Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

**Методические указания**

**Р.С. Исмагилов, А.В. Калинкин, В.В. Станцо**

# НЕЛИНЕЙНОЕ И ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Р.С. Исмагилов, А.В. Калинкин, В.В. Станцо

# НЕЛИНЕЙНОЕ И ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

*Методические указания
к выполнению типового расчета*

Под редакцией *Р.С. Исмагилова*

Москва
Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана
2007

УДК 519.85
ББК 22.18
И87

Рецензент *А.Н. Канатников*

**Исмагилов Р.С., Калинкин А.В., Станцо В.В.**

И87 Нелинейное и динамическое программирование: Метод. указания к выполнению типового расчета / Под ред. Р.С. Исмагилова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 42 с.: ил.

Представлены необходимые теоретические сведения для решения задач по нелинейному и динамическому программированию. Приведены соответствующие примеры, даны условия типового расчета.

Для студентов факультетов ИБМ, РК, ФН МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Ил. 9. Табл. 2. Библиогр. 10 назв.

**УДК 519.85**
**ББК 22.18**

Математическое программирование — это совокупность методов решения широкого круга оптимизационных задач, имеющих важное прикладное значение. Традиционные методы математического анализа, основанные на известных признаках точек экстремума [5], оказываются здесь малоэффективными. Мы изложим некоторые подходы к этим задачам (графический метод, метод Куна—Таккера, метод динамического программирования [1, 2, 3]) с иллюстрирующими примерами. Этих сведений достаточно для решения задач типового расчета. Вопросы, связанные с линейным программированием, в данной работе лишь затронуты, и для решения задач на эту тему читатель должен обратиться к учебной литературе [6, 9, 10]. Полезно предварительно ознакомиться (например, по учебному пособию [6], гл. 16, § 3, 4, а также [1]) с основными понятиями, связанными с математическим программированием.

## 1. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

**Постановка задачи математического программирования.** Приведем основные определения, связанные с математическим программированием. Пусть $R^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in (-\infty, \infty),\ i = 1, \ldots, n\}$ — множество всех $n$-компонентных векторов. Задачей математического программирования является поиск глобального экстремума (т. е. минимума или максимума) целевой функции на допустимом множестве:

$$f(x) \to \mathrm{extr}, \qquad x \in D. \tag{1.1}$$

*Целевой функцией* называют функцию $f(x),\ x \in D$, где $D \subset \subset R^n$ — произвольное замкнутое подмножество множества $R^n$;

множество $D$ называют *допустимым*. Допустимое множество $D$ задается различными способами; часто полагают, что $x \in D$, когда выполнены условия

$$g_i(x) = b_i, \quad i = 1, \ldots, k, \qquad g_i(x) \leqslant b_i, \quad i = k+1, \ldots, l, \tag{1.2}$$

где $g_i(x)$ — заданные функции и $b_i$ — константы, $i = 1, \ldots, l$. Задачи математического программирования разделяются на различные типы в зависимости от вида функций $f(x)$, $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, l$ [1]. Задача (1.1)—(1.2) называется задачей *нелинейного программирования*, если среди функций $f(x)$, $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, l$, имеется нелинейная функция.

Искомый экстремум (т. е. точку, в которой целевая функция принимает максимальное или минимальное значение), обозначают через $x^*$, а экстремальное значение функции (т. е. величину $f(x^*)$) — через $f^*$.

В задаче нелинейного программирования (1.1)—(1.2), где функции $f(x)$, $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, l$ определены на множестве $D \subset R^n$, как правило, предполагается, что эти функции непрерывны на множестве $D$. Разрешимость задачи (1.1)—(1.2) обеспечивается следующей теоремой.

**Т е о р е м а 1.** *Непрерывная функция, определенная на ограниченном замкнутом множестве из пространства $R^n$, достигает на нем своих максимума и минимума.*

Множество, заданное системой ограничений (1.2) с непрерывными функциями $g_i(x)$, всегда замкнуто (т. е. содержит все точки своей границы). Ограниченность допустимого множества в прикладных задачах обеспечивается естественными соображениями.

П р и м е р 1.1 ([5], задача 5.143). Найти наибольшее и наименьшее значение функции на указанном отрезке:

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 \to \text{extr}, \quad x \in D, \quad D = [-2, 2].$$

Р е ш е н и е. Из уравнения $f'(x) = -4x^3 + 4x = 0$ находим точки стационарности функции: $-1$, 0, 1. Определив интервалы убывания и интервалы возрастания функции, строим ее график (рис. 1). Экстремум непрерывной функции достигается или в точке стационарности, или на концах отрезка $D$:

$$f^*_{\min} = \min\{f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)\} = -6, \quad x^*_{\min} = 2,$$
$$f^*_{\max} = \max\{f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)\} = 1, \quad x^*_{\max} = 1.$$

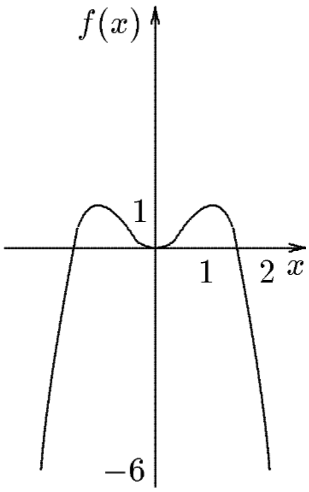


**Рис. 1**

Пример 1.1 иллюстрирует основную особенность задачи математического программирования: экстремум функции может достигаться в точке, лежащей на границе допустимого множества. Для нахождения точки $x^*$ в математическом программировании имеются специальные методы.

**Графический метод.** Если допустимое множество $D$ является подмножеством одного из множеств $R^1$, $R^2$ или $R^3$, то возможно решение задачи математического программирования графическим методом. Пусть для определенности $D \subset R^2$ (рис. 2). Для целевой функции $f(x_1, x_2)$ изобразим на координатной плоскости $x_1 0 x_2$ линии уровня, задаваемые уравнениями $f(x_1, x_2) = C_k$ при различных значениях $C_0 < C_1 < C_2 < \ldots$ . Вектор градиента $\operatorname{grad} f = (f'_{x_1}, f'_{x_2})$ указывает направление наибольшего роста функции $f(x_1, x_2)$ в данной точке и ортогонален к линии уровня, проходящей через эту точку.

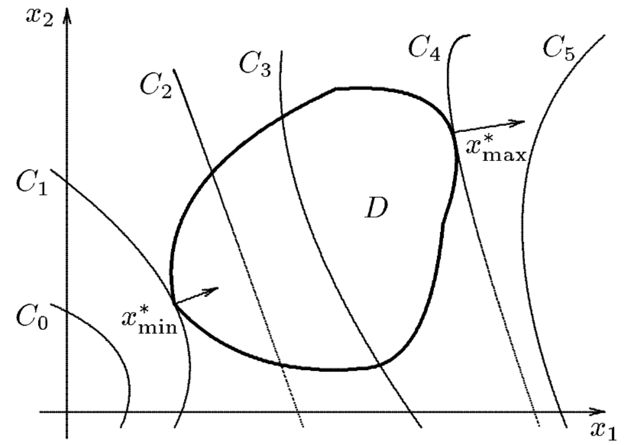


**Рис. 2**

Для отыскания, например минимума функции на множестве $D$ следует найти такую линию уровня $f(x_1, x_2) = C_1$, что она пересекается с областью $D$, но для любого значения $C_0 < C_1$ линия уровня $f(x_1, x_2) = C_0$ уже не пересекается с $D$. По рис. 2 заключаем, что минимум целевой функции на множестве $D$ достигается в точке $x^*_{\min}$, $f^*_{\min} = C_1$. Максимум целевой функции достигается в точке $x^*_{\max}$, $f^*_{\max} = C_4$.

Допустим, что граница области $D$ и линия уровня $f(x_1, x_2) = C_1$ являются гладкими кривыми в окрестности точки $x^*_{\min}$. Нетрудно показать, что они касаются друг друга в точке $x^*_{\min}$, т. е. имеют общую касательную прямую. В примере 1.2 этот факт используется при нахождении точки минимума. Кроме того, в точке $x^*_{\min}$ при указанных выше условиях вектор $\operatorname{grad} f$ ортогонален к границе области $D$.

П р и м е р 1.2. Решим графическим методом задачу нелинейного программирования

$$f(x_1, x_2) = -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 4)^2 \to \mathrm{extr}, \quad (x_1, x_2) \in D,$$

где допустимое множество $D$ определяется неравенствами

$$\frac{4}{x_1} - 3x_2 \leqslant 1, \quad x_1 \leqslant 6,5, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 5.$$

Р е ш е н и е. Множество $D$ изображено на рис. 3 — это фигура $ABEF$ с координатами вершин $A(0,25;5)$, $B(6,5;5)$, $E(6,5;0)$, $F(4;0)$. Линии уровня целевой функции являются окружностями с центром в точке $O'(5;4)$: $-(x_1-5)^2-(x_2-4)^2=C$.

Очевидно, $C \leqslant 0$ и $f^*_{\max}=0$ в точке $x^*_{\max}=(5;4)$.

