Математические заметки

Том 82 выпуск 6 декабрь 2007

УДК 519.21

Финальное распределение для Марковского процесса эпидемии Гани

А. В. Мастихин

Рассматриваются уравнения Колмогорова для переходных вероятностей трехмерного марковского процесса специального вида. Для стационарного первого уравнения методом Римана получено точное решение. Найдены асимптотики для математического ожидания и дисперсии финального распределения, установлена предельная теорема.

Библиография: 14 названий.

1. Процесс эпидемии. На множестве состояний

$$\mathbb{N}^3 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0, 1, 2, \dots\}$$

рассматривается однородный во времени марковский процесс

$$\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)), \qquad t \in [0, \infty),$$

с переходными вероятностями

$$P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}(t) = \mathsf{P}\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\}.$$

Пусть при $t \to 0+$ переходные вероятности имеют следующий вид ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$):

$$\begin{aligned}
P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1,\alpha_2-1,\alpha_3+1)}(t) &= \lambda_1\alpha_1\alpha_2 t + o(t),\\
P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3-1)}(t) &= \lambda_2\alpha_1\alpha_3 t + o(t),\\
P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1-1,\alpha_2,\alpha_3)}(t) &= \lambda_3\alpha_1 t + o(t),\\
P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(t) &= 1 - (\lambda_1\alpha_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1\alpha_3 + \lambda_3\alpha_1)t + o(t).
\end{aligned}$$

Введем производящие функции переходных вероятностей

$$F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3) = \sum_{\beta_1,\beta_2,\beta_3=0}^{\infty} P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2} s_3^{\beta_3}, \qquad |s_1| \leqslant 1, \quad |s_2| \leqslant 1, \quad |s_3| \leqslant 1.$$

Вторая (прямая) система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей процесса $\xi(t)$ равносильна уравнению в частных производных [1], [2]

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} = \lambda_1(s_1s_3 - s_1s_2)\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_2(s_1 - s_1s_3)\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial s_1 \partial s_3} + \lambda_3(1 - s_1)\frac{\partial F_\alpha}{\partial s_1} \tag{1}$$

с начальным условием $F_\alpha(0; s_1, s_2, s_3) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} s_3^{\alpha_3}$. Введем экспоненциальную (двойную) производящую функцию переходных вероятностей

$$\mathscr{F}(t; z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!}\, F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3).$$

Первая (обратная) система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей приводится к виду [2], [3]

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} = \lambda_1 z_1 z_2\left(\frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial z_1 \partial z_3} - \frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial z_1 \partial z_2}\right) + \lambda_2 z_1 z_3\left(\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial z_1 \partial z_3}\right) + \lambda_3 z_1\left(\mathscr{F} - \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial z_1}\right)$$

с начальным условием

$$\mathscr{F}(0; z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = e^{z_1s_1 + z_2s_2 + z_3s_3}.$$

Марковский процесс $\xi(t)$ интерпретируется [1], [4], [5] как модель распространения инфекции в популяции с тремя типами особей (частиц) и двумя стадиями заболевания. Частицы типа T_1 – зараженные особи (источники инфекции); частицы типа T_2 – здоровые особи (восприимчивые к инфекции, не имевшие контактов с зараженными); частицы типа T_3 – особи, имевшие один контакт с зараженными. Здоровая особь после двух контактов с зараженными удаляется из популяции. Состояние процесса $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ означает наличие α_1 частиц типа T_1, α_2 частиц типа T_2 и α_3 частиц типа T_3. Через случайное время τ_α^1, $\mathsf{P}\{\tau_\alpha^1 < t\} = 1 - e^{-\alpha_1\alpha_2\lambda_1 t}$, пара частиц типа T_1 и типа T_2 взаимодействует и превращается в частицу типа T_1 и частицу типа T_3. Процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1, \alpha_2-1, \alpha_3+1)$. Через случайное время τ_α^2, $\mathsf{P}\{\tau_\alpha^2 < t\} = 1 - e^{-\alpha_1\alpha_3\lambda_2 t}$, пара частиц типа T_1 и типа T_3 взаимодействует и превращается в частицу типа T_1. Процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3-1)$. Кроме того, через случайное время τ_α^3, $\mathsf{P}\{\tau_\alpha^3 < t\} = 1 - e^{-\alpha_1\lambda_3 t}$, частица типа T_1 умирает и процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \alpha_3)$. Случайные величины τ_α^1, τ_α^2, τ_α^3 независимы, в состоянии $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ процесс находится случайное время $\tau_\alpha = \min\{\tau_\alpha^1, \tau_\alpha^2, \tau_\alpha^3\}$. Далее аналогичная эволюция процесса.

