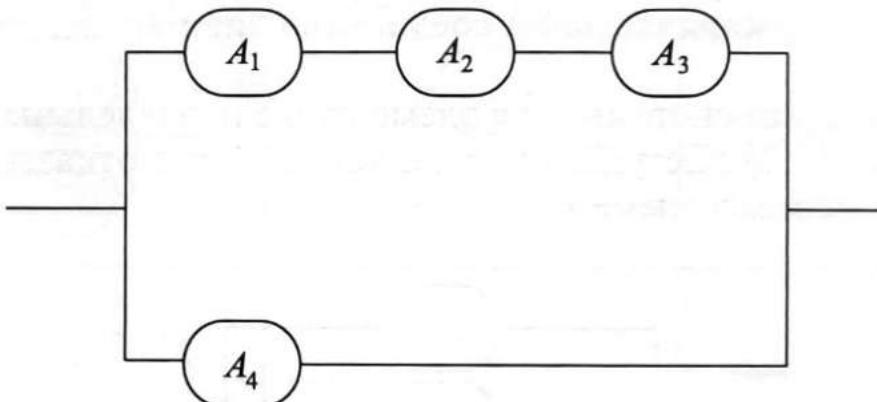


Рис. 2.3

Элементы имеют экспоненциальное распределение времени безотказной работы с интенсивностью $\lambda_1 = 5 \cdot 10^{-5}$ 1/ч, $\lambda_2 = 9 \cdot 10^{-5}$ 1/ч, $\lambda_3 = 3 \cdot 10^{-5}$ 1/ч, $\lambda_4 = 4 \cdot 10^{-5}$ 1/ч. Найти вероятность безотказной работы системы $P(t)$ при $t = 360$ ч.

Решение. По формуле (2.1) рассчитываем

$$P^{(1)}(t) = P_1(t)P_2(t)P_3(t) = e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 t}e^{-\lambda_3 t} = e^{-(5+9+3)10^{-5}t} = e^{-17 \cdot 10^{-5}t};$$

$$P^{(1)}(360) = e^{-17 \cdot 10^{-5} \cdot 360} \approx 0,9407.$$

Вычисляем $P_4(360) = e^{-\lambda_4 t} = e^{-4 \cdot 10^{-5} \cdot 360} \approx 0,9857$.

Воспользуемся формулой (2.2):

$$P(t) = 1 - (1 - P^{(1)}(t))(1 - P_4(t));$$

$$P(360) \approx 1 - (1 - 0,9407)(1 - 0,9857) \approx 0,9992.$$

Пример 4. Данна ССН системы из шести элементов $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ (рис. 2.4). Вероятность безотказной работы элементов на некотором интервале времени составляет $p_1 = 0,95, p_2 = 0,85, p_3 = 0,85, p_4 = 0,75, p_5 = 0,75, p_6 = 0,75$. Найти вероятность безотказной работы системы R на некотором интервале времени.

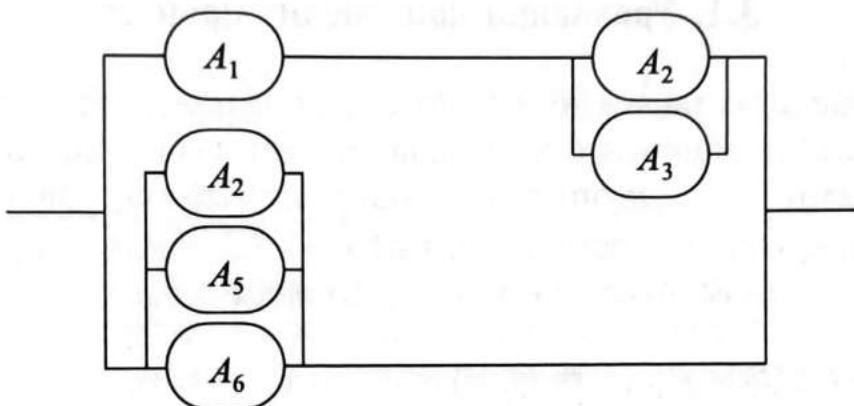


Рис. 2.4

Решение. По формуле (2.2) в случае одинаковых элементов определяем

$$P^{(1)} = 1 - (1 - p_2)^2 = 1 - (1 - 0,85)^2 = 0,9775;$$

$$P^{(2)} = 1 - (1 - p_4)^3 = 1 - (1 - 0,75)^3 \approx 0,9843.$$

По формуле (2.1) рассчитаем $P^{(3)} = p_1 P^{(1)} = 0,95 \cdot 0,9775 \approx 0,9286$.

Вероятность безотказной работы системы на данном интервале времени находим по формуле (2.2):

$$R = 1 - (1 - P^{(2)})(1 - P^{(3)}) \approx 1 - (1 - 0,9843)(1 - 0,9286) \approx 0,9938.$$

3. Расчет надежности восстанавливаемых систем в стационарном режиме

3.1. Уравнения марковских процессов

При расчетах надежности сложных систем используют марковские модели поведения системы во времени. Поведение системы с состояниями $0, 1, \dots, n$ описывает однородный марковский процесс $\xi(t)$ с непрерывным временем t , $t \in [0, \infty)$. Случайный процесс определяется набором функций или *переходных вероятностей*:

$$P_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j | \xi(0) = i\} \text{ при } i, j = 0, 1, \dots, n.$$

Следовательно $\sum_{j=0}^n P_{ij}(t) \equiv 1$. Основой определения марковского процесса является предположение, что его поведение после момента времени t зависит только от данного состояния в момент t и не зависит от поведения процесса до этого момента. В теории марковских процессов показано при общих предположениях, что существуют производные ($\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$, и $\delta_{ii} = 1$)

$$a_{ij} = \left. \frac{dP_{ij}(t)}{dt} \right|_{t=0+} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{P_{ij}(\Delta t) - \delta_{ij}}{\Delta t} \quad \text{при } i, j = 0, 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

называемые *плотностями переходных вероятностей* или *интенсивностями переходов*. Следовательно $a_{ii} \leq 0$ и $a_{ij} \geq 0$ при $j \neq i$, $\sum_{j=0}^n a_{ij} = 0$.

Если $a_{ii} = 0$, то в состоянии i процесс остановится. Интенсивность a_{ij} при $j \neq i$ пропорциональна среднему числу переходов из i в j за единицу времени. Для однородных процессов интенсивность не зависит от времени.

Из (3.1) следует, что однородный марковский процесс задают поведением переходных вероятностей при $\Delta t \rightarrow 0+$:

$$P_{ij}(\Delta t) = a_{ij}\Delta t + o(\Delta t) \quad \text{при } j \neq i;$$

$$P_{ii}(\Delta t) = 1 + a_{ii}\Delta t + o(\Delta t) \quad \text{при } i, j = 0, 1, \dots, n.$$

Для нахождения переходных вероятностей решают *обратную* или *прямую системы дифференциальных уравнений Колмогорова*:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k=0}^n a_{ik} P_{kj}(t) \quad \text{при } i = 0, 1, \dots, n;$$

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k=0}^n P_{ik}(t) a_{kj} \quad \text{при } j = 0, 1, \dots, n$$

с начальными условиями $P_{ii}(0) = 1$, $P_{ij}(0) = 0$ при $j \neq i$.

Составлять уравнения удобно, ориентируясь на *граф состояний и переходов*, строящийся на основе анализа процесса функционирования рассматриваемой технической системы следующим образом:

- вершины графа изображают окружностями с указанием номера состояния системы i , где $i = 0, 1, \dots, n$;
- вершину i соединяют ориентированным ребром с вершиной j , если в системе возможен скачок из состояния i в состояние j ;
- над ребрами указывают интенсивности a_{ij} .

Для определения вероятностей $P_{ij}(t)$ при $j = 0, 1, \dots, n$, на основе графа переходов составляют прямую систему дифференциальных уравнений по перечисленным ниже правилам. Для каждого $j = 0, 1, \dots, n$ уравнение записывают следующим образом:

- в левой части уравнения записывают производную $P'_{ij}(t)$;
- в правой части уравнения — сумму переходных вероятностей для состояний, из которых возможен переход в j -е состояние, умноженных на интенсивности этих переходов. И вычитают вероятность $P_{ij}(t)$, умноженную на сумму интенсивностей переходов из j -го состояния во все другие состояния, куда возможен скачок.

В теории марковских процессов показано, что существуют пределы

$$p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) \quad \text{при } i, j = 0, 1, \dots, n, \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dP_{ij}(t)}{dt} = 0 \quad \text{при } i, j = 0, 1, \dots, n.$$

Для нахождения p_{ij} решают *обратную* или *прямую стационарную систему уравнений*:

$$\sum_{k=0}^n a_{ik} p_{kj} = 0 \text{ при } i = 0, 1, \dots, n;$$

$$\sum_{k=0}^n p_{ik} a_{kj} = 0 \text{ при } j = 0, 1, \dots, n,$$

представляющие собой системы линейных алгебраических уравнений.

Пусть из любого состояния i достижимо любое состояние j . Тогда с течением времени случайный процесс переходит в стационарный (установившийся) режим. Стационарные вероятности есть пределы

$$p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t), \quad j = 0, 1, \dots, n, \text{ причем } \sum_{j=0}^n p_j = 1.$$

3.2. Восстанавливаемые системы и процесс рождения и гибели

В различных приложениях используют *процесс рождения и гибели* $\eta(t)$, когда из состояния i , где $i \neq 0, n$, случайный процесс может совершить скачок только в состояние $i - 1$ или $i + 1$, из состояния 0 в состояние 1 и из состояния n в состояние $n - 1$.

В задачах теории надежности полагают, что состояние i является числом отказавших элементов системы. Переход системы из состояния i в состояние $i + 1$ означает, что отказал еще один элемент. Для *восстанавливаемой системы* возможны обратные переходы из состояния i в состояние $i - 1$, что означает восстановление одного элемента.

Для марковского процесса $\eta(t)$ граф состояний и переходов представлен на рис. 3.1, где номер состояния системы — число отказавших элементов; λ_i — интенсивность *прямого перехода* из i -го состояния в $i + 1$ (отказ элемента); μ_i — интенсивность *обратного перехода* из i -го состояния в $i - 1$ (восстановление элемента).

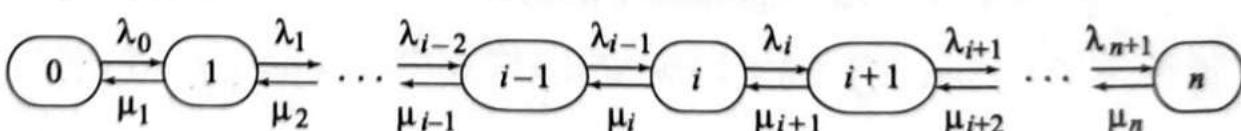


Рис. 3.1

В случае графа, изображенного на рис. 3.1, получаем линейную систему дифференциальных уравнений n -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} P'_{i0}(t) = \mu_1 P_{i1}(t) - \lambda_0 P_{i0}(t); \\ \dots \\ P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) + \mu_{j+1} P_{i,j+1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_{ij}(t); \\ \dots \\ P'_{in}(t) = \lambda_{n-1} P_{i,n-1}(t) - \mu_n P_{i,n}(t), \end{cases} \quad (3.2)$$

где начальные условия $P_{ii}(0) = 1$, $P_{ij}(0) = 0$ при $j \neq i$.

Равенство $\sum_{j=0}^n P_{ij}(t) = 1$ дополняет систему (3.2).

Показателем надежности системы является вероятность нахождения системы в работоспособном состоянии, т. е. *коэффициент готовности*

$$K_{i\Gamma}(t) = \sum_{j \in J} P_{ij}(t),$$

где J — состояния работоспособности системы.

Предположим, что рассматриваемая система с течением времени переходит в стационарный (установившийся) режим, существуют пределы $p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$, $j = 0, 1, \dots, n$. Системе (3.2) соответствует система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 0 = \mu_1 p_1 - \lambda_0 p_0; \\ \dots \\ 0 = \lambda_{j-1} p_{j-1} + \mu_{j+1} p_{j+1} - (\lambda_j + \mu_j) p_j; \\ \dots \\ 0 = \lambda_{n-1} p_{n-1} - \mu_n p_n; \\ 1 = p_0 + \dots + p_n. \end{cases} \quad (3.3)$$

Решение системы (3.3) имеет вид:

$$p_j = \frac{\theta_j}{\sum_{j=0}^n \theta_j} \quad \text{при } j = 0, 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Здесь

$$\theta_0 = 1, \quad \theta_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j} \quad \text{при } j = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Получаем выражение для коэффициента готовности K_r в стационарном режиме:

$$K_r = \sum_{j \in J} p_j = \frac{\sum_{j \in J} \theta_j}{\sum_{j=1}^n \theta_j}.$$

3.3. Последовательное соединение равнонадежных элементов

Пусть система состоит из n элементов, соединенных последовательно (см. рис. 2.1). Все элементы независимы и имеют одинаковую интенсивность отказа λ . Дано r , где $1 \leq r \leq n$ ремонтных органов*, интенсивность восстановления элемента одним органом равна μ . Каждый ремонтный орган действует независимо от других, соответственно интенсивность восстановления для k ремонтных органов равна $k\mu$, где $1 \leq k \leq r$. Найдем коэффициент готовности для стационарного режима работы системы.