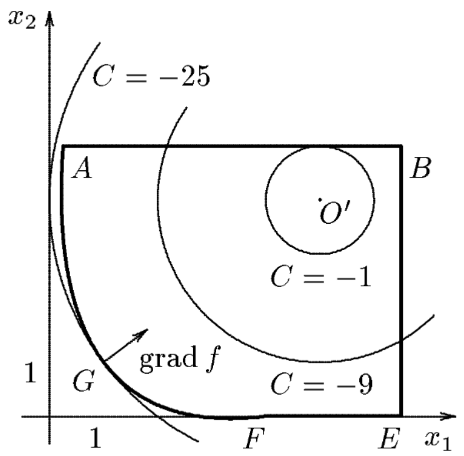


**Рис. 3**

Из рис. 3 заключаем, что точка $x^*_{\min}$ (наиболее удаленная от точки $O'$ точка множества $D$) лежит на кривой $AF$ — графике функции $x_2 = 4/(3x_1)-1/3$, $x_1 \in [0,25;4]$. Линия уровня вблизи кривой $AF$ задается уравнением $x_2 = 4-\sqrt{-C-(x_1-5)^2}$. Найдем точку $G(x_1^0, x_2^0)$ — пересечение кривой $AF$ и такой линии уровня целевой функции, что их касательные прямые в точке $G$ совпадают. Получаем систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$x_2^0 = \frac{4}{3x_1^0} - \frac{1}{3},$$

$$x_2^0 = 4 - \sqrt{-C-(x_1^0-5)^2},$$

$$\left(\frac{4}{3x_1} - \frac{1}{3}\right)'\Big|_{x_1^0} = \left(4 - \sqrt{-C - (x_1 - 5)^2}\right)'\Big|_{x_1^0}.$$

Решая систему, получаем $C = -25$, $(x_1^0, x_2^0) = (1;1)$. Необходимо также сравнить значения целевой функции в точках $G$ и $A$, $F$: $f(0,25;5) = -4,75^2 - 1 > -25$, $f(4;0) = -1 - 4^2 > -25$. Получаем $f^*_{\min} = -25$, $x^*_{\min} = (1;1)$.

Задача (1.1) называется *целочисленной задачей* математического программирования, если допустимое множество $D$ является подмножеством множества $Z^n$ всех $n$-мерных векторов с целочисленными компонентами: $Z^n = \{(x_1, \ldots, x_n),\ x_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\ i = 1, \ldots, n\}$.

П р и м е р 1.3. Решим графическим методом задачу

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{5}x_3 + 1 \to \text{extr},$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 2,5, \quad x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0, \quad (x_1, x_2, x_3) \in Z^3.$$

Р е ш е н и е. На рис. 4 изображено допустимое множество $D$, состоящее из десяти точек. Поверхность уровня целевой функции представляет собой плоскость с вектором нормали $\operatorname{grad} f = (f'_{x_1}, f'_{x_2}, f'_{x_3}) = (0;0;1/5)$, направленным вдоль оси $x_3$. При $C = 1$ поверхность уровня совпадает с координатной плоскостью $x_1 0 x_2$: $f^*_{\min} = 1$, $x^*_{\min} = (0;0;0)$. Из рис. 4 заключаем также, что $f^*_{\max} = 7/5$, $x^*_{\max} = (0;0;2)$.

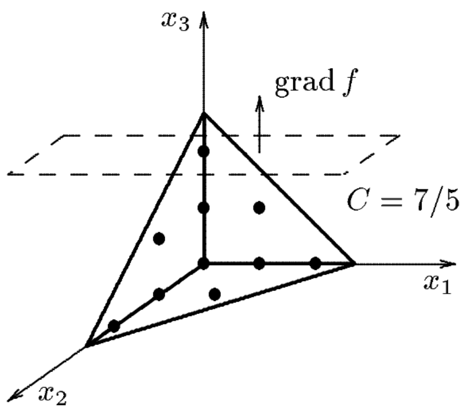


**Рис. 4**

**Линейное программирование.** Задача (1.1)—(1.2) называется задачей *линейного программирования*, если функции $f(x)$, $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, l$ являются линейными.

П р и м е р 1.4. Решим графическим методом задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 - 1 \to \min,\\ x_1 + 2x_2 \leqslant 6,\\ 2x_1 + x_2 \leqslant 6,\\ -x_1 + x_2 \leqslant 1, \quad x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Р е ш е н и е. Допустимое множество $D$ изображено на рис. 5 — это многоугольник с координатами вершин (0; 0), (3; 0), (2; 2), (4/3; 7/3), (0; 1). Линии уровня целевой функции — это прямые $-x_1 - x_2 - 1 = C$, где $C$ — константа. Вектор градиента $\mathrm{grad}\, f = (-1; -1)$. Легко видеть, что решение задачи — точка $x^*_{\min} = (2; 2)$, $f^*_{\min} = -5$.

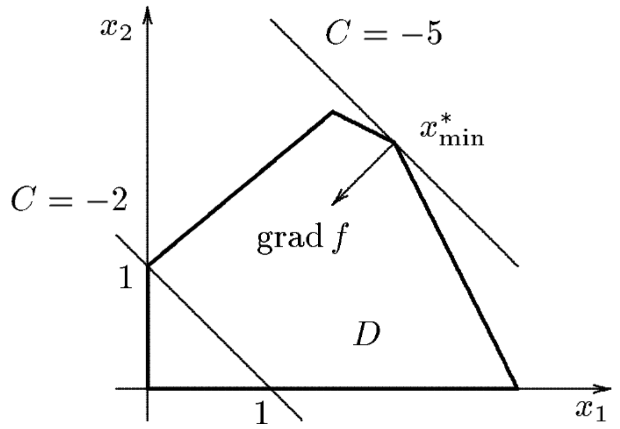


**Рис. 5**

З а м е ч а н и е 1. Пример 1.4 иллюстрирует основные особенности задачи линейного программирования [1, 6]: допустимое множество $D$ является выпуклым многогранником в пространстве $R^n$ (возможно, неограниченным); поверхность уровня целевой функции является линейным многообразием (прямая в $R^2$, плоскость в $R^3$ и т. д.); экстремум целевой функции (в случае его существования) достигается в угловой точке множества $D$. Многомерные задачи линейного программирования решаются с помощью симплекс-алгоритма [1, 4, 6].

## 2. МЕТОД ЛАГРАНЖА ДЛЯ ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Частным случаем задачи нелинейного программирования является *задача на условный экстремум*

$$f(x) \to \text{extr}, \tag{2.1}$$

$$g_i(x) = b_i, \quad i = 1, \dots, l, \quad x \in R^n, \tag{2.2}$$

где $b_i$, $i = 1, \dots, l$ — константы. Далее функции $f(x)$, $g_i(x)$, $i = 1, \dots, l$ предполагаются дифференцируемыми.

**Т е о р е м а 2** (необходимое условие условного экстремума). *Пусть* $x^*$ *— точка условного экстремума для задачи* (2.1)—(2.2) *и векторы* $\operatorname{grad} g_i(x^*)$, $i = 1, \dots, l$ *линейно независимы. Тогда существуют числа* $\lambda_1^*, \dots, \lambda_l^*$, *такие, что*

$$\operatorname{grad} f(x^*) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^* \operatorname{grad} g_i(x^*).$$

Векторное уравнение

$$\operatorname{grad} f(x) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \operatorname{grad} g_i(x) \tag{2.3}$$

называют *уравнением градиентов*, а числа $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ называют *множителями Лагранжа*.

З а м е ч а н и е 1. В случае $l = 1$ уравнение (2.3) сводится к равенству $\operatorname{grad} f(x) = \lambda \operatorname{grad} g_1(x)$, т. е. вектор $\operatorname{grad} f(x)$ ортогонален к поверхности уровня функции $g_1(x)$. Таким образом, в точке $x^*$ поверхности уровня функций $f(x)$, $g_1(x)$ касаются друг друга.

**Алгоритм поиска условного экстремума.**

1. Решить систему уравнений (2.2)—(2.3).

2. Среди всех решений системы выбрать то, на котором функция $f(x)$ принимает экстремальное значение.

П р и м е р 2.1. Решим методом Лагранжа задачу на условный экстремум

$$f(x) = 4x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$g(x) = x_1^2 + x_2^2 = 25.$$

Р е ш е н и е. Уравнение градиентов (2.3) запишем покоординатно. Имеем систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} &4 = 2\lambda x_1, \\ &3 = 2\lambda x_2, \\ &x_1^2 + x_2^2 = 25. \end{aligned}$$

Система легко решается: из первых двух уравнений выражаем $x_1, x_2$ через $\lambda$ и подставляем в третье уравнение. Из полученного уравнения получаем значение $\lambda$, после чего находим $x_1, x_2$. Система имеет два решения: $x_1 = \pm 4$, $x_2 = \pm 3$, $\lambda = \pm 1/2$ (одновременно берутся все плюсы или все минусы). Очевидно, первое решение — точка условного максимума, а второе решение — точка условного минимума.

З а м е ч а н и е 2. Различие между точками локального максимума и локального минимума можно провести, анализируя матрицу Гессе для задачи на условный экстремум [1]. Однако такой анализ не является обязательным, если существование оптимального решения следует из теоремы 1.

## 3. МЕТОД КУНА—ТАККЕРА ДЛЯ СТАНДАРТНОЙ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Частным случаем задачи нелинейного программирования является *стандартная задача* программирования

$$f(x) \to \max, \tag{3.1}$$

$$g_i(x) \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, l, \quad x \in R^n, \tag{3.2}$$

где $f(x)$, $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, l$, — дифференцируемые функции $n$ переменных и $b_i$, $i = 1, \ldots, l$, — константы.

Ограничение $g_i(x) \leqslant b_i$ называется *эффективным* для данного оптимального решения $x^*$, если оно обращается в равенство на этом решении (т. е. $g_i(x^*) = b_i$) и *неэффективным*, если $g_i(x^*) < b_i$.