Переходные вероятности

$$\bigl\{P_{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(t),\ (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{N}^3\bigr\}$$

определяют α-частичную функцию распределения [6]. Для марковских процессов рассматриваемого типа первая система дифференциальных уравнений записывается в виде *цепочки уравнений* [7; гл. 5].

2. Задача о финальных вероятностях. Марковский процесс $\xi(t)$ введен Гани [1] и является обобщением марковского процесса эпидемии Вейса [3], [5]. В работе [1] второе уравнение Колмогорова (1) решено методом преобразования Лапласа, при значениях параметров $\lambda_1 = \lambda_2$. Тот же метод применен в [2] для решения уравнений марковского процесса эпидемии Бартлетта–Мак-Кендрика [4]. Однако выражения для решений в [1], [8] состоящие из наборов многократных сумм и произведений, малопригодны для исследования асимптотических свойств рассматриваемых случайных процессов.

Для процесса $\xi(t)$ определим финальные вероятности для поглощающих состояний $(0,\gamma_2,\gamma_3)$, $\gamma_2,\gamma_3 = 0,1,2,\dots$,

$$q_{(0,\gamma_2,\gamma_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} = \lim_{t\to\infty} P_{(0,\gamma_2,\gamma_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(t), \quad (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{N}^3, \qquad \sum_{\gamma_2,\gamma_3=0}^{\infty} q_{(0,\gamma_2,\gamma_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} = 1.$$

Задача вычисления финального распределения вероятностей для марковского процесса на $\mathbb{N}^2$ решалась в работе [9] в специальном случае *ветвящегося процесса*, когда переходные вероятности связаны нелинейным соотношением и известно уравнение для одночастичной производящей функции переходных вероятностей [10].

В настоящей работе при рассмотрении уравнений Колмогорова для процесса $\xi(t)$ используется введенная в [2] экспоненциальная производящая функция переходных вероятностей и вычисление финального распределения для марковского процесса сводится к решению стационарного первого уравнения. Такой метод нахождения финальных вероятностей применялся для процесса эпидемии [3] и других марковских процессов на $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$ (см. гл. 3 в обзоре [7]). Полученные примеры решений стационарных уравнений Колмогорова имеют интегральный вид (см. выражение (18) настоящей работы), легко используемый для вывода предельных теорем.

Асимптотические свойства финального распределения для процесса $\xi(t)$ рассматриваются при $\alpha_2\to\infty$, поскольку представляет интерес случай, когда при $t=0$ число инфицированных особей мало, а незараженных велико [5]. Предельная теорема 2 относится к теоремам “порогового” типа [5], которые применяются для определения пороговой численности инфицированных особей, превышение которой означает начало эпидемии.

В [11] изложены результаты, аналогичные полученным в настоящей работе, при значениях параметров $\lambda_1 = \lambda_2$.

3. Стационарное первое уравнение Колмогорова. Введем производящую функцию финальных вероятностей

$$\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2,s_3) = \sum_{\gamma_2,\gamma_3=0}^{\infty} q_{(0,\gamma_2,\gamma_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} s_2^{\gamma_2} s_3^{\gamma_3}, \qquad |s_2|\leqslant 1, \quad |s_3|\leqslant 1,$$

и экспоненциальную производящую функцию

$$\Phi(z_1,z_2,z_3;s_2,s_3) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!}\, \Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2,s_3). \tag{2}$$

Очевидно, функции $\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2,s_3)$ и $\Phi(z_1,z_2,z_3;s_2,s_3)$ аналитичны в области $|s_2|<1$, $|s_3|<1$ и, соответственно, при любых z_1, z_2, z_3.