Граф переходов системы совпадает с графом, представленным на рис. 3.1, при этом интенсивности переходов λ_i и μ_i выражают через λ и μ :

$\lambda_0 = n\lambda$ — из состояния 0 в состояние 1 система переходит при отказе любого из n элементов;

$\lambda_i = (n-i)\lambda$ — в состоянии i может отказать один из $n-i$ элементов, $i = 1, \dots, n-2$;

$\lambda_{n-1} = \lambda$ — интенсивность отказа последнего неотказавшего элемента;

$\mu_1 = \mu$ — один отказавший элемент, восстанавливает один ремонтный орган;

$\mu_i = i\mu$ — i отказавших элементов, восстанавливает i ремонтных органов ($i \leq r$);

$\mu_i = r\mu$ — r из i отказавших элементов, восстанавливает r ремонтных органов, где $r < i \leq n$.

* Здесь и далее в качестве ремонтного органа может выступать ремонтная бригада бригада, человек, вычислительная техника, например компьютер.

Подставив прямые и обратные интенсивности в формулы (3.4) и (3.5), получаем

$$\theta_0 = 1, \theta_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} = \frac{n\lambda}{\mu}, \theta_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} = \frac{n(n-1)\lambda^2}{2\mu^2}, \dots;$$

$$\theta_i = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)\lambda^i}{i!\mu^i}, \text{ если } i \leq r;$$

$$\theta_i = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)\lambda^i}{r!r^{i-r}\mu^i}, \text{ если } r < i \leq n.$$

Поскольку n элементов в системе соединены последовательно, то работоспособным состоянием системы является только состояние 0, следовательно, коэффициент готовности при стационарном режиме работы системы, учитывая формулу (3.5),

$$K_g = p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \theta_i}.$$

Пример 5. Система состоит из $n = 3$ последовательно соединенных элементов, отказывающих с одинаковой интенсивностью λ (рис. 3.2).

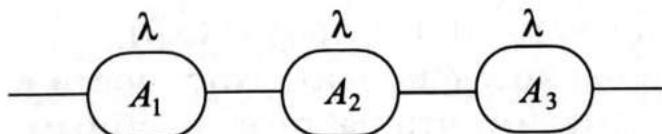


Рис. 3.2

Дано $r = 2$ ремонтных органа, восстанавливающих элементы с интенсивностью μ . Найти значение стационарного коэффициента готовности системы K_g при $\lambda = 0,01$ и $\mu = 0,1$.

Решение. Состояния рассматриваемой системы следующие: 0 — все элементы исправны; 1 — отказал один элемент из трех; 2 — откали два элемента из трех; 3 — откали три элемента. Граф состояний и переходов изображен на рис. 3.3.

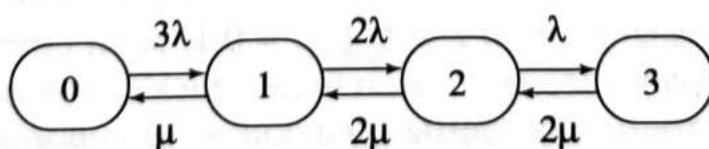


Рис. 3.3

Для расчета используем следующие выражения:

$$\theta_0 = 1, \theta_1 = \frac{3\lambda}{\mu}, \theta_2 = \frac{3\lambda \cdot 2\lambda}{\mu \cdot 2\mu} = \frac{3\lambda^2}{\mu^2}, \theta_3 = \frac{3\lambda \cdot 2\lambda \cdot \lambda}{\mu \cdot 2\mu \cdot 2\mu} = \frac{3\lambda^3}{2\mu^3}.$$

Находим значение коэффициента готовности

$$K_r = p_0 = \left(1 + 3\frac{\lambda}{\mu} + 3\frac{\lambda^2}{\mu^2} + \frac{3}{2}\frac{\lambda^3}{\mu^3}\right)^{-1} \approx (1 + 0,03)^{-1} \approx 0,97.$$

3.4. Параллельное соединение равнонадежных элементов

Пусть система состоит из n элементов, соединенных параллельно (см. рис. 2.2), причем для работоспособности системы необходимо не менее m исправных элементов, где $1 \leq m \leq n$. Каждый из элементов имеет интенсивность отказов λ . Дано r , где $1 \leq r \leq n$ ремонтных органа, интенсивность восстановления элемента одним ремонтным органом равна μ . Граф переходов системы изображен на рис. 3.1, при этом прямые и обратные интенсивности λ_i и μ_i выражают через λ и μ так же, как в случае последовательного соединения равнонадежных элементов. Следовательно, стационарные вероятности p_j при $j = 0, 1, \dots, n$ находят по формуле (3.4)

Для определения коэффициента готовности в стационарном режиме работы заметим, что работоспособными состояниями являются $0, 1, \dots, n-m$, где m или более элементов исправны, а остальные могут отказать, поэтому

$$K_r = \sum_{j=0}^{n-m} p_j.$$

Пример 6. Система состоит из $n = 3$ параллельно соединенных элементов, отказывающих с одинаковой интенсивностью λ . В наличии $r = 2$ ремонтных органа, восстанавливающих элементы с интенсивностью μ . Найти значение стационарного коэффициента готовности системы K_r при $\lambda = 0,1$, $\mu = 0,1$, если система работоспособна, когда работает $m = 2$ или более элементов из трех.

Решение. Состояния системы следующие: 0 — все элементы исправны; 1 — отказал один элемент из трех; 2 — откали два эле-

мента из трех; 3 — отказали три элемента. Граф состояний и переходов представлен на рис. 3.3.

Для расчета используем следующие выражения:

$$\theta_0 = 1, \theta_1 = \frac{3\lambda}{\mu}, \theta_2 = \frac{3\lambda \cdot 2\lambda}{\mu \cdot 2\mu} = \frac{3\lambda^2}{\mu^2}, \theta_3 = \frac{3\lambda \cdot 2\lambda \cdot \lambda}{\mu \cdot 2\mu \cdot 2\mu} = \frac{3\lambda^3}{2\mu^3}.$$

Значение коэффициента готовности вычисляем, используя формулу (3.5):

$$K_r = p_0 + p_1 = \left(1 + 3\frac{\lambda}{\mu}\right) \left(1 + 3\frac{\lambda}{\mu} + 3\frac{\lambda^2}{\mu^2} + \frac{3}{2}\frac{\lambda^3}{\mu^3}\right)^{-1} \approx \\ \approx (1 + 0,03)(1 + 0,03)^{-1} \approx 1.$$

З а м е ч а н и е. Значение коэффициента готовности, близкое к единице, объясняется тем, что интенсивность восстановления $\mu = 0,1$ отказавших элементов много больше интенсивности отказов $\lambda = 0,01$.

3.5. Системы из разнонадежных элементов

Рассмотрим случай, когда интенсивности отказов изменяются при выходе из строя отдельных элементов из-за возрастающей нагрузки на оставшиеся работающие элементы системы.

Пример 7. Система состоит из $n = 4$ параллельно соединенных элементов (рис. 3.4).

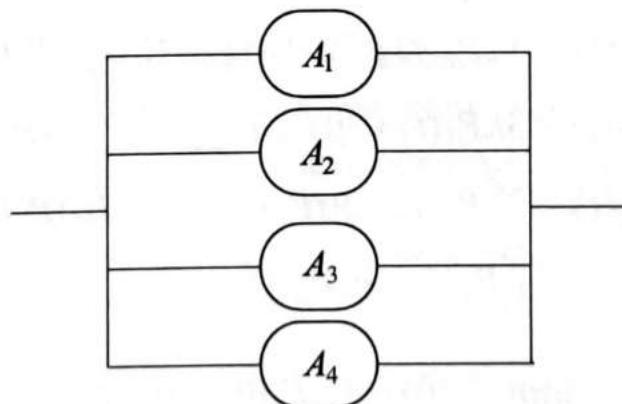


Рис. 3.4

Интенсивность отказа элемента зависит от числа вышедших из строя элементов по следующему правилу:

$$\lambda_0 = n\bar{\lambda}, \lambda_1 = (n-1)\bar{\lambda}, \lambda_2 = (n-2)\bar{\bar{\lambda}}, \lambda_3 = (n-3)\bar{\bar{\lambda}}, \lambda_4 = (n-4)\bar{\bar{\lambda}}, \dots,$$

где λ , $\bar{\lambda}$, $\bar{\bar{\lambda}}$ заданы.

Дано $r = 3$ ремонтных органа, восстанавливающих элементы с интенсивностью μ .

Составить граф состояний и переходов системы. Записать прямую систему уравнений Колмогорова и систему алгебраических уравнений для стационарных вероятностей.

Найти выражение для стационарного коэффициента готовности системы K_r , если система работоспособна, когда работает $m = 1$ или более элементов из четырех.

Решение. Состояния системы следующие: 0 — все элементы исправны; 1 — отказал один элемент из четырех; 2 — отказали два элемента из четырех; 3 — отказали три элемента из четырех; 4 — отказали четыре элемента. Граф состояний представлен на рис. 3.5.

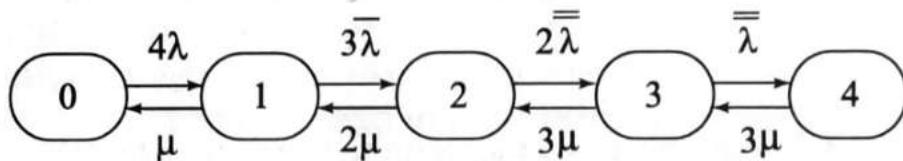


Рис. 3.5

По графу составляем прямую систему дифференциальных уравнений для переходных вероятностей:

$$\begin{cases} P'_{i0}(t) = \mu P_{i1}(t) - 4\lambda P_{i0}(t); \\ P'_{i1}(t) = 4\lambda P_{i0}(t) + 2\mu P_{i2}(t) - (3\bar{\lambda} + \mu) P_{i1}(t); \\ P'_{i2}(t) = 3\bar{\lambda} P_{i1}(t) + 3\mu P_{i3}(t) - (2\bar{\bar{\lambda}} + 2\mu) P_{i2}(t); \\ P'_{i3}(t) = 2\bar{\bar{\lambda}} P_{i2}(t) + 3\mu P_{i4}(t) - (\bar{\bar{\lambda}} + 3\mu) P_{i3}(t); \\ P'_{i4}(t) = \bar{\bar{\lambda}} P_{i3}(t) - 3\mu P_{i4}(t), \end{cases}$$

где начальные условия $P_{ij}(0) = 1$, $P_{ij}(0) = 0$ при $j \neq i$.

Система дополняется равенством $P_{i0}(t) + P_{i1}(t) + P_{i2}(t) + P_{i3}(t) + P_{i4}(t) = 1$.

Система для стационарных вероятностей $p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$ при $j = 0, \dots, 4$ имеет вид

$$\begin{cases} 0 = \mu p_1 - 4\lambda p_0; \\ 0 = 4\lambda p_0 + 2\mu p_2 - (3\bar{\lambda} + \mu) p_1; \\ 0 = 3\bar{\lambda} p_1 + 3\mu p_3 - (2\bar{\lambda} + 2\mu) p_2; \\ 0 = 2\bar{\lambda} p_2 + 3\mu p_4 - (\bar{\lambda} + 3\mu) p_3; \\ 0 = \bar{\lambda} p_3 - 3\mu p_4; \\ 1 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4. \end{cases}$$

Отсюда легко находим выражения для p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 и коэффициент готовности $K_r = p_0 + p_1 + p_2 + p_3$.

З а м е ч а н и е. В примере 7 рассмотрена работа системы с *нагруженным (горячим) резервом*, когда параллельно подключенный элемент немедленно работоспособен при отказе какого-либо элемента. В рамках марковских моделей аналогичным образом рассматривают случай *холодного резерва*, когда после отказа требуется некоторое время для введения в работу нового элемента.

Коэффициент готовности равен средней доле времени, в течение которого система находится в исправном состоянии. Модель процесса рождения и гибели позволяет рассчитывать *среднюю длительность участков исправного или неисправного состояния системы* и *среднее число занятых ремонтных органов*, а также *среднее число элементов, ожидающих ремонт* в стационарном режиме.

В примере 8 граф состояний не является цепью. Путем анализа функционирования системы находят граф переходов и в соответствии с правилами составляют прямую систему уравнений для исследования.

Пример 8. Система состоит из $n = 4$ последовательно соединенных элементов. Три элемента имеют одинаковую интенсивность отказов λ , а один элемент — интенсивность отказа λ' , $\lambda' \neq \lambda$ (рис. 3.6).

Число ремонтных органов $r = 3$ с интенсивностью восстановления одним ремонтным органом μ . Составить граф состояний и переходов системы. Записать систему алгебраических уравнений для стационарных вероятностей.

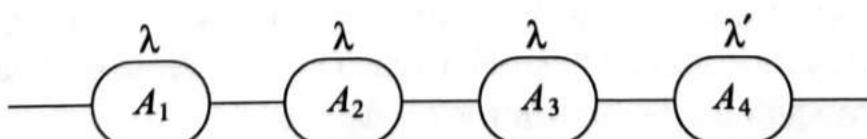


Рис. 3.6

Решение. Возможны следующие состояния рассматриваемой системы: 0 — все элементы исправны; 1 — отказал один из первых трех; 2 — отказали два из первых трех; 3 — отказали три из первых трех; 4 — отказал только четвертый элемент; 5 — отказал четвертый и один из первых трех; 6 — отказали четвертый и два из первых трех; 7 — отказали все элементы. Граф состояний и переходов представлен на рис. 3.7.

