STANDARD PROBLEMS FOR MARKOV PROCESSES OF BIRTH AND DEATH OF QUADRATIC TYPE

A. Kalinkin[1]

[1]*Bauman Moscow State Technical University*

The report contains 26 different model calculations for the special course «Additional chapters of the theory of stochastic processes».

Markov processes, discrete phase space, continuous time, the kinetic scheme, the interaction of the particles, the Monte Carlo method.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО МАРКОВСКИМ ПРОЦЕССАМ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ КВАДРАТИЧНОГО ТИПА

Калинкин А.В.[1]

[1] *Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, kalinkin@mx.bmstu.ru*

В докладе приводятся 26 вариантов типового расчета по специальному курсу «Дополнительные главы теории случайных процессов».

Марковские процессы, дискретное фазовое пространство, непрерывное время, кинетические схемы, взаимодействие частиц, метод Монте-Карло.

1. Содержание специального курса

В Московском государственном техническом университете им. Н.Э.Баумана с 1998/1999 учебного года читается обязательный годовой курс «Дополнительные главы теории случайных процессов» для студентов специальности «Прикладная математика» факультета «Фундаментальные науки». В первой половине курса излагаются основы аналитического метода для марковских процессов с дискретными состояниями. Рассматриваются одномерные и многомерные процессы рождения и гибели линейного типа, соответствующие кинетическим схемам (см. [2], [11], [13], [6] и др.): T1 → T2 (мономолекулярная); T1 → T2 → ... → Tn (последовательная); T1 → T2, T3 (параллельная); T1 → T2; T2 → T3, T4 (последовательно-параллельная); T1 → T2 → ... → Tn → T1 (простая циклическая); T → 2T (автокатализ); T → kT, k=0, 1, 2,... (цепная с ветвлением); 0 → T; T → 0 (система массового обслуживания $M/M/\infty$). Во второй половине курса рассматриваются процессы рождения и гибели квадратичного типа, соответствующие кинетическим схемам с парными взаимодействиями: T1+T2 → T3 (бимолекулярная); T1+T2 → T4; T1+T3 → T5 (параллельная); T1+T2 → T3; T3 → T1+T2 (двусторонняя); T1+T2 → T2+T3 (катализ) и другие.

В случае процессов линейного типа при решении уравнений Колмогорова для переходных вероятностей используется аппарат производящих функций и методы теории марковских ветвящихся процессов [11] – дается типовой расчет [8] по явным решениям таких уравнений. В случае процессов квадратичного типа возможно изложить только численные методы – итерационный алгоритм моделирования на ЭВМ марковских процессов с дискретными состояниями и метод статистических испытаний.

2. Варианты типового расчета и выполняемое задание

1. 2T → T; T → 0, 2T (квазистационарное распределение [22])
2. 3T → 2T; 2T → 3T; T → 0; 0 → T (бистабильная система [4]).
3. 2T1 → T2; T2 → 0, T1 (два поглощающих состояния).
4. T1+T2 → 0, T1, 2T1; T1 → 0 (размножение нейтронов с выгоранием топлива [5]).
5. 2T1+T2 → 3T1; T1 → 0, 2T2; 0 → T1 (брюсселятор [10], [7]).

6. T1+T2 → T2+T4; T1 → 0; 0 → T1 (катализ [13]).
7. T1+T2 → T4; T4 → T3 (короткоживущее промежуточное соединение [4]).
8. T1+T2 → T1; T1 → 0 (эпидемия Вейса [23], [6]).
9. T1+T2 → T1; T1 → 0, 2T1 (эпидемия Вейса с размножением переносчиков [17]).
10. T1+T2 → T1; T1 → 0; 0 → T1, T2 (открытая эпидемия Вейса [17]).
11. T1+T2 → 2T1; T1 → 0 (эпидемия Бартлетта–Мак-Кендрика [1], [14]).
12. T1+T2 → 2T1; T1 → 0; 0 → T2 (повторяющаяся эпидемия [1], [3]).
13. T1+T2 → 2T1; T1 → 0; T2 → 0; 0 → T1, T2 (общая эпидемия [15]).
14. T1+T2 → 2T1; T1 → T3, T2+T3 (замкнутая эпидемия).
15. T1+T3 → T1; T2+T3 → T2; T1 → 0; T2 → 0 (эпидемия Беккера [17]).
16. T1+T2 → T1+T3; T1+T3 → T1; T1 → 0 (эпидемия Гани [18]).
17. T1+T2 → T1; T1 → 0; T2 → T3; 0 → T1 [16].
18. T1+T2 → 2T1; T1 → T3; T3 → T2 (эпидемия с приобретением иммунитета [21]).
19. T1+T2 → T1+2T2; T1 → 2T1 (система «носитель-паразит» [17]).
20. T1+T2 → 2T1; T1 → 0; T2 → 2T2 (трехпараметрическая система «хищник-жертва» [4], [15], [6]).
21. T1+T2 → 0, 2T1; T1 → 0; T2 → 2T2 (четырехпараметрическая система «хищник-жертва» [19], [20]).
22. T1+T2 → 0, 2T1; T1 → 0; T2 → 2T2; 0 → T1 (система с иммиграцией [19]).
23. T1+T2 → T1, T2; 2T1 → T1; 2T2 → T2; T1 → 2T1; T2 → 2T2 (конкуренция двух видов [15], [19]).
24. T1+T2 → T1, T2; T1 → 2T1; T2 → 2T2 (взаимодействие двух видов [15]).
25. T1+T2 → T2; T1 → 0, 2T1; T2 → 0, 2T2; 0 → T1, T2 [16].
26. T1+T2 → T3; T3 → T2+T4; 0 → T1 (система массового обслуживания [9], [12]).