**Т е о р е м а 3** (необходимые условия локального максимума). *Пусть $x^*$ — оптимальное решение задачи* (3.1)—(3.2) *и для эффективных ограничений векторы* $\operatorname{grad} g_i(x^*)$, $i = 1, \ldots, l$ *линейно независимы. Тогда существуют такие числа $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_l^*$, что выполняются следующие соотношения.*

1. *Уравнение градиентов*

$$\operatorname{grad} f(x^*) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^* \operatorname{grad} g_i(x^*). \tag{3.3}$$

2. *Условия дополняющей нежесткости* (*условия Куна—Таккера*)

$$\lambda_i^*(g_i(x^*) - b_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, l. \tag{3.4}$$

3. *Условия неотрицательности*

$$\lambda_i^* \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, l. \tag{3.5}$$

П р и м е р 3.1. Применим теорему 3 к примеру 1.2. Покажем, что точка $F(4; 0)$ не является решением задачи оптимизации:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \max,$$

$$\frac{4}{x_1} - 3x_2 \leqslant 1, \quad x_1 \leqslant 6,5, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 5.$$

Р е ш е н и е. Последнее двойное неравенство равносильно неравенствам $x_2 \leqslant 5$, $-x_2 \leqslant 0$. Введем обозначения для функций

$$g_1 = \frac{4}{x_1} - 3x_2, \quad g_2 = x_1, \quad g_3 = x_2, \quad g_4 = -x_2.$$

Если бы точка $F(4;0)$ была оптимальной, то для некоторых чисел $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_4^*$ выполнялись бы соотношения (3.3)—(3.5). Попробуем найти такие числа. Вычисляем градиенты

$$\operatorname{grad} f = (2(x_1 - 5); 2(x_2 - 4)), \quad \operatorname{grad} g_1 = \left( -\frac{4}{x_1^2}; -3 \right),$$

$$\operatorname{grad} g_2 = (1;0), \quad \operatorname{grad} g_3 = (0;1), \quad \operatorname{grad} g_4 = (0;-1).$$

Подставим все это в (3.3)—(3.5) и примем $x_1^* = 4$, $x_2^* = 0$ (мы не ищем неизвестное число $x^*$, а проверяем данную в условии точку $F(4;0)$). Получим систему уравнений и неравенств

$$\begin{aligned}
&-2 = -0,25\lambda_1^* + \lambda_2^*,\\
&-8 = -3\lambda_1^* + \lambda_3^* - \lambda_4^*,\\
&\lambda_1^*(1-1) = 0,\\
&\lambda_2^*(4-6,5) = 0,\\
&\lambda_3^*(0-5) = 0,\\
&\lambda_4^*(0-0) = 0,\\
&\lambda_i^* \geqslant 0, \quad i = 1,2,3,4.
\end{aligned}$$

Третье и шестое уравнения не несут информации. Из остальных уравнений находим: $\lambda_2^* = \lambda_3^* = 0$, $\lambda_1^* = 8$, $\lambda_4^* = -16$, т. е. нарушено условие неотрицательности $\lambda_4^* \geqslant 0$. Таким образом, точка $F(4;0)$ не оптимальна.

З а м е ч а н и е 1. Прямой способ применения теоремы 3 к решению задачи (3.1)—(3.2) состоит в следующем. Сначала находим все допустимые точки, для чего решаем систему уравнений (3.3)—(3.4) с неизвестными $x^*$, $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_l^*$ и отбрасываем те решения, для которых не выполняются неравенства (3.5) или неравенства (3.2). Среди найденных допустимых точек выбираем ту, на которой целевая функция принимает наибольшее значение (таких точек может быть несколько).

Такой способ решения трудоемок: анализируя уравнения (3.4), необходимо последовательно рассматривать случаи, когда некоторые из чисел $\lambda_i^*$ положительны, а остальные равны нулю, что требует перебора многих вариантов. Громоздкой может оказаться и проверка на оптимальность конкретной допустимой точки. Поэтому теорема 3 — скорее инструмент теоретического анализа, чем основа практических расчетов. Теорема 3 применима на практике в случае, когда среди возникающих вариантов удается отобрать небольшое число перспективных, отбросив остальные варианты как заведомо не приводящие к оптимальной точке.

В разд. 4 дан пример применения теоремы 3 к задаче оптимизации, связанной с математической экономикой.

## 4. ЗАДАЧА О ПОТРЕБИТЕЛЬСКОМ ВЫБОРЕ

Пусть потребитель располагает некоторой суммой денег $S$. На эти деньги он может приобрести $n$ различных товаров по ценам $a_1, \ldots, a_n$. Если $x_i$ — количество приобретенного $i$-го товара, $i = 1, \ldots, n$, то результат покупки характеризуется некоторой нелинейной (дифференцируемой) функцией $U(x_1, \ldots, x_n)$ — функцией полезности. В математической экономике используются различные функции полезности [7]; эту функцию потребитель стремится максимизировать.

В формализованном виде задача о потребительском выборе записывается как стандартная задача нелинейного программирования

$$U(x_1, \ldots, x_n) \to \max, \tag{4.1}$$

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \leqslant S, \tag{4.2}$$

$$-x_i \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Здесь $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$; выражение (4.2) представляет собой бюджетное ограничение, а (4.3) учитывает неотрицательность количества товаров.

Отметим, что предпосылки теоремы 1 выполнены; следовательно, решение задачи (4.1)—(4.3) существует.

П р и м е р 4.1. Рассмотрим задачу (4.1)—(4.3) в случае функции полезности

$$U(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)$$

и при значениях параметров $S = 10,\ a_1 = 5,\ a_2 = 3,\ a_3 = 2.$

Р е ш е н и е. Применение соотношений (3.3)—(3.5) приводит к системе уравнений и неравенств

$$\begin{aligned}
&(1 + x_2)(1 + x_3) = \lambda_0 a_1 - \lambda_1, \\
&(1 + x_1)(1 + x_3) = \lambda_0 a_2 - \lambda_2, \\
&(1 + x_1)(1 + x_2) = \lambda_0 a_3 - \lambda_3, \\
&\lambda_0(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 - S) = 0, \\
&\lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2 = \lambda_3 x_3 = 0, \\
&\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 0, 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Без ограничения общности предположим, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$. Пусть $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ — оптимальный вектор. Бюджетное ограничение заведомо эффективно (на любом оптимальном векторе) — потребителю нет смысла оставлять часть денег непотраченной. Покажем, что оптимальный вектор можно выбрать «неубывающим», т. е. удовлетворяющим условиям $x_1^* \leqslant x_2^* \leqslant x_3^*$. Для этого рассмотрим сначала его первые две координаты. Если $a_1 = a_2$, то нужное условие $x_1^* \leqslant x_2^*$ достигается просто перестановкой этих координат; ясно, что при такой перестановке не меняются цена $a_1 x_1^* + a_2 x_2^* + a_3 x_3^* = S$ и значение функции полезности $U(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$. Если же $a_1 > a_2$, то $x_1^* \leqslant x_2^*$. Действительно, допустив, что $x_1^* > x_2^*$, мы можем переставить указанные координаты, т. е. рассмотреть вектор $(x_2^*, x_1^*, x_3^*)$. Тогда цена $a_1 x_1^* + a_2 x_2^* + a_3 x_3^* = S$ заменяется на $a_1 x_2^* + a_2 x_1^* + a_3 x_3^*$. Последняя сумма меньше первой (т. е. меньше, чем $S$), ибо их разность $(a_1 - a_2)(x_1^* - x_2^*) > 0$; при этом значение функции полезности не изменилось. Следовательно, мы можем увеличить какую-либо координату вектора $(x_2^*, x_1^*, x_3^*)$ таким образом, что бюджетное ограничение сохранится; при этом значение функции полезности увеличится. Но это противоречит оптимальности вектора $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$; таким образом, неравенство $x_1^* > x_2^*$ невозможно. Итак, можно считать $x_1^* \leqslant x_2^* \leqslant x_3^*$, что и утверждалось.

Таким образом, у потребителя остаются три перспективные возможности:

1. Если $x_1^* = x_2^* = 0,\ x_3^* > 0$, то приобретается только самый дешевый товар.

2. Если $x_1^* = 0,\ 0 < x_2^* \leqslant x_3^*$, то приобретаются два наиболее дешевых товара.

3. Если $0 < x_1^* \leqslant x_2^* \leqslant x_3^*$, то приобретаются все три товара.

Расчет каждого из этих вариантов приводит либо к противоречию (это означает, что сделанное предположение о структуре оптимального потребления оказалось неверным), либо к допустимой точке задачи. Среди допустимых точек имеется оптимальная, так как выполнены предположения теоремы 1. Выбор оптимальной точки делается путем сравнения значений целевой функции на допустимых точках.

При значениях параметров задачи $S = 10$, $a_1 = 5$, $a_2 = 3$, $a_3 = 2$ расчет происходит следующим образом.

1. Если $x_1 = x_2 = 0,\ x_3 > 0$, то $\lambda_3 = 0$. Подстановка нулей в уравнения (4.4) приводит к следующим упрощениям:

$$\begin{aligned}
&1 + x_3 = 5\lambda_0 - \lambda_1,\\
&1 + x_3 = 3\lambda_0 - \lambda_2,\\
&1 = 2\lambda_0,\\
&2x_3 = 10.
\end{aligned}$$

Отсюда $\lambda_0 = 1/2,\ x_3 = 5,\ \lambda_1 = -7/2,\ \lambda_2 = -9/2$. Точка $(0; 0; 5)$ не оптимальна.

2. Если $x_1 = 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0$, то $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Упрощенные уравнения (4.4) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&(1 + x_2)(1 + x_3) = 5\lambda_0 - \lambda_1,\\
&1 + x_3 = 3\lambda_0,\\
&1 + x_2 = 2\lambda_0,\\
&3x_2 + 2x_3 = 10.
\end{aligned}
$$

Решая систему, находим: $x_2 = 3/2,\ x_3 = 11/4$, $\lambda_0 = 5/4$, $\lambda_1 = -25/8$. Точка $(0; 3/2; 11/4)$ не оптимальна.