Аналогично теореме 3.1 работы [9] показывается, что

$$\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3) = \lim_{t\to\infty} \mathscr{F}(t; z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3)$$

и $\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3)$ удовлетворяет стационарному первому уравнению

$$\lambda_1 z_2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z_1\partial z_3} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z_1\partial z_2}\right) + \lambda_2 z_3\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z_1} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z_1\partial z_3}\right) + \lambda_3\left(\Phi - \frac{\partial\Phi}{\partial z_1}\right) = 0. \tag{3}$$

Получим условия на функцию $\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3)$. Из равенств для финальных вероятностей $q_{(0,\alpha_2,\alpha_3)}^{(0,\alpha_2,\alpha_3)} = 1$ и $q_{(0,\gamma_2,\gamma_3)}^{(0,\alpha_2,\alpha_3)} = 0$ при $\alpha_2 \neq \gamma_2$ или $\alpha_3 \neq \gamma_3$, следует

$$\begin{aligned}\Phi(0, z_2, z_3; s_2, s_3) &= \sum_{\alpha_2,\alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_2!\,\alpha_3!}\,\Phi_{(0,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2, s_3)\\ &= \sum_{\alpha_2,\alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_2!\,\alpha_3!}\, s_2^{\alpha_2} s_3^{\alpha_3} = e^{z_2 s_2 + z_3 s_3}.\end{aligned}$$

Для начальных состояний $(\alpha_1, 0, 0)$, $\alpha_1 = 0, 1, 2\dots$, финальные вероятности равны $q_{(0,0,0)}^{(\alpha_1,0,0)} = 1$ и $q_{(0,\gamma_2,\gamma_3)}^{(\alpha_1,0,0)} = 0$ при $\gamma_2 \neq 0$ или $\gamma_3 \neq 0$. Следовательно,

$$\Phi(z_1, 0, 0; s_2, s_3) = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\,\Phi_{(\alpha_1,0,0)}(s_2, s_3) = \sum_{\alpha_2,\alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} = e^{z_1}.$$

Таким образом, линейное уравнение в частных производных (3) рассматривается при граничных условиях

$$\Phi(0, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = e^{z_2 s_2 + z_3 s_3}, \qquad \Phi(z_1, 0, 0; s_1, s_2, s_3) = e^{z_1}. \tag{4}$$

В работе получено решение задачи (3), (4), удовлетворяющее условию аналитичности. Рассмотрение вопросов существования и единственности решений уравнений вида (3) не является целью настоящей работы.

4. Интегральное представление для функции $\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2, s_3)$.

Теорема 1. *Положим $\rho = \lambda_2/\lambda_1$ и $\mu = \lambda_3/\lambda_1$; пусть $\rho \neq 1$. Экспоненциальная производящая функция финальных вероятностей равна*

$$\begin{aligned}&\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3)\\ &\quad= \int_0^\infty \exp\biggl\{-\mu v + z_2\biggl(1 + (s_2-1)e^{-v} - (s_3-1)\frac{e^{-\rho v} - e^{-v}}{\rho - 1}\biggr) + z_3\bigl(1 + (s_3-1)e^{-\rho v}\bigr)\biggr\}\\ &\qquad\qquad \times \biggl[\mu + z_2\biggl((s_2-1)e^{-v} - (s_3-1)\frac{\rho e^{-\rho v} - e^{-v}}{\rho - 1}\biggr) + z_3(s_3-1)\rho e^{-\rho v}\biggr]\\ &\qquad\qquad \times J_0\bigl(2\sqrt{-\mu z_1 v}\,\bigr)\,dv,\end{aligned} \tag{5}$$

где $J_0(z)$ – функция Бесселя порядка нуль.