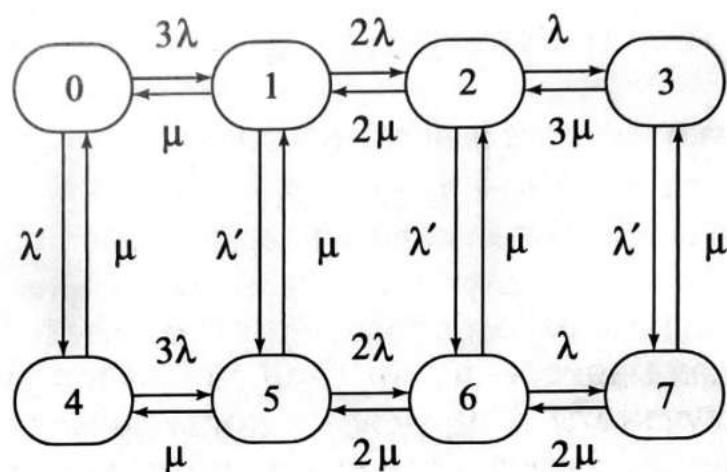


Рис. 3.7

Система уравнений для стационарных вероятностей имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \mu p_1 + \mu p_4 - (3\lambda + \lambda') p_0; \\ 0 = 3\lambda p_0 + 2\mu p_2 + \mu p_5 - (2\lambda + \lambda' + \mu) p_1; \\ 0 = 2\lambda p_1 + 3\mu p_3 + \mu p_6 - (\lambda + \lambda' + 2\mu) p_2; \\ 0 = \lambda p_2 + \mu p_7 - (\lambda' + 3\mu) p_3; \\ 0 = \lambda' p_0 + \mu p_5 - (3\lambda + \mu) p_4; \\ 0 = \lambda' p_1 + 3\lambda p_4 + 2\mu p_6 - (2\lambda + 2\mu) p_5; \\ 0 = \lambda' p_2 + 2\lambda p_5 + \mu p_7 - (\lambda + 3\mu) p_6; \\ 0 = \lambda' p_3 + \lambda p_6 - 3\mu p_7; \\ 1 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7. \end{array} \right.$$

Систему уравнений для стационарных вероятностей решаем, например, методом Гаусса, т. е. последовательным исключением переменных, или методом Крамера через вычисление определителей. При этом коэффициент готовности $K_r = p_0$.

4. Статистическое оценивание показателей надежности

Приведем примеры двух типовых случаев статистического оценивания показателей надежности изделия по результатам испытаний [3] в зависимости от используемого закона распределения: нормального и экспоненциального.

4.1. Нормальный закон распределения

Предполагается, что состояние работоспособности изделия можно записать в виде $a < \xi$ или $\xi < b$, где ξ — случайная величина, характеризующая значение определяющего параметра изделия на момент времени t ; a или b — заданные ограничения (нижнее или верхнее соответственно) на значение ξ .

Пусть случайная величина ξ на момент времени t имеет нормальный закон распределения с параметрами m и σ . Вероятность безотказной работы изделия к моменту t для каждого из рассматриваемых ограничений:

$$P = P\{a < \xi\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^{\infty} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(a-m)/\sigma}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \Phi(h), \quad (4.1)$$

$$P = P\{\xi < b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^b e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(b-m)/\sigma} e^{-t^2/2} dt = \Phi(h),$$

где введено обозначение

$$h = \begin{cases} \frac{m-a}{\sigma} & \text{при ограничении } a < \xi; \\ \frac{b-m}{\sigma} & \text{при ограничении } \xi < b. \end{cases}$$

В выражениях (4.1) параметры m и σ неизвестны. Для их оценки и затем для оценки показателя надежности P проводят испытания изделий, в ходе которых замеряют фактические значения ξ на момент времени t . Пусть по результатам испытаний n образцов получена статистическая выборка из n значений:

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

По правилам обработки результатов испытаний указывают, в некотором смысле наилучшие, точечные оценки параметров распределения — *выборочное среднее*

$$\hat{m} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4.2)$$

и *выборочную дисперсию*

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (4.3)$$

На основе выборки x_1, x_2, \dots, x_n для показателя надежности P указывают точечную оценку \hat{P} и интервальную оценку для показателя надежности P в виде нижней доверительной границы \underline{P}_γ уровня γ , т. е.

$$\mathbf{P}\{\underline{P}_\gamma < P\} = \gamma,$$

где γ — заданный уровень доверительной вероятности.

Точечную оценку вычисляют по формуле

$$\hat{P} = \Phi(\hat{h}), \quad (4.4)$$

где

$$\hat{h} = \begin{cases} \frac{\hat{m} - a}{\hat{\sigma}} & \text{при ограничении } a < \xi; \\ \frac{b - \hat{m}}{\hat{\sigma}} & \text{при ограничении } \xi < b. \end{cases}$$

Нижнюю доверительную границу уровня γ рассчитывают по формуле

$$\underline{P}_\gamma = \Phi\left(\hat{h} - \frac{z_\gamma}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \hat{h}^2}\right). \quad (4.5)$$

Здесь z_γ — квантиль стандартного нормального закона распределения, т. е. число, удовлетворяющее равенству $\Phi(z_\gamma) = \gamma$.

Пример 9. Предполагается, что наработка до отказа изделия подчиняется нормальному закону распределения. Условие работоспособности изделия имеет вид $2,5 < \xi$. Получена выборка из $n = 11$ измерений параметра ξ на момент времени t :

$$4,3; 4,2; 5,0; 6,1; 6,8; 7,1; 7,6; 8,0; 8,9; 9,6; 10,8.$$

Для показателя надежности P вычислить оценки \hat{P} и \underline{P}_γ с уровнем доверительной вероятности $\gamma = 0,9$.

Решение. По формулам (4.2) и (4.3) вычисляем точечные оценки параметров нормального закона, $\hat{m} = 7,1$ и $\hat{\sigma} = 2,28$.

Далее, используя выражение $\hat{h} = (\hat{m} - a) / \hat{\sigma} \approx 1,99$ и формулу (4.4), определяем точечную оценку показателя надежности, используя значения функции $\Phi(x)$, представленные в табл. П.2,

$$\hat{P} = \Phi(\hat{h}) \approx \Phi(1,99) \approx 0,9767.$$

Квантиль $z_{0,9} = 1,28$ определяют по табл. П.2 при $\gamma = 0,9$, т. е. $\Phi(1,28) \approx 0,9$. По формуле (4.5) рассчитываем нижнюю границу

$$\underline{P}_{0,9} = \Phi\left(\hat{h} - \frac{1,28}{\sqrt{11}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \hat{h}^2}\right) \approx \Phi(1,32) \approx 0,9066.$$

Таким образом, $\mathbf{P}\{0,9066 < P \leq 1\} \approx 0,9$, т. е. с вероятностью 0,9 показатель надежности расположен в промежутке $(0,9066; 1]$.

4.2. Экспоненциальный закон распределения

Предположим, что наработка до отказа изделия ξ распределена по экспоненциальному закону $\mathbf{P}\{\xi < t\} = 1 - e^{-\lambda t}$ с неизвестным параметром λ . Вероятность безотказной работы изделия за время t , где $t \geq 0$,

$$P(t) = \mathbf{P}\{\xi \geq t\} = e^{-\lambda t}. \quad (4.6)$$

Предполагается, что испытания n образцов изделий проводят по одному из планов $[n, \mathcal{B}, T]$ или $[n, \mathcal{B}, r]$.

План $[n, \mathcal{B}, T]$ означает, что в испытаниях используют n образцов изделия, без замены отказавших образцов (\mathcal{B}). Их продолжают до

назначенного времени T (*цензурирование по времени*). В результате испытаний получают выборку из наработок отказавших образцов при $d \leq n$:

$$x_1, x_2, \dots, x_d.$$

План $[n, B, r]$ означает, что в испытаниях используют n образцов изделия, без замены отказавших образцов (B). Их продолжают до появления r отказов (*цензурирование по числу отказов*). В результате испытаний получают выборку из наработок до отказов при $r \leq n$:

$$x_1, x_2, \dots, x_r.$$

На основе выборки для параметра λ определяют точечную оценку $\hat{\lambda}$ и интервальную оценку в виде верхней доверительной границы $\bar{\lambda}_\gamma$ уровня γ , т. е.

$$\mathbf{P}\{\lambda < \bar{\lambda}_\gamma\} = \gamma,$$

где γ — заданный уровень доверительной вероятности.

Вычисляют *суммарную наработку отказов* всех образцов, проходивших испытания,

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^d x_i + (n-d)T & \text{при плане } [n, B, T]; \\ \sum_{i=1}^r x_i + (n-r)x_r & \text{при плане } [n, B, r]. \end{cases}$$

Точечную оценку рассчитывают по формуле

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} \frac{d}{S} & \text{при плане } [n, B, T]; \\ \frac{r-1}{S} & \text{при плане } [n, B, r]. \end{cases} \quad (4.7)$$

Точечная оценка при плане испытаний $[n, B, T]$ является смещённой, т. е. $\mathbf{M}\hat{\lambda} \neq \lambda$ [3]. Точечная оценка при плане испытаний $[n, B, r]$ является несмещённой, т. е. $\mathbf{M}\hat{\lambda} = \lambda$.

Выражение для верхней границы рассчитывают по формуле

$$\bar{\lambda}_\gamma = \begin{cases} \frac{1}{2S}\chi_\gamma^2(2d+2) & \text{при плане } [n, B, T]; \\ \frac{1}{2S}\chi_\gamma^2(2r) & \text{при плане } [n, B, r], \end{cases} \quad (4.8)$$

где $\chi_\gamma^2(k)$ — значение хи-квадрат распределения уровня γ с k степенями свободы, определяемое из табл. П.3.

После определения оценок $\hat{\lambda}$ и $\bar{\lambda}_\gamma$ для показателя надежности (4.6) при фиксированном времени t оценки \hat{P} и \underline{P}_γ задают формулами

$$\hat{P} = e^{-\hat{\lambda}t}, \quad \underline{P}_\gamma = e^{-\bar{\lambda}_\gamma t}.$$

Таким образом, $P\{\underline{P}_\gamma < P\} = \gamma$.

Пример 10. Пусть наработка до отказа изделия подчиняется экспоненциальному закону распределения. Испытания $n = 6$ образцов проведены по плану $[n, B, T]$, где $T = 10$. В результате испытаний зафиксировано $d = 2$ отказавших образца и получена выборка из наработок до отказа:

$$x_1 = 2,6; x_2 = 3,4; x_3 = 10; x_4 = 10; x_5 = 10; x_6 = 10.$$

Найти точечную оценку \hat{P} и нижнюю границу интервальной оценки \underline{P}_γ с уровнем доверительной вероятности $\gamma = 0,9$ для момента времени $t = 2$.

Решение. Суммарная наработка отказов

$$S = \sum_{i=1}^d x_i + (n-d)T = 2,6 + 3,4 + 4 \cdot 10 = 46.$$

По формуле (4.7) вычисляем оценку

$$\hat{\lambda} = \frac{d}{S} = \frac{2}{46} \approx 0,04$$

и точечную оценку показателя надежности для момента времени $t = 2$,

$$\hat{P} = e^{-\hat{\lambda}t} \Big|_{t=2} = e^{-0,08} \approx 0,92.$$

Используя табл. П.3, по формуле (4.8) вычисляем

$$\bar{\lambda}_{0,9} = \frac{1}{2S} \chi^2_{0,9}(2d+2) = \frac{1}{2 \cdot 46} \chi^2_{0,9}(6) \approx \frac{1}{92} 10,64 \approx 0,1;$$

$$P_{0,9} = e^{-\bar{\lambda}_{0,9} t} |_{t=2} = e^{-0,2} \approx 0,81.$$

Таким образом, $P\{0,81 < P \leq 1\} \approx 0,9$, т. е. с вероятностью 0,9 показатель надежности больше 0,81 для момента времени $t = 2$.

5. Типовой расчет

В данном разделе представлены четыре задачи типового расчета, в каждой из них предложены 30 вариантов параметров, используемых для проведения вычислений.

Задача 1. Время работы изделия до отказа подчинено вероятностному закону распределения с заданными параметрами. Вычислить показатели надежности $P(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$ при значениях t_1, t_2, t_3, t_4 . Построить графики зависимости показателей надежности от времени t . Найти значение средней наработки на отказ T .

1. Закон распределения нормальный с параметрами $m = 1000$, $\sigma = 500$. Время $t_1 = 500$, $t_2 = 1000$, $t_3 = 1500$, $t_4 = 2500$.

2. Закон распределения усеченный нормальный с параметрами $m = 8000$, $\sigma = 500$. Время $t_1 = 500$, $t_2 = 1000$, $t_3 = 1500$, $t_4 = 10\,000$.

3. Закон распределения Вейбулла с параметрами $\alpha = 3$, $\lambda = 1,6 \cdot 10^{-7}$. Время $t_1 = 100$, $t_2 = 150$, $t_3 = 200$, $t_4 = 250$.

4. Закон распределения экспоненциальный с параметром $\lambda = 3 \cdot 10^{-4}$. Время $t_1 = 500$, $t_2 = 1000$, $t_3 = 2000$, $t_4 = 4000$.

5. Закон распределения Рэлея с параметром $\sigma = 500$. Время $t_1 = 500$, $t_2 = 1000$, $t_3 = 1500$, $t_4 = 2000$.

6. Закон гамма-распределения с параметрами $\alpha = 4$, $\lambda = 6 \cdot 10^{-4}$. Время $t_1 = 4000$, $t_2 = 6000$, $t_3 = 8000$, $t_4 = 10\,000$.

7. Закон распределения усеченный нормальный с параметрами $m = 8000$, $\sigma = 3000$. Время $t_1 = 4000$, $t_2 = 6000$, $t_3 = 8000$, $t_4 = 10\,000$.

8. Закон распределения нормальный с параметрами $m = 1000$, $\sigma = 800$. Время $t_1 = 500$, $t_2 = 1000$, $t_3 = 1500$, $t_4 = 2500$.