3. Если $x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Уравнения (4.4) принимают вид

$$
\begin{aligned}
&(1 + x_2)(1 + x_3) = 5\lambda_0,\\
&(1 + x_1)(1 + x_3) = 3\lambda_0,\\
&(1 + x_1)(1 + x_2) = 2\lambda_0,\\
&5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10.
\end{aligned}
$$

Очевидно, что $\lambda_0 > 0$. Деля первое уравнение на второе или на третье, получаем

$$\frac{1 + x_2}{1 + x_1} = \frac{5}{3}, \quad \frac{1 + x_3}{1 + x_1} = \frac{5}{2}.$$

Последние два уравнения сводятся к линейным уравнениям. Бюджетное уравнение также линейно. Решая полученную систему из трех уравнений с тремя неизвестными, находим $x_1 = 1/3$, $x_2 = 11/9$, $x_3 = 7/3$. Получаем $\lambda_0 = 40/27$. Таким образом, оптимальной может быть единственная точка $(1/3; 11/9; 7/3)$. Следовательно, решением является точка $x^*_{\max} = (1/3; 11/9; 7/3)$, $U^*_{\max} = 800/81$.

# 5. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Метод динамического программирования применяется к дискретным оптимизационным задачам специального вида [3, 10].

**Оптимальный путь в слоистом графе.** Начнем с определения слоистого графа. Дан ориентированный граф $(V, X)$, где $V$ — множество вершин, $X$ — множество ориентированных ребер [8]. Пусть множество $V$ разбито на подмножества $V_1, \ldots, V_{n+1}$ таким образом, что $V = V_1 \cup \ldots \cup V_{n+1},\ V_i \cap V_j = \varnothing$ при $i \neq j$, и если начало любого ориентированного ребра $x \in X$ принадлежит множеству $V_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$, то его конец принадлежит множеству $V_{i+1}$. Множества $V_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n+1$, называются *слоями* данного ориентированного графа, а сам ориентированый граф называется *слоистым*.

Слоистый граф изображают на плоскости следующим образом (рис. 6). Вершины каждого слоя $V_i$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, лежат на одном вертикальном отрезке, причем слой $V_{i+1}$ располагается правее слоя $V_i$; каждое ориентированное ребро — это отрезок, концы которого лежат в соседних слоях $V_i,\ V_{i+1}$ (на ребрах нет стрелок, задающих ориентацию; ребра ориентированы слева направо). Введем два обозначения. Если ориентированное ребро $x \in X$ выходит из вершины $v \in V$, то вершину, в которую входит это ребро, обозначим через $v \triangleleft x$. Для любой вершины $v$ обозначим через $X(v)$ множество ребер, выходящих из $v$.

Опишем основную задачу раздела. Пусть $(V, X)$ — слоистый граф; $V_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n+1$, — его слои, причем слой $V_1$ состоит из единственной вершины $\alpha$. Каждому ребру $x \in X$ поставлено в соответствие число $f(x) \geqslant 0$; удобно считать, что $f(x)$ — это длина ребра $x$ (в зависимости от характера конкретной задачи возможны другие интерпретации величины $f(x)$: плата за проезд по ребру $x$; выигрыш, получаемый при прохождении по ребру $x$ и т. д.). На рисунке графа число $f(x)$ пишется рядом с ребром $x$. Рассмотрим всевозможные пути из вершины $\alpha$ в некоторую вершину последнего слоя $V_{n+1}$; каждый путь можно задать либо как цепочку вершин

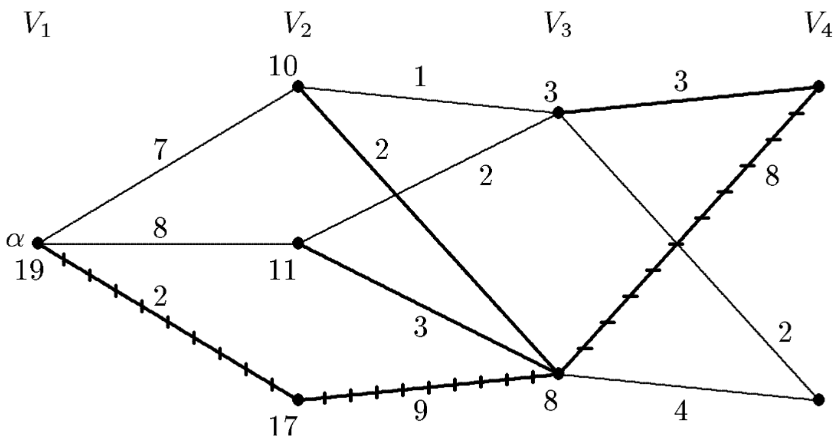


**Рис. 6**

$v_1, \ldots, v_{n+1}$, где $v_1 = \alpha$ и $v_i \in V_i$, $2 \leqslant i \leqslant n+1$, либо как цепочку ребер $x_1, \ldots, x_n$, где $x_i = (v_i, v_{i+1})$. Длина этого пути — сумма $f(x_1) + \ldots + f(x_n)$.

Мы рассмотрим следующие оптимизационные задачи:

задачу нахождения кратчайшего из указанных путей

$$f(x_1) + \ldots + f(x_n) \to \min$$

и длиннейшего из указанных путей

$$f(x_1) + \ldots + f(x_n) \to \max .$$

Очевидно, это родственные задачи. Мы решим вторую из этих задач и затем укажем изменения, необходимые для решения первой.

Итак, требуется найти самый длинный путь из вершины $\alpha$ в некоторую (безразлично какую) вершину слоя $V_{n+1}$. Проведем следующее построение. Возьмем в $k$-м слое вершину $v \in V_k$ и рассмотрим все возможные пути, ведущие из $v$ в некоторую вершину слоя $V_{n+1}$. Обозначим через $B_k(v)$ наибольшую из длин указанных путей; путь, имеющий длину $B_k(v)$, назовем *оптимальным*. Полученную функцию $v \to B_k(v)$, $v \in V_k$ называют функцией Беллмана на $k$-м слое. Далее обозначим через $x(v)$ первое выходящее из $v$ ребро оптимального пути; может оказаться, что имеется несколько оптимальных путей, тогда берем первое ребро любого из них. Указанное ребро называется *оптимальным*.

Опишем алгоритм, позволяющий найти для любой вершины $v \in V_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, величину $B_k(v)$ и оптимальное ребро $x(v)$. Построение ведется последовательно для вершин из слоев $V_n, V_{n-1}, \ldots, V_1$.

Начнем со слоя $V_n$. Возьмем вершину $v \in V_n$. Очевидно, что

$$B_n(v) = \max\{f(x) : x \in X(v)\}, \quad v \in V_n, \tag{5.1}$$

а ребро, на котором достигается этот максимум, будет оптимальным; это ребро обозначается через $x(v)$. Работа со слоем $V_n$ закончена.

Предположим, что функции Беллмана $B_i(v)$ и оптимальные ребра $x(v)$ уже построены для вершин $v \in V_i, k \leqslant i \leqslant n+1$. Построим величины $B_{k-1}(v)$ и оптимальные ребра $x(v)$ для вершин $v \in V_{k-1}$. Возьмем вершину $v \in V_{k-1}$. Выйдем из нее по ребру $x \in X(v)$ (оно приведет нас к вершине $u \in V_k$, которую мы обозначаем через $v \triangleleft x$), а затем пройдем из $u$ до слоя $V_{n+1}$ по оптимальному (т. е. самому длинному) пути. В результате мы получили путь из $v$ в вершину слоя $V_{n+1}$, имеющий длину $f(x) + B_k(u)$. Чтобы найти оптимальный путь из $v$ до вершины слоя $V_{n+1}$, следует выйти из $v$ по такому ребру $x \in X(v)$, чтобы указанная величина приняла наибольшее значение.

Согласно этому рассуждению, на множестве вершин $V_{k-1}$ функция Беллмана определяется равенством

$$B_{k-1}(v) = \max\{f(x) + B_k(v \triangleleft x) : x \in X(v)\}, \quad v \in V_{k-1}; \tag{5.2}$$

ребро, на котором достигается написанный максимум, есть оптимальное ребро $x(v)$.

Формула (5.2) определяет алгоритм построения функции $B_k(v)$ и оптимальных ребер $x(v)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

На рисунке графа значение $B_k(v)$ записывают возле вершины $v$, а оптимальное ребро $x(v)$ выделяют жирной линией. После применения этого алгоритма к слоистому графу оптимальный путь из вершины $\alpha$ в вершину последнего слоя $V_{n+1}$ легко указать: выходя из вершины $\alpha$, идем по оптимальным (жирным) ребрам до последнего слоя. При этом величина $B_1(\alpha)$ есть максимум длин всевозможных путей из $\alpha$ в вершину слоя $V_{n+1}$.

П р и м е р 5.1. На рис. 6 изображен слоистый граф с заданными длинами ребер. Возле вершин графа указаны значения функции Беллмана, а оптимальные ребра выделены жирными линиями. Оптимальный путь из вершины $\alpha$ максимальной длины $B_1(\alpha) = 19$ отмечен штриховкой.

З а м е ч а н и е 1. Аналогичным способом решают задачу минимизации: достаточно заменить в описанных построениях максимум на минимум. Числа $f(x)$ предполагаются неотрицательными и интерпретируются как длины ребер; если $f(x)$ — произвольные вещественные числа, то постановка задачи и способ ее решения не меняются.

**Общая задача динамического программирования (задача об управляемом объекте).** Предположим, что мы управляем некоторым объектом, подавая на него сигналы, причем каждый поданный сигнал меняет состояние объекта и приносит нам некоторый выигрыш. Требуется подобрать управление (т. е. последовательность сигналов) таким образом, чтобы суммарный выигрыш, полученный в конце процесса управления, был максимален. Опишем формально все упомянутые процессы и сформулируем математическую задачу.