Доказательство. Функция (5) находится как решение уравнения (3),

$$z_2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z_1\partial z_2} - (z_2 - \rho z_3)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z_1\partial z_3} - (\rho z_3 - \mu)\frac{\partial\Phi}{\partial z_1} - \mu\Phi = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим замену переменных $x = z_1$, $y = y(z_2, z_3)$, $\zeta = \zeta(z_2, z_3)$; вводим функцию $\Psi(x, y, \zeta; s_2, s_3)$ такую, что

$$\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3) = \Psi(x, y(z_2, z_3), \zeta(z_2, z_3); s_2, s_3).$$

Тогда главная часть уравнения (6) получает вид

$$\begin{aligned} &z_2\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial z_2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z_2}\right) - (z_2 - \rho z_3)\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial z_3} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z_3}\right)\\ &\quad= \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial\zeta}\left(z_2\frac{\partial\zeta}{\partial z_2} - (z_2 - \rho z_3)\frac{\partial\zeta}{\partial z_3}\right) + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\left(z_2\frac{\partial y}{\partial z_2} - (z_2 - \rho z_3)\frac{\partial y}{\partial z_3}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Первое слагаемое в (7) исключается при выполнении равенства

$$z_2\frac{\partial\zeta}{\partial z_2} - (z_2 - \rho z_3)\frac{\partial\zeta}{\partial z_3} = 0.$$

Для уравнения первого порядка находим первый интеграл характеристической системы и полагаем

$$\zeta(z_2, z_3) = \exp\{(\rho - 1)z_2^{-\rho}z_3 - z_2^{1-\rho}\}.$$

Коэффициент во втором слагаемом в (7) можно упростить выбором функции $y(z_2, z_3)$. В связи со вторым из требований (4), на замену переменных наложим предельное условие: из $y \to 0$ следует, что $z_2(y, \zeta) \to 0$, $z_3(y, \zeta) \to 0$. Отсюда следует рассмотрение случаев $\rho > 1$ и $0 < \rho < 1$, для которых выбор $y(z_2, z_3)$ различен.

(a) $\rho > 1$. Второе слагаемое в (7) упрощается, если функция $y(z_2, z_3)$ удовлетворяет уравнению

$$z_2\,\frac{\partial y}{\partial z_2} + \rho z_3\,\frac{\partial y}{\partial z_3} = 0.$$

Находим общее решение последнего уравнения и возьмем функцию

$$y(z_2, z_3) = \exp\{-(\rho - 1)z_2^{-\rho}z_3\}.$$

Имеем замену переменных и обратную к ней

$$x = z_1, \qquad y = \exp\{(1 - \rho)z_2^{-\rho}z_3\}, \qquad \zeta = \exp\{(\rho - 1)z_2^{-\rho}z_3 - z_2^{1-\rho}\}; \tag{8}$$

$$z_1 = x, \qquad z_2 = (-\ln\zeta y)^{1/(1-\rho)}, \qquad z_3 = \frac{\ln y}{1 - \rho}\,(-\ln\zeta y)^{\rho/(1-\rho)}. \tag{9}$$

Наложенное выше предельное условие выполнено.

После преобразований при подстановке (9) в (6) и (4), получаем уравнение

$$(\rho - 1)y\ln\zeta y\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} - \left(\frac{\rho}{\rho - 1}\ln y(-\ln\zeta y)^{\rho/(1-\rho)} + \mu\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \mu\Psi = 0 \tag{10}$$

с граничными условиями

$$\Psi(0,y,\zeta;s_2,s_3)=\exp\left\{(-\ln\zeta y)^{1/(1-\rho)}s_2-\frac{\ln y}{\rho-1}(-\ln\zeta y)^{\rho/(1-\rho)}s_3\right\},$$
$$\Psi(x,0,\zeta;s_2,s_3)=e^x.$$

Далее упрощение уравнения (10) связано со слагаемым с производной первого порядка: делаем стандартную замену [12] $\Psi(x,y,\zeta;s_2,s_3)=u(x,y)g(y)$, где $g(y)$ – решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$(\rho-1)y\ln\zeta y\,\frac{dg}{dy}-\left(\frac{\rho}{\rho-1}\ln y(-\ln\zeta y)^{\rho/(1-\rho)}+\mu\right)g=0.$$

Берем частное решение

$$g(y)=(-\ln\zeta y)^{-\mu/(1-\rho)}\exp\left\{(-\ln\zeta y)^{1/(1-\rho)}-\frac{\ln y}{\rho-1}(-\ln\zeta y)^{\rho/(1-\rho)}\right\}$$