Замечание. В вариантах 2 и 5 даны кинетические схемы взаимодействий, соответствующие марковским процессам рождения и гибели кубического типа.

В первой части типового расчета студентом создаются и отлаживаются на ЭВМ численные модели. По схеме взаимодействий марковского процесса выписываются первое и второе уравнения Колмогорова для производящих функций переходных вероятностей [6], [8]. Из второго уравнения «термодинамическим предельным переходом» (при большом числе частиц) выводятся (см. [1], [2], [8] и др.) дифференциальные уравнения детерминированной модели кинетической схемы. Находятся точки стационарности системы дифференциальных уравнений и проводится их анализ на устойчивость.

Дается наглядное графическое описание скачков процесса рождения и гибели на фазовом пространстве и выписываются вероятностные распределения времени нахождения процесса в точке. На этой основе составляются программы в одном из пакетов Matlab, Maple, Mathematica. Графики траекторий в зависимости от времени t, для детерминированной модели даются стандартной подпрограммой метода Рунге-Кутта, для марковского процесса реализации строятся методом Монте-Карло. Выводятся графики детерминированных и стохастических траекторий на фазовых плоскостях [7].

Рассматриваются наличие иммиграции, поглощающих состояний – финального распределения, (квази)стационарного распределения, возможность ухода случайного процесса на бесконечность. Экспериментально определяется порядок начального состояния, при котором стохастические реализации близки к детерминированным траекториям (если такая близость имеется). Анализируется поведение детерминированной модели и стохастического процесса при $t \to \infty$.

Во второй части типового расчета строится одномерная или двумерная гистограмма финального распределения или (квази)стационарного распределения – путем многократного повторения численного моделирования (при большом промежутке времени моделирования $t \in [0,T]$). Статистическими экспериментами исследуется изменение гистограммы в зависимости от одного из параметров (один из параметров интенсивности или начальное число частиц – по указанию преподавателя). Возможны значения параметров, когда гистограмма близка к плотности нормального закона, или плотности показательного распределения, или другому известному вероятностному распределению? Для некоторых схем формулируются специальные вопросы о поведении марковского процесса (варианты 3, 12, 19, 20, 22).

Литература

1. *Бартлетт М.С.* Введение в теорию случайных процессов. М.: ИЛ, 1958. – 384 с.
2. *Баруча-Рид А.Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969. – 512 с.
3. *Бейли Н.* Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970. – 326 с.
4. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Наука, 1986.
5. *Дорогов В.И., Чистяков В.П.* Вероятностные модели превращения частиц. М.: Наука, 1988. – 112 с.
6. *Калинкин А.В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием // Успехи математических наук. 57, вып. 2 (2002). С. 23–84.
7. *Калинкин А.В., Ланге А.М., Мастихин А.В., Шапошников А.А.* Численные методы Монте-Карло для моделирования схем взаимодействий при дискретных состояниях // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Серия «Естественные науки». 2(17) (2005). С. 53–74.
8. *Калинкин А.В.* Схемы взаимодействий: детерминированные и стохастические модели. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008. – 44 с. Архивировано: hoster.bmstu.ru/~kalinkin
9. *Лисицина М.В.* Система массового обслуживания с подвижными приборами // Студенческий научный вестник. Сборник тезисов докладов студенческой научно-технической конференции. М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2006. Т. 3. С. 129–130.
10. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. – 512 с.
11. *Севастьянов Б.А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971. – 436 с.
12. *Сергеев А.А.* Предельные теоремы для случайных процессов, характеризующих работу системы массового обслуживания с подвижными приборами // Обозрение прикладной и промышленной математики. 12, вып. 3 (2005). С. 680.
13. *Эмануэль Н.М., Кнорре Д.Г.* Курс химической кинетики. М.: Высшая школа, 1974.
14. Эпидемии процесс // Математическая энциклопедия. Т. 5. М.: Советская энциклопедия. 1985. Кол. 1008.
15. *Anderson W.J.* Continuous-time markov chains: an application-oriented approach. New York: Springer, 1991. – 340 p.
16. *Becker N.G.* A stochastic model for two interacting populations // J. Appl. Prob. 7, no. 3 (1970). P. 544–564.
17. *Becker N.G.* Interactions between species: some comparisons between deterministic and stochastic models // Rocky Mountain J. Math. 4, no. 1 (1973). P. 53–68.
18. *Gani J.* Approaches to the modelling of AIDS // Lecture notes in biomathematics. V. 86. Stochastic processes in epidemic theory. Heidelberg: Springer. 1990. P. 145–154.
19. *Gause G.F.* The Struggle for Existense. Baltimore: Williams and Wilkins, 1934. – 163 p. Перепечатано: *Гаузе Г.Ф.* Борьба за существование. Ижевск: ИКИ, 2002. – 160 с.
20. *Hitchcock S.E.* Extinction probabilities in predator-prey models // J. Appl. Prob. 23, no. 1 (1986). P. 1–13.
21. *Kendall D.G.* Deterministic and stochastic epidemics in closed populations // Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1954–1955. Berkeley and Los Angeles: University of California Press, 1956. V. 4. P. 149–165.
22. *Sirl D.* Limiting conditional distributions for a class of autocatalytic chemical reactions // Centre of Excellence for Mathematics and Statistics of Complex Systems. Brisbane: University of Queensland Press, 2004. – 8 p.
23. *Weiss G.* On the spread of epidemics by carries // Biometrics. 21, no. 2 (1965). P. 481–490.