1. *Состояния объекта.* Пусть для каждого момента времени $k = 1, \ldots, n+1$ дано множество состояний объекта, обозначаемое через $V_k$, причем множество $V_1$ состоит из единственного состояния $\alpha$ (начальное состояние объекта). Таким образом, в момент времени $k$ объект может находиться в любом из состояний $v \in V_k$.

2. *Управляющие сигналы и изменение состояний.* Пусть для любого состояния $v \in V_k$, где $1 \leqslant k \leqslant n$ дано множество сигналов $X(v)$; сигнал $x \in X(v)$ назовем *допустимым* (в состоянии $v$). Предположим, что если в момент $k$ объект находится в состоянии $v \in V_k$

и мы подали на него сигнал $x \in X(v)$, то к моменту $k+1$ объект переходит (под действием сигнала $x$) в новое состояние, принадлежащее множеству $V_{k+1}$; это состояние обозначим через $v \triangleleft x$. Заметим, что в момент $n+1$ сигналов нет, ибо в этот момент объект уже находится в одном из заключительных состояний и работа по управлению закончена.

3. *Управление объектом.* Управление — это цепочка сигналов $x_1, \ldots, x_n$, такая, что $x_k \in X(v_k)$ и $v_k \triangleleft x_k = v_{k+1}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

4. *Выигрыш за один шаг и суммарный выигрыш.* Пусть каждому сигналу $x \in X(v)$ поставлено в соответствие число $f(x)$ — выигрыш, получаемый от поданного сигнала. Наконец, суммарный выигрыш, приносимый управлением $x_1, \ldots, x_n$, определяется как $f(x_1) + \ldots + f(x_n)$.

Сформулируем основную задачу: подобрать управление $x_1, \ldots,$ $x_n$ таким образом, чтобы приносимый им выигрыш был максимален. Мы сведем эту задачу к задаче об оптимальном пути в слоистом графе.

Для этого строим слоистый граф $(V, X)$. Его вершины — это состояния нашего объекта; таким образом, $V = V_1 \cup \ldots \cup V_{n+1}$. Далее для любого сигнала $x \in X(v)$ проведем ориентированное ребро из $v$ в $v \triangleleft x$ и поставим в соответствие этому ребру величину $f(x)$; эту величину будем считать длиной ребра $x$. В результате получен слоистый граф с заданными длинами ребер. Таким образом, основная задача подбора управления сведена к задаче нахождения в слоистом графе самого длинного пути из вершины $\alpha$ в некоторую вершину последнего слоя $V_{n+1}$. Решаем такую задачу с помощью описанного алгоритма. Другими словами, для каждого состояния (т. е. вершины графа) находим значение функции Беллмана и оптимальный сигнал (т. е. оптимальное ребро в графе, выходящее из этой вершины); затем находим искомый путь и, тем самым, искомое управление объектом, дающее максимальный выигрыш.

Замечание 2. При построении рисунка ориентированного графа для описанной задачи на управление мы изображаем вершины графа (вершины каждого слоя располагаются на одном вертикальном отрезке и слой $V_{i+1}$ находится правее слоя $V_i$) и затем строим ребра графа. Однако нецелесообразно изображать все ребра графа, так как это приведет к сложному рисунку; достаточно найти и построить для каждой вершины (исключая вершины последнего слоя $V_{n+1}$) только исходящее из нее оптимальное ребро $x(v)$.

Описанный метод решения задач оптимизации создан Р. Беллманом.

**Задача о рюкзаке.** Имеется рюкзак объемом $W$ и $n$ групп предметов $\Gamma_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n$. Каждая группа $\Gamma_k$ состоит из $r_k$ одинаковых предметов, причем один предмет этой группы имеет объем $w_k$ и вес $p_k$. Предполагается, что $r_1w_1+\dots+r_nw_n > W$; так что невозможно положить в рюкзак все эти предметы. Задача — положить в рюкзак некоторые предметы указанного набора, отобрав их так, чтобы суммарный объем не превосходил величины $W$, а суммарный вес был максимален.

Если обозначить $x_k$ через количество предметов из группы $\Gamma_k$, которые мы намерены положить в рюкзак, то задача записывается как задача оптимизации:

$$p_1x_1 + \ldots + p_nx_n \to \max,$$

$$w_1x_1 + \ldots + w_nx_n \leqslant W, \quad x_k \in \{0, \ldots, r_k\}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Сведем эту задачу к задаче об управляемом объекте. Управляемый объект — это рюкзак. Будем заполнять его, помещая в него в каждый момент времени $k = 1, \ldots, n$ некоторое количество предметов группы $\Gamma_k$. Таким образом, управление — это цепочка чисел $x_1, \ldots, x_n$, указывающая, сколько предметов из каждой группы мы кладем в рюкзак. Состоянием рюкзака в момент $k$ назовем объем заполненной части рюкзака перед моментом $k$, т. е. величину $w = w_1x_1 + \ldots + w_{k-1}x_{k-1}$. Условимся записывать это состояние не в виде числа $w$, а в виде пары $(k, w)$ и изображать его точкой $v = (k, w)$ на координатной плоскости. Ясно, что $0 \leqslant w \leqslant \min\{W, w_1r_1 + \ldots + w_{k-1}r_{k-1}\}$. При $k = 1$ имеем единственное состояние $(1, 0)$: рюкзак пуст. Выигрыш, получаемый от сигнала $x_k$, поданного в момент $k$, — это величина $p_kx_k$; другими словами, это есть вес предметов из группы $\Gamma_k$, положенных нами в рюкзак в момент $k$. Наконец, суммарный выигрыш, даваемый управлением — это величина, равная весу рюкзака в заключительный момент $n + 1$ (заметим, что последний управляющий сигнал был подан в момент $n$). Итак, задача о рюкзаке сведена к задаче об управляемом объекте, а потому может быть решена описанным методом.

Функцию Беллмана $B_k(v)$, $v = (k, w)$, записываем для краткости в виде

$$B_k(w), \qquad w \leqslant \min\{W, r_1 w_1 + \ldots + r_{k-1} w_{k-1}\}$$

(напомним, что $(k, w)$ — это состояние в момент $k$). Формулы (5.1), (5.2), задающие эту функцию, примут следующий вид:

$$B_n(w) = \max\{p_n x : x \in \{0, \ldots, r_n\},\ w + w_n x \leqslant W\},$$

$$B_{k-1}(w) =$$
$$= \max\{p_{k-1} x + B_k(w + w_{k-1} x) : x \leqslant r_{k-1},\ w + w_{k-1} x \leqslant W\},$$
$$1 < k < n.$$

П р и м е р 5.2. Имеется рюкзак объемом $W = 5$, пять групп предметов и числа $r_k$, $w_k$, $p_k$ заданы в табл. 1. Выбрать предметы для укладки в рюкзак, чтобы их суммарный вес был максимален.

*Таблица 1*

| | $\Gamma_1$ | $\Gamma_2$ | $\Gamma_3$ | $\Gamma_4$ | $\Gamma_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $r_k$ | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| $w_k$ | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| $p_k$ | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 |

Р е ш е н и е. Алгоритм динамического программирования приводит к графу, изображенному на рис. 7. Для каждой вершины $v = (k, w)$ изображено только оптимальное ребро, выходящее из нее; возле ребер оптимального пути записан (подчеркнут) управляющий сигнал, т. е. число предметов из группы $\Gamma_k$, которые следует положить в рюкзак. Числовая метка возле каждой вершины $v = (k, w)$ — это значения функции Беллмана $B_k(w)$. Оптимальный путь заштрихован. Таким образом, решение задачи — это управление по сигналам 0, 1, 2, 1, 0. Другими словами, в рюкзак следует положить по одному предмету из групп $\Gamma_2$, $\Gamma_4$ и два предмета из группы $\Gamma_3$; их общий вес равен семи.

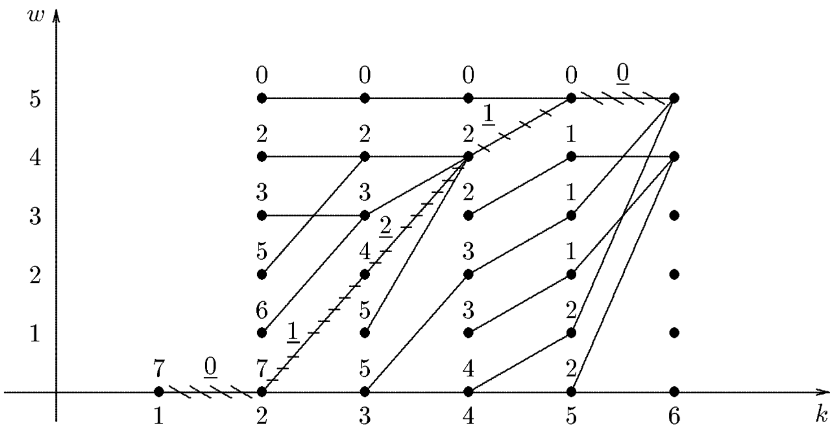


**Рис. 7**

Читателю следует проверить, чтобы граф на рис. 7 соответствовал алгоритму динамического программирования. Поясним, например, каким образом возникли метка 4 у вершины $(3;2)$ и ребро с меткой 2 (подчеркнута), идущее из $(3;2)$ в $(4;4)$. Состояние $(3;2)$ означает, что в предыдущие моменты $k = 1,2$ в рюкзак уже были положены некоторые предметы из групп $\Gamma_1, \Gamma_2$ и заняли объем 3. Следует выяснить, сколько предметов из $\Gamma_3$ надо положить в рюкзак; искомое количество обозначим через $x_3$. Эта величина должна удовлетворять следующим условиям допустимости: $x_3 \leqslant r_3$ (т. е. $x_3 \leqslant 3$), и $2 + w_3x_3 \leqslant W$ (т. е. $2 + 1 \cdot x_3 \leqslant 5$). Итак, допустимы значения $x_3 = 0,\ 1,\ 2,\ 3$. При подаче этих сигналов рюкзак переходит в состояния $(4;2), (4;3), (4;4), (4;5)$ соответственно, а величина $p_3x_3 + B_4(2 + w_3x_3) = 1 \cdot x_3 + B_4(2 + 1 \cdot x_3)$ принимает значения $3,\ 3,\ 4,\ 3$. Максимум этих величин — это 4, причем он достигается при $x_3 = 2$. Согласно алгоритму, число 4 пишем возле вершины

$(3;2)$, проводим оптимальное ребро из $(3;2)$ в $(4;4)$ и возле него пишем сигнал 2 (подчеркнутый).