9. Закон распределения экспоненциальный с параметром $\lambda = 3,5 \cdot 10^{-4}$. Время $t_1 = 500$, $t_2 = 1000$, $t_3 = 2000$, $t_4 = 4000$.

10. Закон гамма-распределения с параметрами $\alpha = 2$, $\lambda = 3,5 \cdot 10^{-4}$. Время $t_1 = 4000$, $t_2 = 6000$, $t_3 = 8000$, $t_4 = 10\,000$.

11. Закон распределения Рэлея с параметром $\sigma = 800$. Время $t_1 = 500$, $t_2 = 1000$, $t_3 = 1500$, $t_4 = 2000$.

12. Закон распределения Вейбулла с параметрами $\alpha = 2$, $\lambda = 2 \cdot 10^{-5}$. Время $t_1 = 100$, $t_2 = 150$, $t_3 = 200$, $t_4 = 250$.

13. Закон распределения усеченный нормальный с параметрами $m = 8000$, $\sigma = 4000$. Время $t_1 = 4000$, $t_2 = 6000$, $t_3 = 8000$, $t_4 = 10\,000$.

- 14.** Закон распределения нормальный с параметрами $m = 1500$, $\sigma = 500$. Время $t_1 = 500$, $t_2 = 1000$, $t_3 = 1500$, $t_4 = 2500$.
- 15.** Закон распределения экспоненциальный с параметром $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$. Время $t_1 = 500$, $t_2 = 1000$, $t_3 = 2000$, $t_4 = 4000$.
- 16.** Закон гамма-распределения с параметрами $\alpha = 5$, $\lambda = 9 \cdot 10^{-4}$. Время $t_1 = 4000$, $t_2 = 6000$, $t_3 = 8000$, $t_4 = 10\ 000$.
- 17.** Закон распределения Вейбулла с параметрами $\alpha = 1,5$, $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$. Время $t_1 = 100$, $t_2 = 150$, $t_3 = 200$, $t_4 = 250$.
- 18.** Закон гамма-распределение с параметрами $\alpha = 3$, $\lambda = 4 \cdot 10^{-4}$. Время $t_1 = 4000$, $t_2 = 6000$, $t_3 = 8000$, $t_4 = 10\ 000$.
- 19.** Закон распределения нормальный с параметрами $m = 1500$, $\sigma = 800$. Время $t_1 = 500$, $t_2 = 1000$, $t_3 = 1500$, $t_4 = 2500$.
- 20.** Закон распределения усеченный нормальный с параметрами $m = 6000$, $\sigma = 2000$. Время $t_1 = 4000$, $t_2 = 6000$, $t_3 = 8000$, $t_4 = 10\ 000$.
- 21.** Закон распределения Рэлея с параметром $\sigma = 1000$. Время $t_1 = 500$, $t_2 = 1000$, $t_3 = 1500$, $t_4 = 2000$.
- 22.** Закон распределения Вейбулла с параметрами $\alpha = 1,7$, $\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$. Время $t_1 = 100$, $t_2 = 150$, $t_3 = 200$, $t_4 = 250$.
- 23.** Закон распределения экспоненциальный с параметром $\lambda = 7 \cdot 10^{-4}$. Время $t_1 = 500$, $t_2 = 1000$, $t_3 = 2000$, $t_4 = 4000$.
- 24.** Закон распределения усеченный нормальный с параметрами $m = 6000$, $\sigma = 4000$. Время $t_1 = 4000$, $t_2 = 6000$, $t_3 = 8000$, $t_4 = 10\ 000$.
- 25.** Закон распределения Рэлея с параметром $\sigma = 1200$. Время $t_1 = 500$, $t_2 = 1000$, $t_3 = 1500$, $t_4 = 2000$.
- 26.** Закон распределения нормальный с параметрами $m = 1500$, $\sigma = 600$. Время $t_1 = 500$, $t_2 = 1000$, $t_3 = 1500$, $t_4 = 2500$.
- 27.** Закон распределения Вейбулла с параметрами $\alpha = 0,7$, $\lambda = 3 \cdot 10^{-2}$. Время $t_1 = 100$, $t_2 = 150$, $t_3 = 200$, $t_4 = 250$.
- 28.** Закон распределения экспоненциальный с параметром $\lambda = 5,5 \cdot 10^{-4}$. Время $t_1 = 500$, $t_2 = 1000$, $t_3 = 2000$, $t_4 = 4000$.
- 29.** Закон распределения Рэлея с параметром $\sigma = 1400$. Время $t_1 = 500$, $t_2 = 1000$, $t_3 = 1500$, $t_4 = 2000$.
- 30.** Закон гамма-распределения с параметрами $\alpha = 7$, $\lambda = 1,1 \cdot 10^{-2}$. Время $t_1 = 4000$, $t_2 = 6000$, $t_3 = 8000$, $t_4 = 10\ 000$.

Задача 2. Вид структурной схемы надежности для каждого варианта из пяти элементов A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 представлен на рис. 5.1 – 5.30. Вероятности безотказной работы элементов A_1, A_2, A_3, A_4 подчинены экспоненциальному закону распределения со значениями параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Для элемента A_5 вероятность безотказной работы подчинена иному вероятностному закону распределения. Найти вероятность безотказной работы системы $P = P(t)$ при заданном t .

1. Вид ССН представлен на рис. 5.1. Параметры для элементов A_1 , A_2 , A_3 , A_4 равны $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1/24$. Для элемента A_5 закон распределения Вейбулла с параметрами $\alpha = 2$, $\lambda_5 = 0,005$. Момент времени $t = 8$.

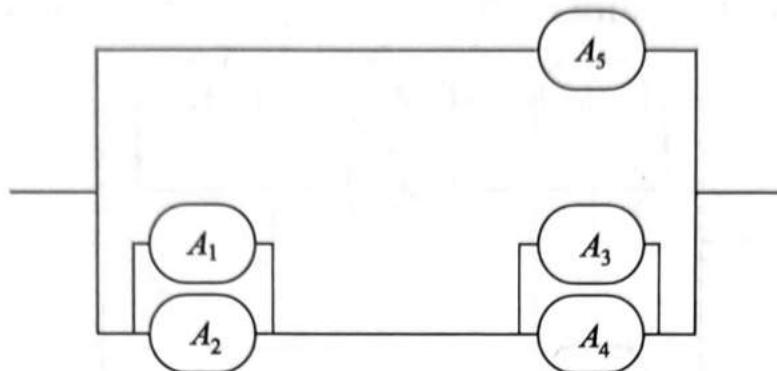


Рис. 5.1

2. Вид ССН представлен на рис. 5.2. Параметры для элементов A_1 , A_2 , A_3 , A_4 составляют $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/20$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1/30$. Для элемента A_5 закон распределения Вейбулла с параметрами $\alpha = 1,8$, $\lambda_5 = 0,002$. Момент времени $t = 9$.

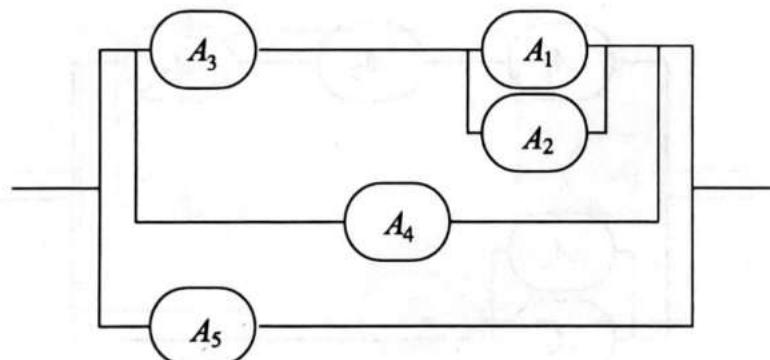


Рис. 5.2

3. Вид ССН представлен на рис. 5.3. Параметры для элементов A_1 , A_2 , A_3 , A_4 равны $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/20$, $\lambda_4 = 1/40$. Для элемента A_5 закон распределения Вейбулла с параметрами $\alpha = 3$, $\lambda_5 = 0,0025$. Момент времени $t = 8$.

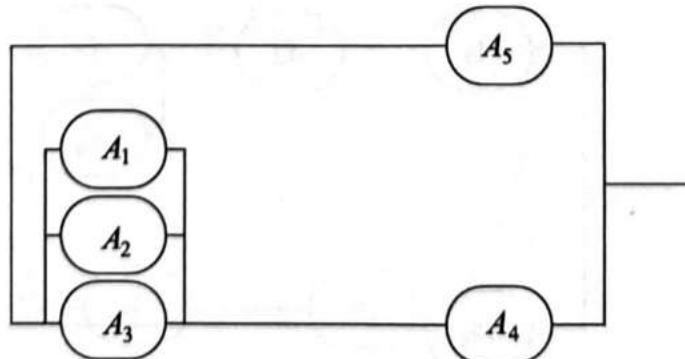


Рис. 5.3

4. Вид ССН представлен на рис. 5.4. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 составляют $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/24$, $\lambda_4 = 1/36$. Для элемента A_5 закон распределения усеченный нормальный с параметрами $m = 15$, $\sigma = 2$. Момент времени $t = 9$.

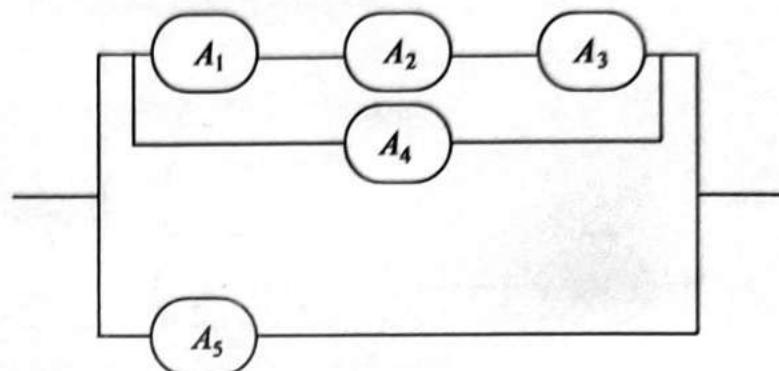


Рис. 5.4

5. Вид ССН представлен на рис. 5.5. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 равны $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/40$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1/20$. Для элемента A_5 закон распределения Вейбулла с параметрами $\alpha = 2,7$, $\lambda_5 = 0,002$. Момент времени $t = 8$.

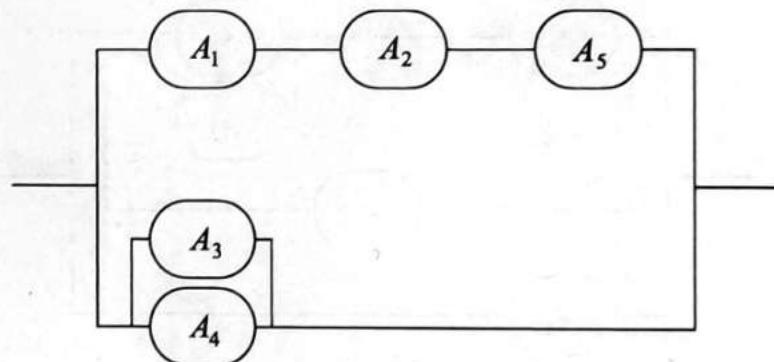


Рис. 5.5

6. Вид ССН представлен на рис. 5.6. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 составляют $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/36$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1/24$. Для элемента A_5 закон распределения усеченный нормальный с параметрами $m = 16$, $\sigma = 3$. Момент времени $t = 9$.

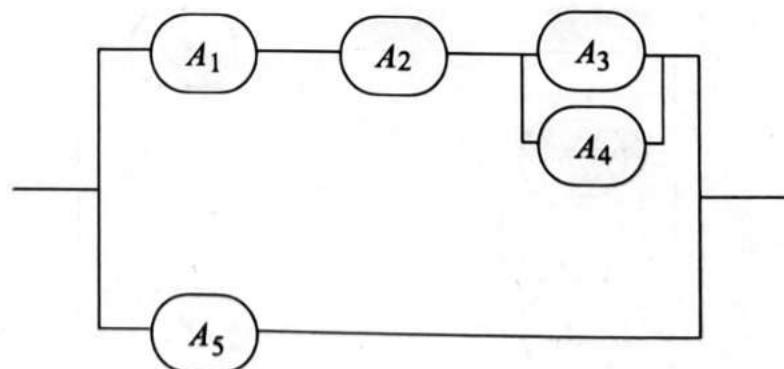


Рис. 5.6

7. Вид ССН представлен на рис. 5.7. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 равны $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/40, \lambda_3 = \lambda_4 = 1/20$. Для элемента A_5 закон распределения Вейбулла с параметрами $\alpha = 2,7, \lambda_5 = 0,002$. Момент времени $t = 8$.

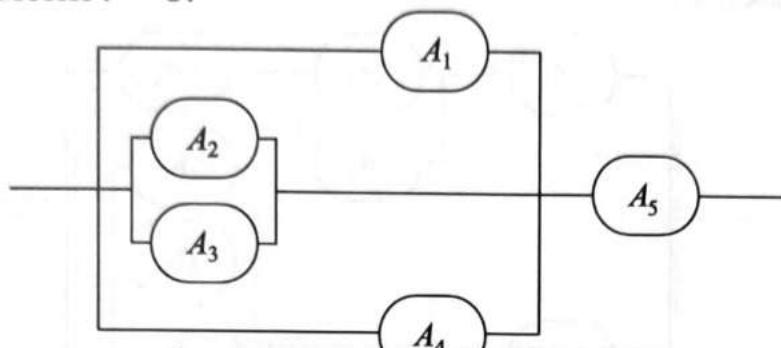


Рис. 5.7

8. Вид ССН представлен на рис. 5.8. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 составляют $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/24, \lambda_4 = 1/36$. Для элемента A_5 закон распределения усеченный нормальный с параметрами $m = 14, \sigma = 3$. Момент времени $t = 9$.