**Задача о распределении средств.** Сумма средств $S$ распределяется между предприятиями $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$. Условимся, что величина $S$, а также суммы, предоставляемые каждому предприятию, выражаются целыми числами. Известно, что предприятие $\Pi_k$, получив сумму $x$, дает прибыль $J_k(x)$. Задача — распределить сумму $S$ таким образом, чтобы суммарная прибыль была максимальной. Обозначив через $x_k$ сумму, предоставляемую предприятию $\Pi_k$, мы можем записать задачу оптимизации

$$J_1(x_1) + \ldots + J_n(x_n) \to \max,$$

$$x_1 + \ldots + x_n = S, \quad x_k \in \{0, 1, \ldots\}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Сведем рассматриваемую задачу к задаче об управляемом объекте. В качестве объекта выступает касса, из которой мы выдаем суммы предприятиям $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ в моменты времени $k = 1, \ldots, n$ соответственно. Состояние объекта (кассы) в момент $k$ — это совокупная сумма $s$, выданная предприятиям $\Pi_1, \ldots, \Pi_{k-1}$ в предыдущие моменты $1, \ldots, k-1$; другими словами, $s = x_1 + \ldots + x_{k-1}$. Условимся записывать это состояние в виде $(k, s)$ и изображать его в виде точки $v = (k, s)$ на координатной плоскости. Заметим, что в момент $k = 1$ имеем единственное состояние $(1; 0)$ (из кассы еще не выдано ничего), а в момент $k = n+1$ — единственное состояние $(n+1, S)$ (все средства отданы предприятиям). Управление — это цепочка $x_1, \ldots, x_n$, показывающая, какая сумма дана каждому из предприятий. Выигрыш, даваемый сигналом $x_k$, это величина прибыли $J_k(x_k)$. Требуется подобрать управление таким образом, чтобы суммарная прибыль была максимальной. Мы пришли к задаче об управляемом объекте, которая решается описанным методом.

Функцию Беллмана $B_k(v)$, $v = (k, s)$, будем записывать для краткости в виде $B_k(s)$. Читателю следует убедиться в том, что эти функции задаются формулами

$$B_n(s) = J_n(S - s),$$

$$B_{k-1}(s) = \max\{J_{k-1}(x) + B_k(s+x) : s + x \leqslant S\}, \quad 1 < k < n.$$

П р и м е р 5.3. Имеется сумма средств $S = 5$, четыре предприятия $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ и функции прибыли $J_k(x)$ заданы в табл. 2. Требуется распределить средства между предприятиями так, чтобы суммарная прибыль была максимальной.

*Таблица 2*

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_1(x)$ | 0 | $1,5$ | 2 | $3,5$ | $5,5$ | 9 |
| $J_2(x)$ | 0 | 3 | $4,5$ | $5,5$ | $6,5$ | $7,5$ |
| $J_3(x)$ | 0 | 4 | 5 | $5,5$ | 6 | 9 |
| $J_4(x)$ | 0 | 2 | 3 | 4 | $6,5$ | 8 |

Р е ш е н и е. Граф, дающий решение задачи, изображен на рис. 8; читателю следует проверить его соответствие алгоритму динамического программирования. Оптимальный путь в графе заштрихован. Ответ: следует дать предприятиям $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ суммы в $1, 2, 1, 1$ единицы соответственно. Суммарная максимальная прибыль, даваемая всеми предприятиями, равна 12.

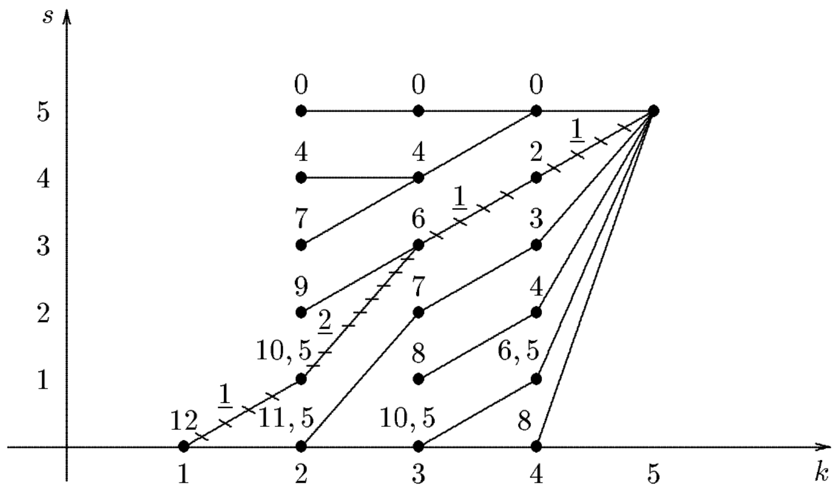


**Рис. 8**

**Сепарабельное программирование.** По образцу предшествующих задач составим более общую задачу:

$$f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n) \to \max,$$

$$\varphi(x_1) + \ldots + \varphi(x_n) \leqslant W, \quad x_k \in \{0, \ldots, r_k\}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Здесь $f_k$, $\varphi_k$ — функции, определенные на множестве $\{0, 1, \ldots\}$, $r_k$ — целые неотрицательные числа, $k = 1, \ldots, n$. Функции нескольких переменных вида $f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n)$ называют *сепарабельными*, а задачу указанного вида — *сепарабельной*. Читателю следует свести эту задачу к задаче об управляемом объекте и получить формулы, задающие функции Беллмана и оптимальные сигналы.

## ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

**Задача 1.** Найти графическим методом минимум $f^*_{\min}$, максимум $f^*_{\max}$ и точки экстремумов $x^*_{\min}$, $x^*_{\max}$ для задачи:

а) нелинейного программирования;

б) целочисленного программирования ($(x_1, x_2) \in Z^2$).

Целевая функция и условия на допустимое множество имеют вид

**1.** $-x_1^2 + x_2 + 6x_1 \to \text{extr},$
$2x_1 + 3x_2 \leqslant 24,$
$x_1 + 2x_2 \leqslant 15,$
$3x_1 + 2x_2 \leqslant 24,$
$x_2 \leqslant 4,5,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

**2.** $\dfrac{x_1 - 3}{x_2 - 3} \to \text{extr},$
$3x_1 + 2x_2 \geqslant 7,$
$10x_1 - x_2 \leqslant 8,$
$-18x_1 + 4x_2 \leqslant 12,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

**3.** $x_1^2 + x_2^2 - 7x_1 - 7x_2 \to \text{extr},$
$2x_1 + 3x_2 \geqslant 6,$
$3x_1 - 2x_2 \leqslant 18,$
$-x_1 + 2x_2 \leqslant 8,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

**4.** $3x_1 + 4x_2 \to \text{extr},$
$x_1^2 + x_2^2 \leqslant 25,$
$x_1 x_2 \geqslant 4,$
$x_1 \leqslant 4,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

**5.** $x_1x_2 \to \text{extr},$
$6x_1 + 4x_2 \geqslant 12,$
$2x_1 + 3x_2 \leqslant 24,$
$-3x_1 + 4x_2 \leqslant 12,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

**6.** $9(x_1 - 5)^2 +$
$+ 4(x_2 - 6)^2 \to \text{extr},$
$3x_1 + 2x_2 \geqslant 12,$
$x_1 - x_2 \leqslant 6,$
$x_2 \leqslant 3,5,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

**7.** $3x_1^2 + 8x_2 \to \text{extr},$
$x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 \leqslant 23,$
$x_1 \geqslant 3,5,$
$x_2 \geqslant 0,5,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

**8.** $x_1x_2 \to \text{extr},$
$2x_1 + x_2 \leqslant 10,5,$
$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 \geqslant 14,$
$x_1 \geqslant 0,5,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

**9.** $x_1^2 + x_2^2 - x_1 + 2x_2 \to \text{extr},$
$x_1 + x_2 \geqslant 18,$
$x_1 + x_2 \leqslant 22,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

**10.** $x_1 - 2x_2^2 + 14x_2 \to \text{extr},$
$5x_1 + x_2 \leqslant 10,$
$2x_1 + 4x_2 \leqslant 5,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

**11.** $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_2 \to \text{extr},$
$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 4,$
$x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leqslant 6,5,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0.$

**12.** $x_1^2 + x_2^2 + x_1 - x_2 \to \text{extr},$
$x_1^2 + 2x_2^2 \geqslant 8,$
$x_1 + x_2 \leqslant 10,5,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

**13.** $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 \to \text{extr},$
$x_1 + 2x_2 \leqslant 8,$
$2x_1 - x_2 \leqslant 12,$
$x_1 + x_2 \geqslant 3,5,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

**14.** $-x_1^2 - x_2^2 + 3x_1 +$
$+ 3x_2 \to \text{extr},$
$x_1 + 2x_2 \leqslant 12,$
$3x_1 + x_2 \leqslant 15,$
$x_1 + x_2 \geqslant 1,5,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

**15**. $\dfrac{x_1 - 1}{x_2 - 4} \to \text{extr},$
$5x_1 + 3x_2 \leqslant 13,$
$3x_1 + 2x_2 \leqslant 7,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

**16**. $\operatorname{arctg} x_1 - x_2 \to \text{extr},$
$x_1 + 2x_2 \leqslant 5,$
$x_1 x_2 \geqslant 2,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

**17**. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 -$
$- x_2 - x_3 \to \text{extr},$
$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 18,5,$
$x_3 \leqslant 12,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0.$

**18**. $- x_1^2 - x_2^2 - x_1 \to \text{extr},$
$x_1^2 + x_2^2 - 13x_1 -$
$- 14x_2 \leqslant -82,25,$
$x_1 \geqslant 0,\ \ x_2 \geqslant 0.$

**19**. $- x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 +$
$+ x_1 + x_2 \to \text{extr},$
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 6,$
$2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 6,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0.$

**20.** $x_1^2 x_2 \to \text{extr},$
$2x_1 + 3x_2 \leqslant 5,$
$x_1 + 7x_2 \leqslant 6,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

**21**. $\sin x_1 - x_2 \to \text{extr},$
$x_1 + x_2 \leqslant 4,$
$x_2 \leqslant 1,5,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

**22**. $- x_1^2 - x_2^2 \to \text{extr},$
$3x_1 + 4x_2 \leqslant 25,$
$0,5x_1 + x_2 \leqslant 6,5,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

**23**. $- x_1^2 + 6x_1 + x_2 \to \text{extr},$
$x_1 + x_2 \geqslant 0,5,$
$2x_1 + x_2 \leqslant 6,$
$2x_1 + 3x_2 \leqslant 12,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

**24**. $2x_1^2 + x_2 \to \text{extr},$
$x_1 - x_2 \leqslant 2,$
$- x_1 x_2 + x_1 + x_2 \geqslant 2,$
$x_2 \leqslant 4,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

**25**. $\dfrac{x_2-1}{x_1} \to \mathrm{extr}$,

$x_1 + x_2 \geqslant 2$,

$2x_1 + 5x_2 \leqslant 10$,

$x_1 \leqslant 4,5$,

$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$.

**26**. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 \to \mathrm{extr}$,

$x_1x_2 \leqslant 1$,

$x_2 \leqslant \sqrt{x_1}$,

$x_1 \leqslant 4$,

$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$.

**27**. $x_1^2 + x_2^2 + 9x_1 + 5x_2 \to \mathrm{extr}$,

$x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 \geqslant 5$,

$x_1 \geqslant 0$,

$x_2 \geqslant 0$.

**28**. $x_1x_2 \to \mathrm{extr}$,

$2x_1 + x_2 \leqslant 5$,

$x_1^2 + x_2^2 \geqslant 1,21$,

$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$.

**29**. $\dfrac{x_1-3}{x_2+1} \to \mathrm{extr}$,

$x_1 + x_2 \geqslant 3,5$,

$x_1 + x_2 \leqslant 6,5$,

$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$.

**30**. $\dfrac{x_1+1}{x_2-6} \to \mathrm{extr}$,

$x_1x_2 \leqslant 5$,

$x_1 \leqslant 3,5$,

$x_2 \leqslant 3,5,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$.

**Задача 2.** Прядильная фабрика для производства двух видов пряжи использует три типа сырья: чистую шерсть, капрон и акрил. Заданы нормы расхода сырья, его общее количество и прибыль от реализации тонны пряжи каждого вида (табл. П1).

*Таблица П1*

| Тип сырья | Норма расхода на 1 т пряжи | | Количество сырья, т |
|---|---|---|---|
| | вид 1 | вид 2 | |
| Шерсть | 0,5 | 0,2 | 600 |
| Капрон | $a$ | 0,6 | $b$ |
| Акрил | $0{,}5-a$ | 0,2 | $c$ |
| Прибыль от реализации 1 т, руб. | 1100 | 900 | — |

Составить задачу математического программирования для определения плана производства пряжи с целью максимизации суммарной прибыли [4, 6]. Решить задачу графическим методом. Варианты параметров даны в табл. П3.

**Задача 3.** Найти симплекс-методом [6, 9] оптимальные значения $x^*_{\min}$, $f^*_{\min}$ для задачи линейного программирования, найдя начальную угловую точку (допустимое базисное решение) либо перебором базисных решений, либо методом искусственного базиса.

Целевая функция и условия на допустимое множество имеют вид

$$\begin{aligned} f(x) = {} & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 \to \min, \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1, \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = b_2, \\ & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = b_3, \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Вектор $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$, матрица $(a_{ij})_{i,j=1}^{3,5}$ и вектор $(b_1, b_2, b_3)$ заданы в виде

$$\begin{array}{ccccc|c} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & b_3 \end{array}.$$

**1.**
$$\begin{array}{ccccc|c} 4 & -3 & -5 & -5 & -1 & \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 9 \end{array}$$

**2.**
$$\begin{array}{ccccc|c} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & \\ -6 & 1 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ -7 & 3 & 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -6 & 1 \end{array}$$

**3.**
$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & \\ 5 & 2 & 1 & -1 & -2 & 13 \\ 1 & 0 & 4 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \end{array}$$

**4.**
$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & \\ -2 & 1 & 2 & -1 & 5 & 13 \\ -4 & -3 & 2 & 1 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

**5.** $\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 2 & 2 & -1 & 6 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}$

**6.** $\begin{array}{rrrrr|r} -3 & 0 & 1 & -2 & 0 & \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & 7 \\ 15 & 2 & -3 & -7 & 1 & 4 \end{array}$

**7.** $\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 7 & -2 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -7 & 1 & 1 & 6 \end{array}$

**8.** $\begin{array}{rrrrr|r} -3 & 1 & 3 & 6 & -3 & \\ 3 & -2 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & -8 & 4 & -4 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 3 & -3 & 2 & 1 \end{array}$

**9.** $\begin{array}{rrrrr|r} 4 & -2 & 1 & -1 & -1 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \end{array}$

**10.** $\begin{array}{rrrrr|r} -3 & -1 & 1 & -1 & -1 & \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 2 & 1 \end{array}$

**11.** $\begin{array}{rrrrr|r} -2 & 3 & 1 & -3 & -5 & \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}$

**12.** $\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 0 & 0 & -1 & -2 & \\ 1 & 0 & -2 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & -7 & 10 \\ 5 & 0 & 2 & 9 & -7 & 9 \end{array}$

**13.** $\begin{array}{rrrrr|r} -2 & 3 & -3 & 2 & -1 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$

**14.** $\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 3 & 3 & 0 & 6 & \\ 4 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}$

**15.** $\begin{array}{rrrrr|r} -4 & 2 & 8 & -2 & -2 & \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}$

**16.** $\begin{array}{rrrrr|r} -3 & 0 & 2 & 3 & 2 & \\ 2 & 1 & 0 & -7 & -2 & -4 \\ -15 & -2 & 4 & 12 & 1 & 3 \\ 17 & 3 & -2 & -9 & 1 & 10 \end{array}$

**17.** $\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 2 & 0 & 8 & -2 & \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & -1 & 0 & 7 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -7 & 1 & 7 \end{array}$

**18.** $\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 3 & 2 & 0 & -1 & \\ 3 & 2 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 7 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -7 & 1 & 6 \end{array}$

**19.** $$\begin{array}{rrrrr|r} -2 & 3 & 5 & -1 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}$$

**20.** $$\begin{array}{rrrrr|r} -2 & 1 & -1 & -2 & -1 & \\ 5 & 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}$$

**21.** $$\begin{array}{rrrrr|r} -3 & 1 & 0 & -1 & -4 & \\ 5 & -4 & 3 & 2 & 2 & 11 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 4 \end{array}$$

**22.** $$\begin{array}{rrrrr|r} -3 & 4 & 0 & 2 & 1 & \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

**23.** $$\begin{array}{rrrrr|r} -3 & 1 & -1 & 3 & -1 & \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

**24.** $$\begin{array}{rrrrr|r} -2 & -2 & 2 & -3 & 3 & \\ -2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & -2 & 1 & 4 & 8 \\ -3 & 3 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

**25.** $$\begin{array}{rrrrr|r} -4 & 3 & 4 & 0 & 6 & \\ 4 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}$$

**26.** $$\begin{array}{rrrrr|r} -3 & 0 & 2 & 3 & 2 & \\ 2 & 1 & 0 & -7 & -2 & -4 \\ -15 & -2 & -4 & 12 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}$$

**27.** $$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 14 & -3 & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 7 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -7 & 1 & 6 \end{array}$$

**28.** $$\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 2 & 0 & 6 & -3 & \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -7 & 1 & 6 \end{array}$$

**29.** $$\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -3 & 0 & 2 & 3 & \\ -1 & 15 & 2 & -4 & -12 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & -7 & -4 \\ 1 & 17 & 3 & -2 & -9 & 10 \end{array}$$

**30.** $$\begin{array}{rrrrr|r} -5 & 3 & -3 & 3 & -2 & \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

**Задача 4.** Каноническая задача линейного программирования

$$f(x)=c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \to \min,$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2,$$
$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0$$

задана в виде

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ \hline c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 \end{array}.$$

Требуется: а) найти оптимальные значения $x^*_{\min}$, $f^*_{\min}$ графическим методом; б) найти начальную угловую точку задачи методом искусственного базиса; в) решить задачу симплекс-методом; г) проверить правильность решения при помощи двойственной задачи.