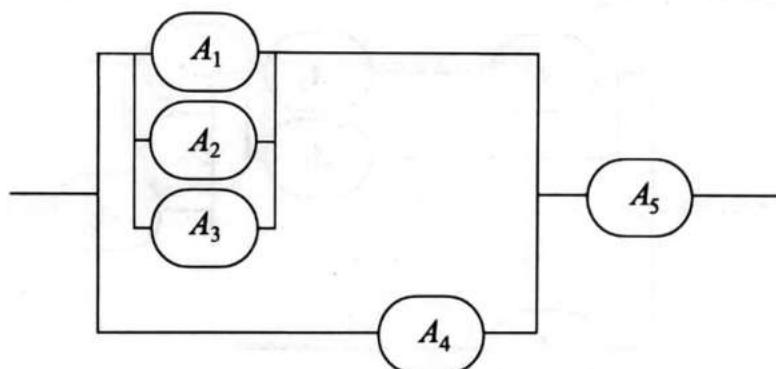


Рис. 5.8

9. Вид ССН представлен на рис. 5.9. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 равны $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/20, \lambda_3 = \lambda_4 = 1/40$. Для элемента A_5 закон распределения Вейбулла с параметрами $\alpha = 2, \lambda_5 = 0,002$. Момент времени $t = 8$.

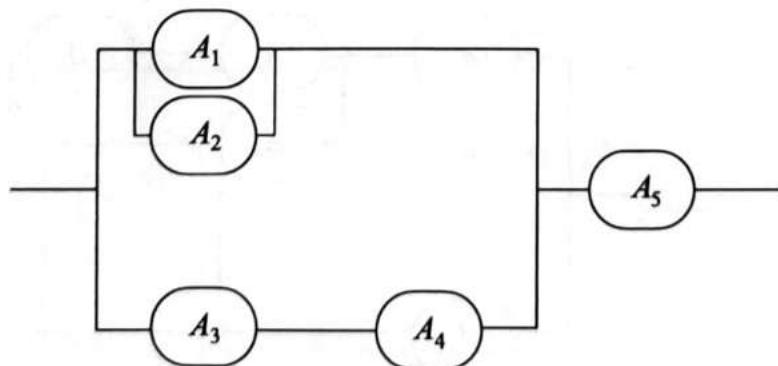


Рис. 5.9

10. Вид ССН представлен на рис. 5.10. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 составляют $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/40, \lambda_3 = \lambda_4 = 1/20$. Для элемента A_5 закон распределения Вейбулла с параметрами $\alpha = 2, \lambda_5 = 0,002$. Момент времени $t = 8$.

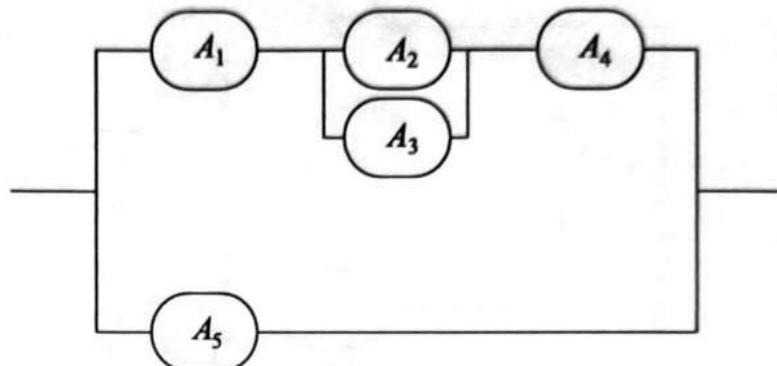


Рис. 5.10

11. Вид ССН представлен на рис. 5.11. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 равны $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/24, \lambda_4 = 1/36$. Для элемента A_5 закон распределения усеченный нормальный с параметрами $m = 13, \sigma = 1$. Момент времени $t = 9$.

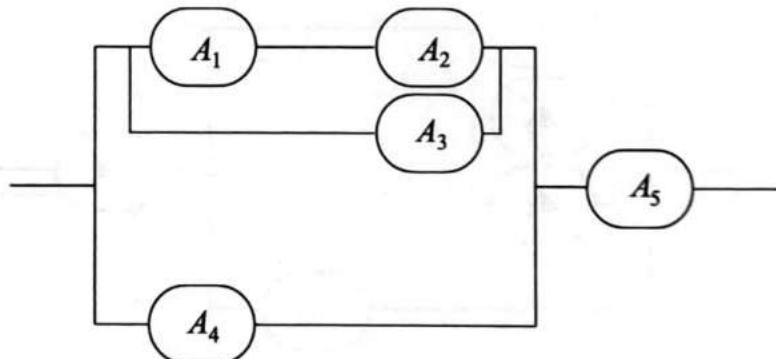


Рис. 5.11

12. Вид ССН представлен на рис. 5.12. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 составляют $\lambda_1 = 1/40, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1/20$. Для элемента A_5 закон распределения усеченный нормальный с параметрами $m = 15, \sigma = 3$. Момент времени $t = 8$.

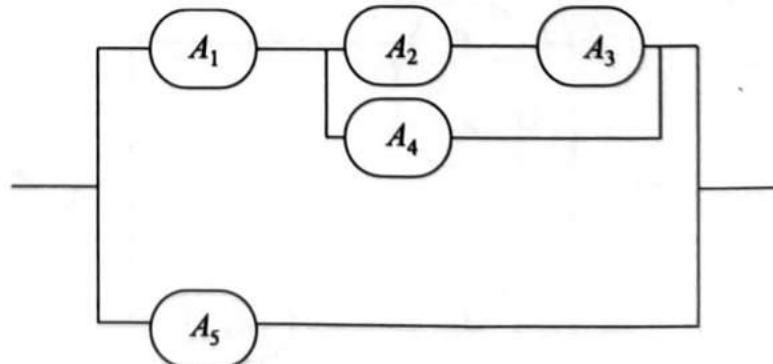


Рис. 5.12

13. Вид ССН представлен на рис. 5.13. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 равны $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/20$, $\lambda_4 = 1/30$. Для элемента A_5 закон распределения Вейбулла с параметрами $\alpha = 2,2$, $\lambda_5 = 0,002$. Момент времени $t = 8$.

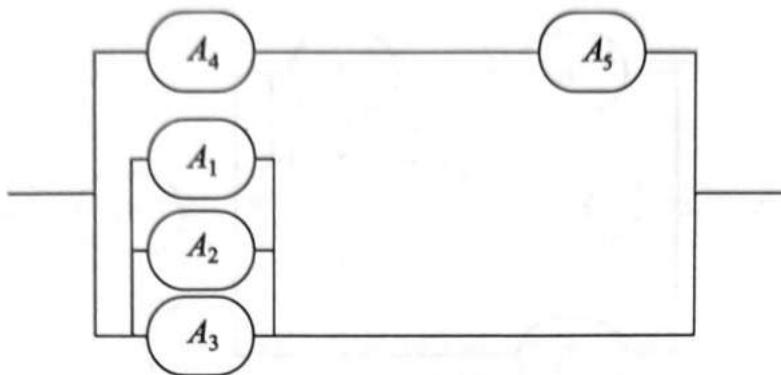


Рис. 5.13

14. Вид ССН представлен на рис. 5.14. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 составляют $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/24$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1/30$. Для элемента A_5 закон распределения усеченный нормальный с параметрами $m = 16$, $\sigma = 3$. Момент времени $t = 9$.

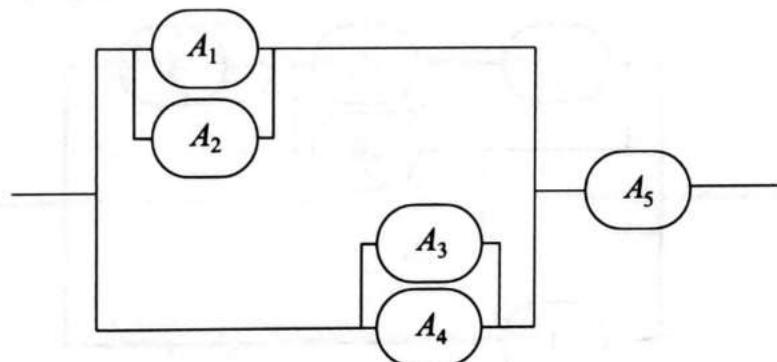


Рис. 5.14

15. Вид ССН представлен на рис. 5.15. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 равны $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/30$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1/20$. Для элемента A_5 закон распределения экспоненциальный с параметром $\lambda_5 = 1/24$. Момент времени $t = 8$.

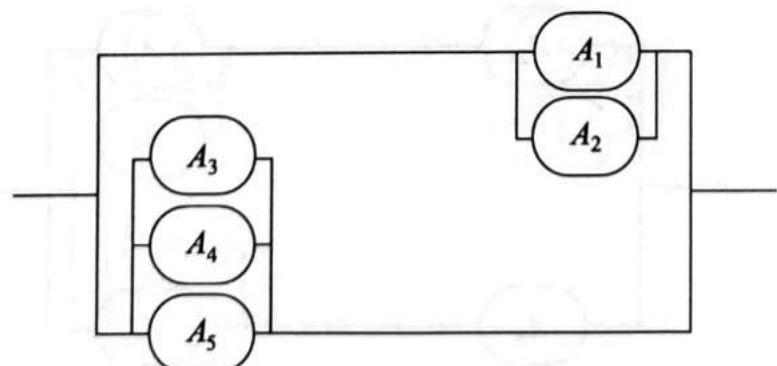


Рис. 5.15

16. Вид ССН представлен на рис. 5.16. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 составляют $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/24, \lambda_3 = \lambda_4 = 1/30$. Для элемента A_5 закон распределения Вейбулла с параметрами $\alpha = 1,5, \lambda_5 = 0,002$. Момент времени $t = 9$.

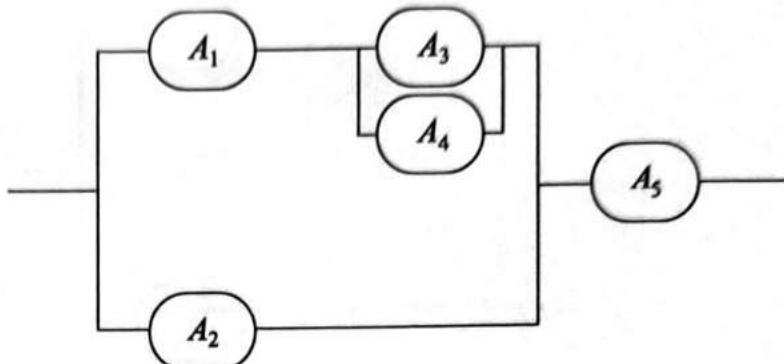


Рис. 5.16

17. Вид ССН представлен на рис. 5.17. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 равны $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/20, \lambda_4 = 1/40$. Для элемента A_5 закон распределения усеченный нормальный с параметрами $m = 15, \sigma = 4$. Момент времени $t = 8$.

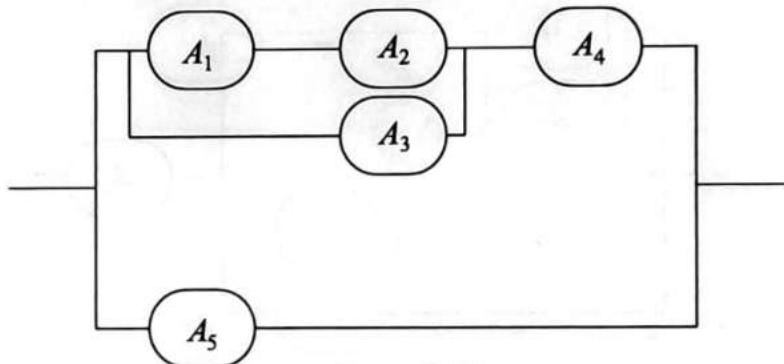


Рис. 5.17

18. Вид ССН представлен на рис. 5.18. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 составляют $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/20, \lambda_3 = \lambda_4 = 1/30$. Для элемента A_5 закон распределения Вейбулла с параметрами $\alpha = 3, \lambda_5 = 0,0002$. Момент времени $t = 8$.

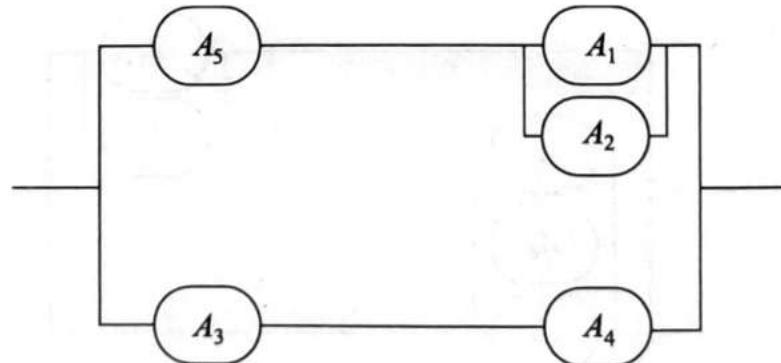


Рис. 5.18

19. Вид ССН представлен на рис. 5.19. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 равны $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/36, \lambda_3 = \lambda_4 = 1/24$. Для элемента A_5 закон распределения Вейбулла с параметрами $\alpha = 1,8, \lambda_5 = 0,002$. Момент времени $t = 9$.

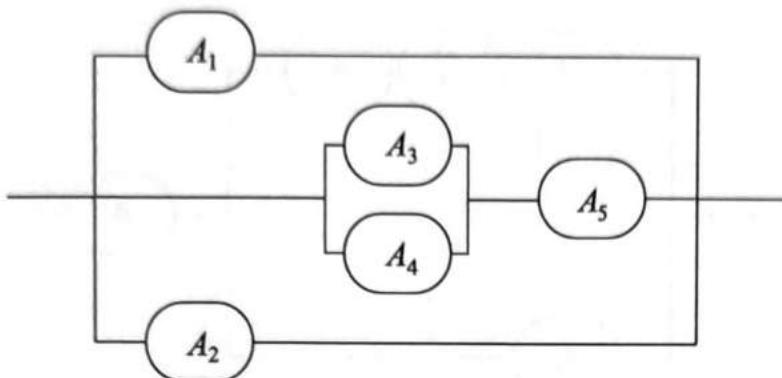


Рис. 5.19

20. Вид ССН представлен на рис. 5.20. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 составляют $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/36, \lambda_3 = \lambda_4 = 1/24$. Для элемента A_5 закон распределения усеченный нормальный с параметрами $m = 16, \sigma = 3$. Момент времени $t = 9$.

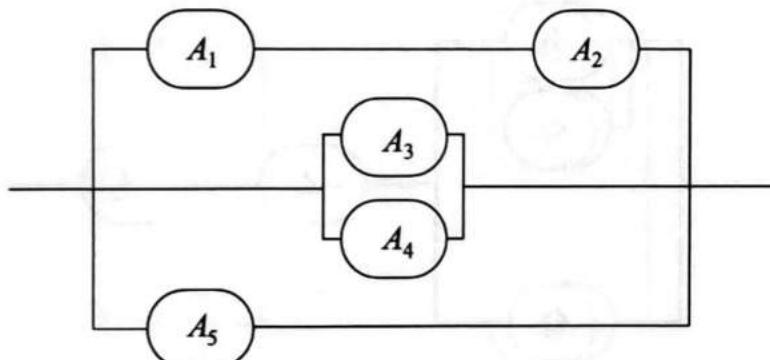


Рис. 5.20

21. Вид ССН представлен на рис. 5.21. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 равны $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/36, \lambda_3 = \lambda_4 = 1/24$. Для элемента A_5 закон распределения усеченный нормальный с параметрами $m = 15, \sigma = 2,2$. Момент времени $t = 9$.

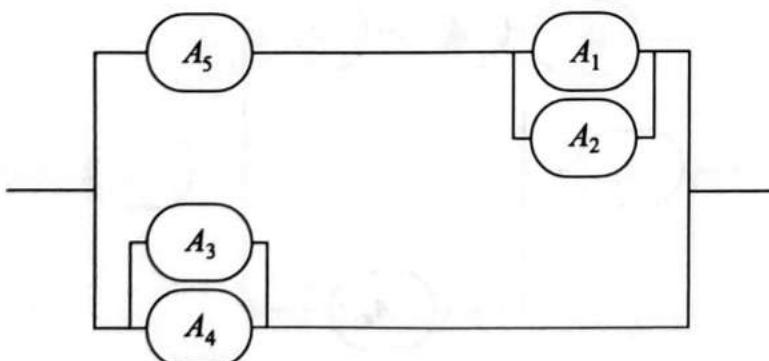


Рис. 5.21

22. Вид ССН представлен на рис. 5.22. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 составляют $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/20, \lambda_3 = \lambda_4 = 1/30$. Для элемента A_5 закон распределения Вейбулла с параметрами $\alpha = 3, \lambda_5 = 0,0002$. Момент времени $t = 8$.

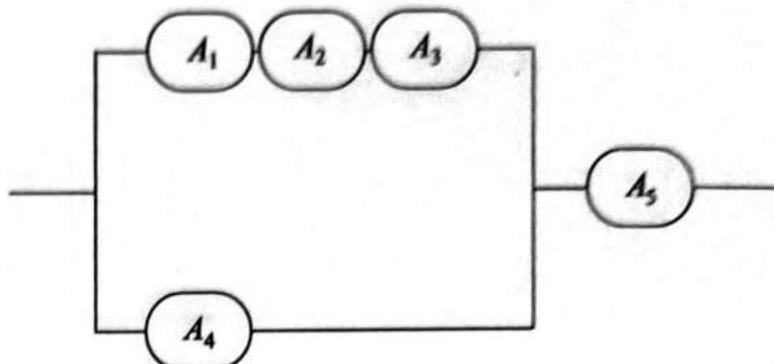


Рис. 5.22

23. Вид ССН представлен на рис. 5.23. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 равны $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/40, \lambda_3 = \lambda_4 = 1/20$. Для элемента A_5 закон распределения Вейбулла с параметрами $\alpha = 3, \lambda_5 = 0,0002$. Момент времени $t = 8$.

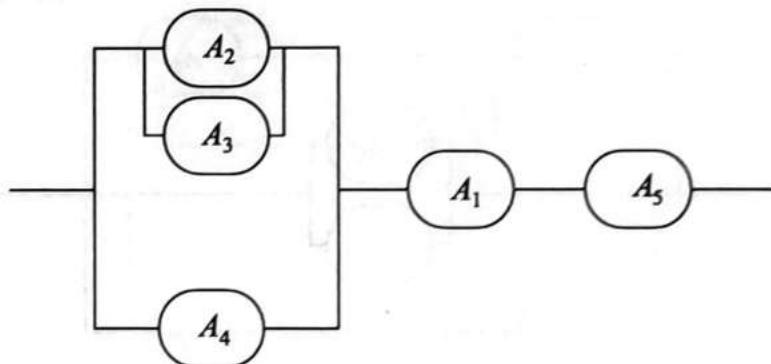


Рис. 5.23

24. Вид ССН представлен на рис. 5.24. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 составляют $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/20, \lambda_3 = \lambda_4 = 1/50$. Для элемента A_5 закон распределения усеченный нормальный с параметрами $m = 15, \sigma = 3,5$. Момент времени $t = 9$.

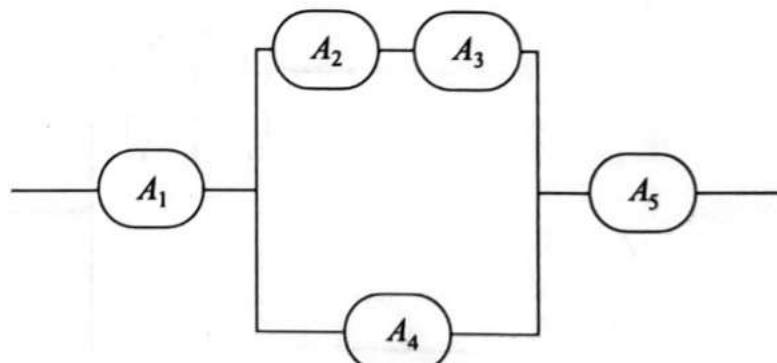


Рис. 5.24

25. Вид ССН представлен на рис. 5.25. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 равны $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/24, \lambda_3 = \lambda_4 = 1/36$. Для элемента A_5 закон распределения Вейбулла с параметрами $\alpha = 1,8, \lambda_5 = 0,0002$. Момент времени $t = 9$.

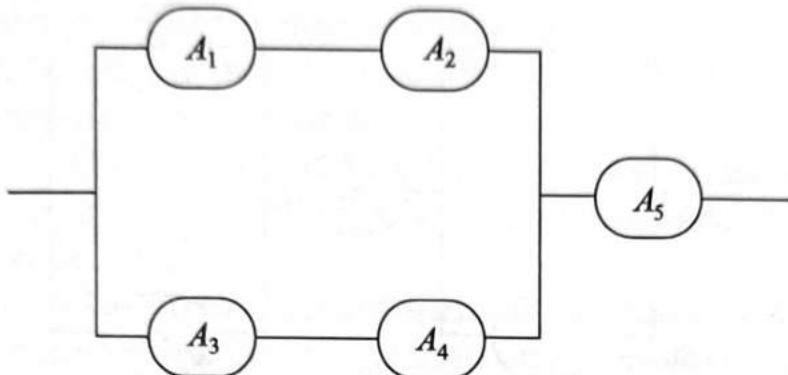


Рис. 5.25

26. Вид ССН представлен на рис. 5.26. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 составляют $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/20, \lambda_3 = \lambda_4 = 1/40$. Для элемента A_5 закон распределения усеченный нормальный с параметрами $m = 15, \sigma = 4$. Момент времени $t = 8$.

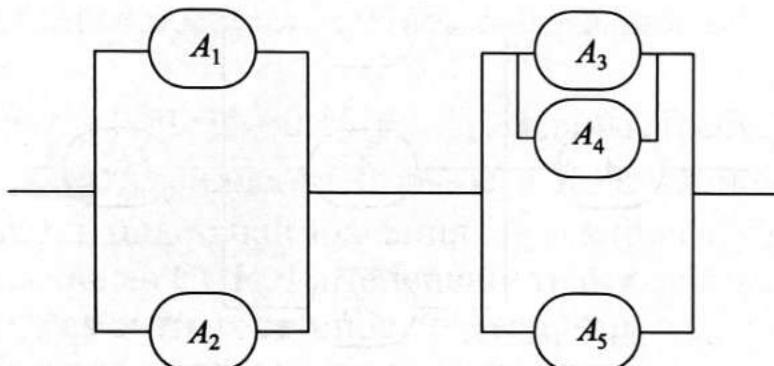


Рис. 5.26

27. Вид ССН представлен на рис. 5.27. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 равны $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/24, \lambda_3 = \lambda_4 = 1/36$. Для элемента A_5 закон распределения экспоненциальный с параметром $\lambda_5 = 1/36$. Момент времени $t = 9$.

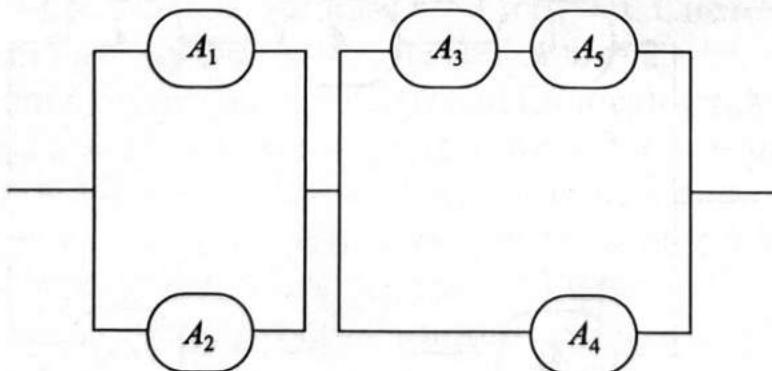


Рис. 5.27

28. Вид ССН представлен на рис. 5.28. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 составляют $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/40, \lambda_3 = \lambda_4 = 1/20$. Для элемента A_5 закон распределения Вейбулла с параметрами $\alpha = 2, \lambda_5 = 0,002$. Момент времени $t = 8$.

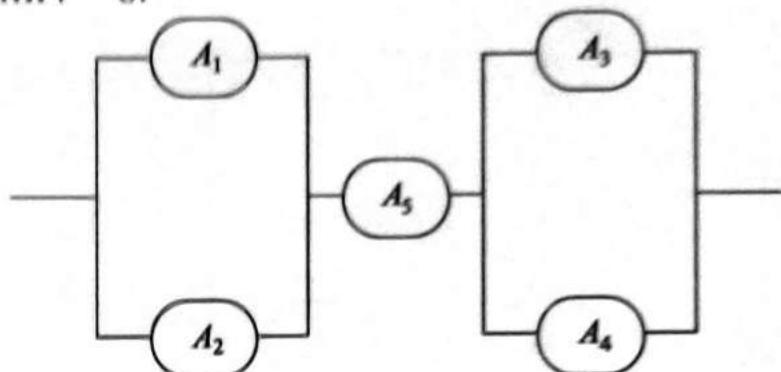


Рис. 5.28

29. Вид ССН представлен на рис. 5.29. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 равны $\lambda_1 = 1/40, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1/20$. Для элемента A_5 закон распределения усеченный нормальный с параметрами $m = 15, \sigma = 3$. Момент времени $t = 8$.

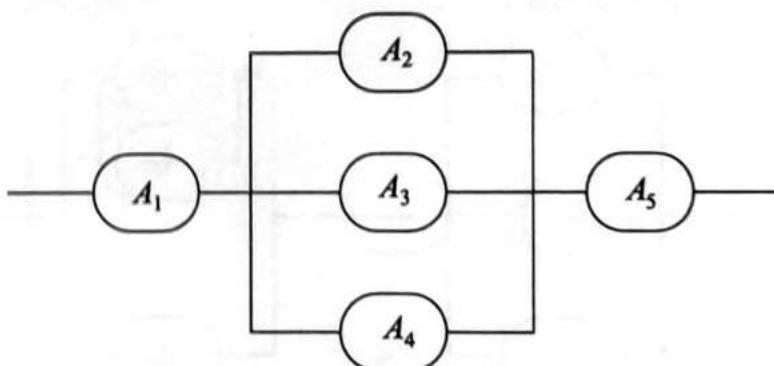


Рис. 5.29

30. Вид ССН представлен на рис. 5.30. Параметры для элементов A_1, A_2, A_3, A_4 составляют $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/36, \lambda_3 = \lambda_4 = 1/24$. Для элемента A_5 закон распределения экспоненциальный с параметром $\lambda_5 = 1/24$. Момент времени $t = 9$.