**1.** $\begin{array}{rrrr|r} -2 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$

**2.** $\begin{array}{rrrr|r} 0 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ \hline -1 & -5 & -1 & 0 & 0 \end{array}$

**3.** $\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 12 \\ \hline 6 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}$

**4.** $\begin{array}{rrrr|r} 5 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & -1 & 7 \\ \hline 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}$

**5.** $\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 1 & -2 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$

**6.** $\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$

**7.** $\begin{array}{rrrr|r} 3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}$

**8.** $\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}$

**9.** $\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ \hline 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}$

**10.** $\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}$

**11.** $\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 & -1 & 10 \\ \hline 4 & -4 & 0 & 1 & 0 \end{array}$

**12.** $\begin{array}{rrrr|r} -2 & 3 & 1 & 0 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & -3 & 21 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$

**13.** $$\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 9 \\ \hline 4 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

**14.** $$\begin{array}{rrrr|r} 3 & 4 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

**15.** $$\begin{array}{rrrr|r} 3 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 12 \\ \hline 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

**16.** $$\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 4 \\ \hline -2 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

**17.** $$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

**18.** $$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & -1 & 10 \\ \hline 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

**19.** $$\begin{array}{rrrr|r} 5 & -3 & 1 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

**20.** $$\begin{array}{rrrr|r} 3 & 4 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 4 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

**21.** $$\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ -7 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ \hline 0 & 5 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

**22.** $$\begin{array}{rrrr|r} 3 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 5 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

**23.** $$\begin{array}{rrrr|r} 3 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 3 & -3 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

**24.** $$\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 12 \\ \hline 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

**25.** $$\begin{array}{rrrr|r} -2 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ \hline 3 & 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

**26.** $$\begin{array}{rrrr|r} 5 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 9 \\ \hline 1 & 6 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

**27.** $$\begin{array}{rrrr|r} 3 & -4 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

**28.** $$\begin{array}{rrrr|r} -2 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & -2 & -4 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

**29.** $$\begin{array}{rrrr|r} 4 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 3 & -1 & 3 \\ \hline -3 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

**30.** $$\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -6 & 4 & -1 & -2 \\ \hline 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

**Задача 5.** Решить задачу о потребительском выборе. Пусть $x_i$ — количество приобретаемого $i$-го продукта, $a_i$ — цена единицы $i$-го продукта, $i = 1, 2, 3$. Максимизировать функцию полезности

$$U(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) \to \max$$

при ограничениях $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \leqslant 1$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$. Варианты параметров даны в табл. П3.

**Задача 6.** В слоистом ориентированном графе найти кратчайший путь из вершины $\alpha$ в вершину $\omega$. Длина ребра задана числом, записанным рядом с ребром (рис. П1). Варианты параметров даны в табл. П3.

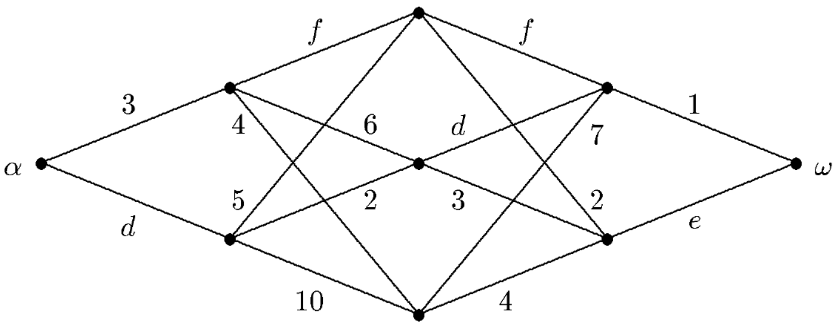


**Рис. П1**

**Задача 7.** Имеются пять групп предметов. Заданы количество, объем и вес предметов в каждой группе (табл. П2).

*Таблица П2*

| Группа | $\Gamma_1$ | $\Gamma_2$ | $\Gamma_3$ | $\Gamma_4$ | $\Gamma_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Количество | 1 | $l$ | 3 | 1 | 2 |
| Вес | 2 | 3 | $m$ | 4 | 1 |
| Объем | 1 | 2 | 3 | $n$ | 1 |

Предметы укладываются в рюкзак объема $V = 7$. Максимизировать общий вес рюкзака. Варианты параметров даны в табл. П3.

*Таблица П3*

| Номер варианта | $a$ | $b$ | $c$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $d$ | $e$ | $f$ | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $0,1$ | 620 | 500 | 2 | $1,5$ | $1,5$ | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | $0,1$ | 730 | 500 | 5 | 4 | 3 | 4 | 1 | 3 | 3 | 1 | 4 |
| 3 | $0,1$ | 840 | 500 | 5 | 4 | 2 | 4 | 6 | 5 | 2 | 2 | 4 |
| 4 | $0,1$ | 650 | 510 | $1,5$ | $1,2$ | $0,1$ | 7 | 6 | 6 | 3 | 2 | 2 |
| 5 | $0,1$ | 760 | 510 | 1 | $0,8$ | $0,1$ | 9 | 1 | 7 | 3 | 1 | 1 |
| 6 | $0,1$ | 870 | 510 | 2 | 2 | $1,5$ | 4 | 4 | 2 | 2 | 4 | 4 |
| 7 | $0,1$ | 790 | 520 | 2 | $1,5$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| 8 | $0,2$ | 920 | 400 | 2 | $1,5$ | $0,4$ | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 9 | $0,2$ | 850 | 400 | 2 | $1,6$ | $1,4$ | 5 | 1 | 4 | 2 | 1 | 4 |
| 10 | $0,2$ | 780 | 400 | 2 | $1,8$ | $1,5$ | 3 | 7 | 6 | 3 | 3 | 3 |
| 11 | $0,2$ | 710 | 400 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 3 | 2 |
| 12 | $0,2$ | 880 | 410 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| 13 | $0,2$ | 810 | 410 | 2 | $1,5$ | $0,7$ | 7 | 7 | 7 | 3 | 2 | 4 |
| 14 | $0,2$ | 740 | 410 | 6 | 5 | 1 | 8 | 2 | 8 | 2 | 2 | 3 |
| 15 | $0,3$ | 660 | 300 | $0,6$ | $0,5$ | $0,1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 16 | $0,3$ | 690 | 300 | 3 | 2 | $0,9$ | 3 | 4 | 5 | 2 | 4 | 3 |
| 17 | $0,3$ | 720 | 300 | $0,8$ | $0,6$ | $0,5$ | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 18 | $0,3$ | 750 | 300 | 2 | $1,5$ | $0,5$ | 6 | 2 | 5 | 3 | 2 | 3 |
| 19 | $0,3$ | 780 | 300 | 6 | 3 | 3 | 1 | 6 | 7 | 2 | 6 | 1 |
| 20 | $0,3$ | 800 | 300 | $1,4$ | $0,9$ | $0,9$ | 8 | 5 | 6 | 2 | 2 | 2 |
| 21 | $0,1$ | 620 | 200 | 3 | 2 | $1,5$ | 7 | 3 | 9 | 2 | 3 | 3 |
| 22 | $0,1$ | 730 | 200 | $1,6$ | $1,3$ | $1,2$ | 2 | 5 | 2 | 2 | 5 | 2 |
| 23 | $0,1$ | 840 | 200 | $0,9$ | $0,8$ | $0,1$ | 4 | 5 | 6 | 2 | 1 | 3 |
| 24 | $0,4$ | 480 | 300 | 2 | $1,6$ | $1,4$ | 1 | 6 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| 25 | $0,4$ | 720 | 300 | 4 | $3,5$ | 3 | 5 | 3 | 9 | 2 | 3 | 2 |
| 26 | $0,4$ | 720 | 200 | 1 | $0,9$ | $0,2$ | 4 | 7 | 3 | 3 | 1 | 2 |
| 27 | $0,5$ | 720 | 300 | $1,5$ | $1,2$ | $0,2$ | 3 | 3 | 4 | 4 | 3 | 3 |
| 28 | $0,5$ | 720 | 200 | $0.5$ | $0,4$ | $0,3$ | 4 | 5 | 2 | 2 | 5 | 3 |
| 29 | $0,5$ | 720 | 100 | 3 | 3 | 3 | 1 | 2 | 6 | 1 | 2 | 1 |
| 30 | $0,5$ | 750 | 400 | 3 | 3 | $2,5$ | 7 | 4 | 1 | 1 | 4 | 1 |

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карманов В.Г.* Математическое программирование: Учеб. пособие. 5-е изд., испр. М.: Физматлит: Наука, 2000. 263 с.

2. *Аттетков А.В.*, *Галкин С.В.*, *Зарубин В.С.* Методы оптимизации: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 440 с.

3. *Калихман И.Л.*, *Войтенко М.А.* Динамическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 1979. 126 с.

4. *Ашманов С.А.*, *Тимохов А.В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Физматлит: Наука, 1991. 448 с.

5. Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1986. 464 с.

6. Сборник задач по математике для втузов: Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения / Под ред. А.В. Ефимова. М.: Наука, 1990. 304 с.

7. *Иванов Ю.Н.*, *Токарев В.В.*, *Уздемир А.П.* Математическое описание элементов экономики. М.: Физматлит: Наука, 1994. 414 с.

8. *Исмагилов Р.С.*, *Калинкин А.В.*, *Станцо В.В.* Графы: Учеб. пособие по курсу «Дискретная математика» / Под ред. Р.С. Исмагилова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 40 с.

9. *Исмагилов Р.С.*, *Калинкин А.В.* Элементы математического программирования: Метод. указания к решению типовых задач. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 24 с.

10. *Косоруков О.А.*, *Мищенко А.В.* Исследование операций. М.: Изд-во «Экзамен», 2003. 448 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

*Методическое издание*

**Раис Сальманович Исмагилов**
**Александр Вячеславович Калинкин**
**Виталий Владимирович Станцо**

**НЕЛИНЕЙНОЕ И ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

Редактор *А.В. Сахарова*
Корректор *М.А. Василевская*
Компьютерная верстка *В.И. Товстоног*

Подписано в печать 27.12.2006. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Печ. л. 2,75. Усл. печ. л. 2,56. Уч.-изд. л. 2,35.
Тираж 700 экз. Изд. № 120. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.