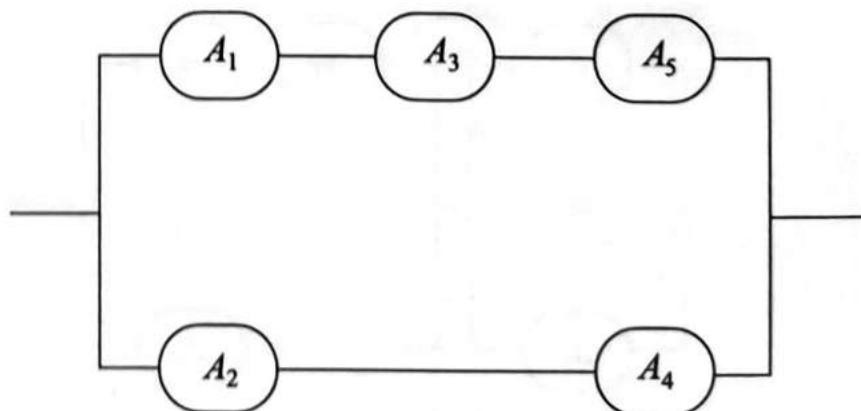


Рис. 5.30

Задача 3. Восстанавливаемая система из $n = 5$ элементов, соединенных последовательно или параллельно и работающих независимо друг от друга. Интенсивность отказа для каждого элемента λ_i , $i = 1, \dots, 5$. Число ремонтных органов r , работающих независимо друг от друга, и интенсивность восстановления j -м ремонтным органом $\mu_j = \mu$, $j = 1, \dots, r$. Для работоспособности системы необходимо не менее m исправных элементов.

В вариантах 1–17 из пяти элементов четыре имеют одинаковую интенсивность отказов λ , а один указанный элемент имеет интенсивность отказа λ' ($\lambda' \neq \lambda$).

В вариантах 18–30 при появлении отказавших элементов интенсивность отказов оставшихся элементов изменяется по правилу

$$\lambda_0 = n\lambda, \lambda_1 = (n-1)\bar{\lambda}, \lambda_2 = (n-2)\bar{\bar{\lambda}}, \lambda_3 = (n-3)\bar{\bar{\bar{\lambda}}}, \lambda_4 = (n-4)\bar{\bar{\bar{\bar{\lambda}}}}, \dots$$

Необходимо построить граф состояний и переходов системы и выписать прямую систему линейных дифференциальных уравнений для переходных вероятностей, составить систему уравнений для стационарных вероятностей и, решив ее, найти алгебраические выражения для p_j .

Значения $\lambda = 0,01$, $\lambda' = 0,15$, $\mu = 0,1$ заданы. Требуется найти числовое значение коэффициента готовности K_r в стационарном режиме работы системы, подставив значения параметров в формулы для p_j .

1. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов $\lambda_i = \lambda$, $i \neq 3$; $\lambda_3 = \lambda'$ и ремонтных органов $r = 3$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 1$.

2. Последовательная ССН. Интенсивности отказов элементов $\lambda_i = \lambda$, $i \neq 2$; $\lambda_2 = \lambda'$ и ремонтных органов $r = 4$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = M$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 5$.

Нечет **3. Параллельная ССН.** Интенсивности отказов элементов $\lambda_i = \lambda$, $i \neq 5$; $\lambda_5 = \lambda'$ и ремонтных органов $r = 1$ и $\mu_1 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 2$.

4. Последовательная ССН. Интенсивности отказов элементов $\lambda_i = \lambda$, $i \neq 4$; $\lambda_4 = \lambda'$ и ремонтных органов $r = 2$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 5$.

5. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов $\lambda_i = \lambda$, $i \neq 5$; $\lambda_5 = \lambda'$ и ремонтных органов $r = 3$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 1$.

6. Последовательная ССН. Интенсивности отказов элементов $\lambda_i = \lambda$, $i \neq 3$; $\lambda_3 = \lambda'$ и ремонтных органов $r = 3$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 5$.

7. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов $\lambda_i = \lambda$, $i \neq 4$; $\lambda_2 = \lambda'$ и ремонтных органов $r = 2$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 1$.

8. Последовательная ССН. Интенсивности отказов элементов $\lambda_i = \lambda$, $i \neq 2$; $\lambda_2 = \lambda'$ и ремонтных органов $r = 1$ и $\mu_1 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 5$.

9. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов $\lambda_i = \lambda$, $i \neq 4$; $\lambda_2 = \lambda'$ и ремонтных органов $r = 2$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 2$.

10. Последовательная ССН. Интенсивности отказов элементов $\lambda_i = \lambda$, $i \neq 1$; $\lambda_1 = \lambda'$ и ремонтных органов $r = 5$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 5$.

11. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов $\lambda_i = \lambda$, $i \neq 2$; $\lambda_2 = \lambda'$ и ремонтных органов $r = 4$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 1$.

12. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов $\lambda_i = \lambda$, $i \neq 3$; $\lambda_3 = \lambda'$ и ремонтных органов $r = 3$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 2$.

13. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов $\lambda_i = \lambda$, $i \neq 4$; $\lambda_4 = \lambda'$ и ремонтных органов $r = 2$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 3$.

14. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов $\lambda_i = \lambda$, $i \neq 2$; $\lambda_2 = \lambda'$ и ремонтных органов $r = 4$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 2$.

15. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов $\lambda_i = \lambda$, $i \neq 3$; $\lambda_3 = \lambda'$ и ремонтных органов $r = 3$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 3$.

16. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов $\lambda_i = \lambda$, $i \neq 5$; $\lambda_5 = \lambda'$ и ремонтных органов $r = 1$ и $\mu_1 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 1$.

17. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов $\lambda_i = \lambda$, $i \neq 2$; $\lambda_2 = \lambda'$ и ремонтных органов $r = 4$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 3$.

18. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов λ , $\bar{\lambda} = 0,02$, $\bar{\bar{\lambda}} = 0,03$ и ремонтных органов $r = 1$ и $\mu_1 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 1$.

19. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов λ , $\bar{\lambda} = 0,02$, $\bar{\bar{\lambda}} = 0,03$ и ремонтных органов $r = 2$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 2$.

20. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов λ , $\bar{\lambda} = 0,02$, $\bar{\bar{\lambda}} = 0,03$ и ремонтных органов $r = 2$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 1$.

21. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов λ , $\bar{\lambda} = 0,02$, $\bar{\lambda} = 0,03$ и ремонтных органов $r = 3$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 2$.

22. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов λ , $\bar{\lambda} = 0,02$, $\lambda = 0,03$ и ремонтных органов $r = 1$ и $\mu_1 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 3$.

23. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов $\lambda_1 = 0,02$, $\lambda_2 = 0,03$ и ремонтных органов $r = 4$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 2$.

24. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов λ , $\bar{\lambda} = 0,02$, $\bar{\bar{\lambda}} = 0,03$ и ремонтных органов $r = 2$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 3$.

25. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов λ , $\bar{\lambda} = 0,02$, $\bar{\bar{\lambda}} = 0,03$ и ремонтных органов $r = 4$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 1$.

26. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов λ , $\bar{\lambda} = 0,02$, $\bar{\bar{\lambda}} = 0,03$ и ремонтных органов $r = 3$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 3$.

27. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов λ , $\bar{\lambda} = 0,02$, $\bar{\bar{\lambda}} = 0,03$ и ремонтных органов $r = 1$ и $\mu_1 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 2$.

28. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов λ , $\bar{\lambda} = 0,02$, $\bar{\bar{\lambda}} = 0,03$ и ремонтных органов $r = 4$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 3$.

29. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов λ , $\bar{\lambda} = 0,02$, $\bar{\bar{\lambda}} = 0,03$ и ремонтных органов $r = 3$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 1$.

30. Параллельная ССН. Интенсивности отказов элементов λ , $\bar{\lambda} = 0,02$, $\bar{\bar{\lambda}} = 0,03$ и ремонтных органов $r = 5$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu$. Система работоспособна при исправных элементах не менее $m = 3$.

Задача 4. Получена выборка результатов измерений при испытании n образцов изделия. Для вероятности безотказной работы изделия $P = P(t)$ найти точечную оценку \hat{P} и нижнюю доверительную границу P_{γ} при заданной доверительной вероятности γ .

В вариантах 1–18 условие работоспособности изделия на некоторый момент времени имеет вид $\alpha < \xi$ (варианты 1–9) или $\xi < b$ (варианты 10–18), где ξ — определяющий параметр изделия, распределенный по нормальному закону с неизвестными параметрами m и σ .

1. Параметр $a = 3,0$, доверительная вероятность $\gamma = 0,9$, выборка измерений:

$$3,0; 3,2; 4,8; 5,0; 5,4; 6,2; 7,0.$$

2. Параметр $a = 2,8$, доверительная вероятность $\gamma = 0,95$, выборка измерений:

$$3,1; 3,2; 4,9; 5,3; 5,5; 6,1; 7,5.$$

3. Параметр $a = 2,6$, доверительная вероятность $\gamma = 0,8$, выборка измерений:

$$3,1; 3,4; 4,7; 5,2; 5,7; 6,3; 7,0.$$

4. Параметр $a = 2,4$, доверительная вероятность $\gamma = 0,95$, выборка измерений:

$$3,3; 3,5; 4,8; 5,3; 5,5; 6,6; 7,4.$$

5. Параметр $a = 2,7$, доверительная вероятность $\gamma = 0,9$, выборка измерений:

$$3,4; 4,0; 5,2; 5,6; 6,1; 6,3; 7,1; 7,6; 8,1.$$

6. Параметр $a = 2,5$, доверительная вероятность $\gamma = 0,95$, выборка измерений:

$$3,1; 4,1; 5,1; 5,8; 6,3; 6,6; 7,0; 7,3; 8,6.$$

7. Параметр $a = 2,3$, доверительная вероятность $\gamma = 0,9$, выборка измерений:

$$3,5; 4,3; 5,8; 5,9; 6,1; 6,6; 7,2; 7,7; 8,5.$$

8. Параметр $a = 2,1$, доверительная вероятность $\gamma = 0,95$, выборка измерений:

$$3,1; 4,4; 5,1; 5,8; 6,0; 6,8; 7,0; 7,8; 8,3.$$

9. Параметр $a = 1,9$, доверительная вероятность $\gamma = 0,9$, выборка измерений:

$$3,3; 4,2; 5,5; 5,7; 6,4; 6,9; 7,4; 7,9; 8,6.$$

10. Параметр $b = 7,6$, доверительная вероятность $\gamma = 0,95$, выборка измерений:

$$3,1; 3,2; 4,8; 5,3; 5,5; 6,1; 7,1.$$

11. Параметр $b = 7,8$, доверительная вероятность $\gamma = 0,8$, выборка измерений:

$$3,0; 3,2; 4,9; 5,2; 5,6; 6,4; 7,0.$$

12. Параметр $b = 8,0$, доверительная вероятность $\gamma = 0,95$, выборка измерений:

$$3,2; 3,8; 4,8; 5,7; 5,9; 6,1; 7,2.$$

13. Параметр $b = 8,2$, доверительная вероятность $\gamma = 0,9$, выборка измерений:

$$3,4; 3,5; 4,4; 5,0; 5,5; 6,7; 7,7.$$

14. Параметр $b = 8,4$, доверительная вероятность $\gamma = 0,95$, выборка измерений:

$$3,1; 3,2; 4,1; 5,3; 5,5; 6,9; 7,0.$$

15. Параметр $b = 9,4$, доверительная вероятность $\gamma = 0,9$, выборка измерений:

$$3,5; 4,3; 5,1; 5,2; 6,1; 6,6; 7,0; 7,9; 8,6.$$

16. Параметр $b = 9,5$, доверительная вероятность $\gamma = 0,8$, выборка измерений:

$$3,5; 4,3; 5,1; 5,2; 6,1; 6,6; 7,0; 7,9; 8,6.$$

17. Параметр $b = 9,7$, доверительная вероятность $\gamma = 0,9$, выборка измерений:

$$3,3; 4,1; 5,2; 5,8; 6,5; 6,6; 7,7; 7,8; 8,5.$$

18. Параметр $b = 9,9$, доверительная вероятность $\gamma = 0,8$, выборка измерений:

$$3,2; 4,2; 5,0; 5,4; 6,1; 6,7; 7,5; 7,6; 8,1.$$

В вариантах 19–30 наработка изделия до отказа ξ подчиняется экспоненциальному закону распределения с неизвестным параметром λ .

Испытания проведены по планам $[n, B, T]$ или $[n, B, r]$. Найти статистические оценки на момент времени t .

19. План испытаний $[n, B, T]$ при $n = 5$ и $T = 10$. Выборка измерений:

$$x_1 = 5,2; x_2 = 6,4.$$

Доверительная вероятность $\gamma = 0,95$, момент времени $t = 7$.

20. План испытаний $[n, B, r]$ при $n = 10$ и $r = 2$. Выборка измерений:

$$x_1 = 4,6; x_2 = 5,2.$$

Доверительная вероятность $\gamma = 0,8$, момент времени $t = 3$.

21. План испытаний $[n, B, T]$ при $n = 5$ и $T = 10$. Выборка измерений:

$$x_1 = 5,8; x_2 = 6,2; x_3 = 8,4.$$

Доверительная вероятность $\gamma = 0,9$, момент времени $t = 5$.

22. План испытаний $[n, B, r]$ при $n = 10$ и $r = 3$. Выборка измерений:

$$x_1 = 3,5; x_2 = 3,6; x_3 = 3,9.$$

Доверительная вероятность $\gamma = 0,95$, момент времени $t = 2$.

23. План испытаний $[n, B, T]$ при $n = 5$ и $T = 3$. Выборка измерений:

$$x_1 = 4,6; x_2 = 5,3; x_3 = 6,7; x_4 = 8,1.$$

Доверительная вероятность $\gamma = 0,99$, момент времени $t = 6$.

24. План испытаний $[n, B, r]$ при $n = 8$ и $r = 3$. Выборка измерений:

$$x_1 = 3,2; x_2 = 3,5; x_3 = 4,8.$$

Доверительная вероятность $\gamma = 0,8$, момент времени $t = 4$.

25. План испытаний $[n, B, T]$ при $n = 10$ и $T = 5$. Выборка измерений:

$$x_1 = 3,2; x_2 = 4,6.$$

Доверительная вероятность $\gamma = 0,9$, момент времени $t = 5$.

26. План испытаний $[n, B, r]$ при $n = 5$ и $r = 2$. Выборка измерений:

$$x_1 = 5,6; x_2 = 6,2.$$

Доверительная вероятность $\gamma = 0,8$, момент времени $t = 4$.

27. План испытаний $[n, B, T]$ при $n = 10$ и $T = 5$. Выборка измерений:

$$x_1 = 3,6; x_2 = 4,2; x_3 = 4,7.$$

Доверительная вероятность $\gamma = 0,99$, момент времени $t = 3$.

28. План испытаний $[n, B, r]$ при $n = 2$ и $r = 2$. Выборка измерений:

$$x_1 = 4,2; x_2 = 4,8.$$

Доверительная вероятность $\gamma = 0,95$, момент времени $t = 6$.

29. План испытаний $[n, B, T]$ при $n = 10$ и $T = 5$. Выборка измерений:

$$x_1 = 2,3; x_2 = 2,8; x_3 = 3,5; x_4 = 4,5.$$

Доверительная вероятность $\gamma = 0,9$, момент времени $t = 1$.

30. План испытаний $[n, B, r]$ при $n = 5$ и $r = 2$. Выборка измерений:

$$x_1 = 5,4; x_2 = 5,6.$$

Доверительная вероятность $\gamma = 0,95$, момент времени $t = 2$.

Литература

- Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. В 3 т. Т. 1. Функция Лежандра. Гипергеометрическая функция. 2-е изд. М.: Наука, 1973. 297 с.
- Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. 8-е изд., испр. и доп. М.: Едиториал УРСС, 2005. 448 с.
- Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.* Математические методы в теории надежности: основные характеристики надежности и их статистический анализ. М.: Наука, 1965. 584 с.
- Горянинов В.Б., Павлов И.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М.* Математическая статистика: учебник для вузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. 3-е изд., испр. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 423 с.
- Ефимов А.В., Каракулин А.Ф., Поспелов А.С.* Сборник задач по математике: учеб. пособие для вузов. В 4 ч. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика. 5-е изд., перераб. М: Физматлит, 2007. 544 с.
- Калинкин А.В.* Схемы взаимодействий: детерминированные и стохастические модели: методические указания к выполнению типового расчета по курсу «Дополнительные главы теории случайных процессов». М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 44 с.
- Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М., Бочаров П.П., Козлов Н.Е.* Теория вероятностей: учебник для вузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. 3-е изд., испр. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 455 с.
- Садыхов Г.С., Савченко В.П., Сидняев Н.И.* Модели и методы оценки остаточного ресурса изделий радиоэлектроники. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 382 с.
- Gnedenko B.V., Pavlov I.V., Ushakov I.A.* Statistical reliability engineering. N.Y.: John Wiley, 2006. 517 p.

Приложение

Значения гамма-функции $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ представлены в табл.
 П.1. $\Gamma(n) = (n-1)!$, если $n = 1, 2, 3 \dots$. При $x > 2$ используют формулу
 $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$. Например,

$$\Gamma(4,7) = 3,7 \cdot 2,7 \cdot 1,7 \cdot \Gamma(1,7) \approx 3,7 \cdot 2,7 \cdot 1,7 \cdot 0,9086 \approx 15,43.$$

Таблица П.1

x	$\Gamma(x)$								
1,00	1,0000	—	—	—	—	—	—	—	—
1,01	0,9943	1,21	0,9156	1,41	0,8868	1,61	0,8947	1,81	0,9341
1,02	0,9888	1,22	0,9131	1,42	0,8864	1,62	0,8952	1,82	0,9368
1,03	0,9835	1,23	0,9108	1,43	0,8860	1,63	0,8972	1,83	0,9397
1,04	0,9784	1,24	0,9085	1,44	0,8858	1,64	0,8986	1,84	0,9426
1,05	0,9735	1,25	0,9064	1,45	0,8857	1,65	0,9001	1,85	0,9456
1,06	0,9687	1,26	0,9044	1,46	0,8856	1,66	0,9017	1,86	0,9487
1,07	0,9641	1,27	0,9025	1,47	0,8856	1,67	0,9033	1,87	0,9518
1,08	0,9597	1,28	0,9007	1,48	0,8857	1,68	0,9050	1,88	0,9551
1,09	0,9555	1,29	0,8990	1,49	0,8859	1,69	0,9068	1,89	0,9584
1,10	0,9514	1,30	0,8975	1,50	0,8862	1,70	0,9086	1,90	0,9618
1,11	0,9474	1,31	0,8960	1,51	0,8866	1,71	0,9106	1,91	0,9652
1,12	0,9434	1,32	0,8946	1,52	0,8870	1,72	0,9126	1,92	0,9688
1,13	0,9399	1,33	0,8934	1,53	0,8876	1,73	0,9147	1,93	0,9724
1,14	0,9364	1,34	0,8922	1,54	0,8882	1,74	0,9168	1,94	0,9761
1,15	0,9330	1,35	0,8912	1,55	0,8889	1,75	0,9191	1,95	0,9799
1,16	0,9298	1,36	0,8902	1,56	0,8896	1,76	0,9214	1,96	0,9837
1,17	0,9267	1,37	0,8897	1,57	0,8965	1,77	0,9236	1,97	0,9877
1,18	0,9237	1,38	0,8885	1,58	0,8914	1,78	0,9262	1,98	0,9917
1,19	0,9209	1,39	0,8879	1,59	0,8924	1,79	0,9288	1,99	0,9958
1,20	0,9182	1,40	0,8873	1,60	0,8935	1,80	0,9314	2,00	1,0000

Значения функции распределения нормального закона $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ представлены в табл. П.2.

Таблица П.2

x	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08
0,0	0,5000	0,5080	0,5160	0,5239	0,5319
0,1	0,5398	0,5478	0,5557	0,5636	0,5714
0,2	0,5793	0,5871	0,5948	0,6062	0,6301
0,3	0,6179	0,6255	0,6331	0,6406	0,6480
0,4	0,6554	0,6628	0,6700	0,6772	0,6844
0,5	0,6915	0,6985	0,7054	0,7123	0,7190
0,6	0,7257	0,7324	0,7389	0,7454	0,7517
0,7	0,7580	0,7642	0,7704	0,7764	0,7823
0,8	0,7881	0,7939	0,7995	0,8051	0,8106
0,9	0,8159	0,8212	0,8264	0,8315	0,8365
1,0	✓ 0,8413	0,8461	0,8508	0,8554	0,8599
1,1	0,8643	0,8686	0,8729	0,8770	0,8810
1,2	0,8849	0,8888	0,8925	0,8962	0,8997
1,3	0,9032	0,9066	0,9099	0,9131	0,9162
1,4	0,9192	0,9222	0,9251	0,9279	0,9306
1,5	0,9332	0,9357	0,9382	0,9406	0,9429
1,6	0,9452	0,9474	0,9495	0,9515	0,9535
1,7	0,9554	0,9573	0,9591	0,9608	0,9625
1,8	0,9641	0,9656	0,9671	0,9686	0,9699
1,9	0,9713	0,9726	0,9738	0,9750	0,9761
2,0	0,9772	0,9783	0,9793	0,9803	0,9812
2,1	0,9821	0,9830	0,9838	0,9846	0,9854
2,2	0,9861	0,9868	0,9875	0,9881	0,9887
2,3	0,9893	0,9898	0,9904	0,9909	0,9913
2,4	0,9918	0,9922	0,9927	0,9931	0,9934
2,5	0,9938	0,9941	0,9945	0,9948	0,9951
2,6	0,9953	0,9956	0,9959	0,9961	0,9963
2,7	0,9965	0,9967	0,9969	0,9971	0,9973
2,8	0,9974	0,9976	0,9977	0,9979	0,9980
2,9	0,9981	0,9982	0,9984	0,9985	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990

Квантили хи-квадрат распределения представлены в табл. П.3, где $\chi_{\gamma}^2(k)$ — числа, удовлетворяющие равенству

$$\frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \int_0^{\chi_{\gamma}^2(k)} t^{k/2-1} e^{-t/2} dt = \gamma.$$

Здесь k — число степеней свободы; γ — доверительная вероятность.

Таблица П.3

k	$\gamma = 0,80$	$\gamma = 0,90$	$\gamma = 0,95$	$\gamma = 0,99$	$\gamma = 0,999$
1	1,64	2,71	3,84	6,63	10,8
2	3,22	4,61	5,99	9,21	13,8
3	4,64	6,25	7,81	11,3	16,3
4	5,99	7,78	9,49	13,3	18,5
5	7,29	9,24	11,1	15,1	20,5
6	8,56	10,6	12,6	16,8	22,5
7	9,80	12,0	14,1	18,5	24,3
8	11,0	13,4	15,5	20,1	26,1
9	12,2	14,7	16,9	21,7	27,9
10	13,4	16,0	18,3	23,2	29,6
11	14,6	17,3	19,7	24,7	31,3
12	15,8	18,5	21,0	26,2	32,9
13	17,0	19,8	22,4	27,7	34,5
14	18,2	21,1	23,7	29,1	36,1
15	19,3	22,3	25,0	30,6	37,7
16	20,5	23,5	26,3	32,0	39,3
17	21,6	24,8	27,6	33,4	40,8
18	22,8	26,0	28,9	34,8	42,3
19	23,9	27,2	30,1	36,2	43,8
20	25,0	28,4	31,4	37,6	45,3
21	26,9	29,6	32,7	38,9	46,8
22	27,3	30,8	33,9	40,3	46,3
23	28,4	32,0	35,2	41,6	49,7
24	29,6	33,2	36,4	43,0	51,2
25	30,7	34,4	37,7	44,3	52,6

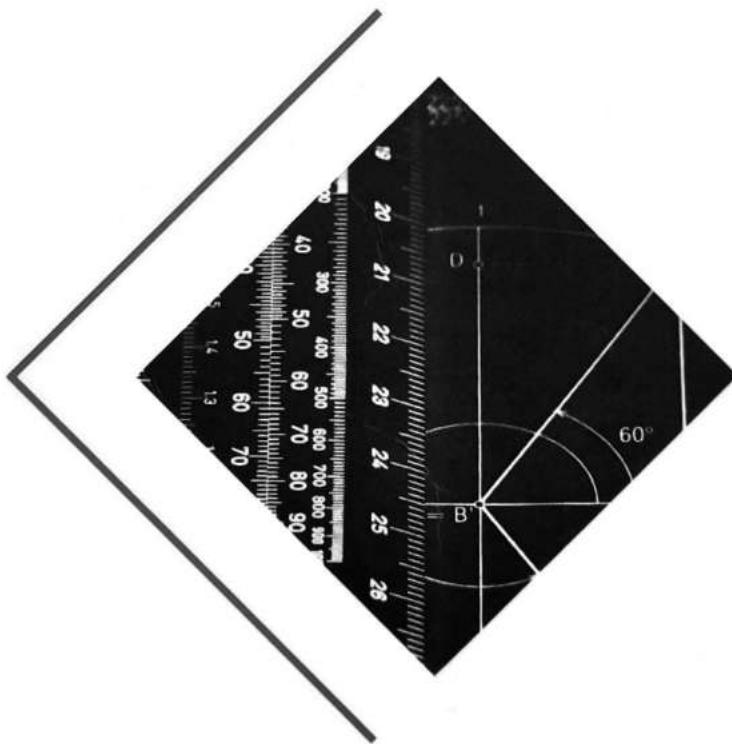
Содержание

Предисловие	3
1. Показатели надежности элемента	4
1.1. Основные понятия	4
1.2. Показатели надежности невосстанавливаемого элемента	4
2. Расчет надежности невосстанавливаемых систем	11
2.1. Структурная схема надежности	11
2.2. Расчет надежности при последовательном соединении элементов	12
2.3. Расчет надежности при параллельном соединении элементов	13
2.4. Примеры расчета надежности невосстанавливаемых систем	14
3. Расчет надежности восстанавливаемых систем в стационарном режиме	16
3.1. Уравнения марковских процессов	16
3.2. Восстанавливаемые системы и процесс рождения и гибели	18
3.3. Последовательное соединение равнонадежных элементов	20
3.4. Параллельное соединение равнонадежных элементов	22
3.5. Системы из разнонадежных элементов	23
4. Статистическое оценивание показателей надежности	27
4.1. Нормальный закон распределения	27
4.2. Экспоненциальный закон распределения	29
5. Типовой расчет	33
Литература	52
Приложение	53

**Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана**

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Высшая математика»

Представлены необходимые теоретические сведения и методические указания к решению задач по математическим методам теории надежности. Рассмотрены варианты задач типового расчета, для решения которых приведены справочные данные в таблицах.



www.baumanpress.ru
ISBN 978-5-7038-4609-4

9 785703 846094