и после соответствующих вычислений получаем уравнение для функции $u(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\mu}{(\rho-1)y\ln\zeta y}\,u=0. \qquad (11)$$

Здесь необходимо определить и решить вспомогательную граничную задачу для уравнения (11). Пусть $y_0>0$. Введем функции

$$\varphi(x)=\frac{\Psi(x,0,\zeta;s_2,s_3)}{g(y_0)}\,,\qquad \psi(y)=\frac{\Psi(0,y-y_0,\zeta;s_2,s_3)}{g(y)}\,.$$

Обозначим $u^0(x,y)$ решение гиперболического уравнения (11) с граничными условиями на характеристиках $y=y_0$ и $x=0$,

$$u^0(x,y_0)=\varphi(x),\qquad u^0(0,y)=\psi(y). \qquad (12)$$

Здесь $\varphi(0)=\lim_{y\to y_0}\psi(y_0)=1/g(y_0)$ (так как $\lim_{y\to 0}\Psi(0,y,\zeta;s_2,s_3)=1$ по предельному условию).

Задача Гурса (11), (12) решается методом Римана [12], [13]. *Функция Римана* $R(x,y;x_0,y_0)$ определяется как решение уравнения, сопряженного с (11) (совпадающего с (11) в рассматриваемом случае),

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}+\frac{\mu}{(\rho-1)y\ln\zeta y}\,R=0, \qquad (13)$$

удовлетворяющее на характеристиках $y=y_0$ и $x=x_0$ условиям

$$R(x,y_0;x_0,y_0)=\exp\int_{x_0}^{x}0\,d\tau=1,\qquad R(x_0,y;x_0,y_0)=\exp\int_{y_0}^{y}0\,dt=1. \qquad (14)$$

Подстановкой в уравнение (13) и проверкой условий (14) устанавливается, что функция Римана равна

$$R(x,y;x_0,y_0)=J_0\left(2\sqrt{-\frac{\mu}{\rho-1}(x-x_0)\ln\frac{\ln\zeta y_0}{\ln\zeta y}}\,\right). \qquad (15)$$

Функция (15) находится изложенным в [13] методом представления в виде ряда

$$R(x,y;x_0,y_0)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{v_j(x,y;x_0,y_0)(x-x_0)^j(y-y_0)^j}{j!\,j!}\,. \tag{16}$$

Ряд (16) подставляется в уравнение (13), для функций $v_j(x,y;x_0,y_0)$ решается рекуррентное дифференциальное соотношение (ср. [11], доказательство леммы 1).

Решение задачи (11), (12) дается формулой Римана ($x>0$, $y>y_0$)

$$\begin{aligned}u^0(x,y)&=R(x,y_0;x,y)\varphi(x)+R(0,y;x,y)\psi(y)-R(0,y_0;x,y)\varphi(0)\\&\quad-\int_0^x\frac{\partial R(\tau,y_0;x,y)}{\partial\tau}\,\varphi(\tau)\,d\tau-\int_{y_0}^y\frac{\partial R(0,t;x,y)}{\partial t}\,\psi(t)\,dt;\end{aligned}$$

интегрируя по частям, имеем

$$u^0(x,y)=\frac{R(0,y_0;x,y)}{g(y_0)}+\int_0^x\frac{R(\tau,y_0;x,y)e^{\tau}}{g(y_0)}\,d\tau+\int_{y_0}^y\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\,R(0,t;x,y)\,dt. \tag{17}$$

Рассмотрим предельный переход при $y_0\to 0$. Из явного вида функций (15) и $g(y)$ можно получить, что

$$\lim_{y_0\to 0}\frac{R(0,y_0;x,y)}{g(y_0)}=0,\qquad \lim_{y_0\to 0}\frac{R(\tau,y_0;x,y)e^{\tau}}{g(y_0)}=0.$$

Соответственно, при $y_0\to 0$ из выражения (17) для $u^0(x,y)$ имеем решение уравнения (11)

$$u(x,y)=\int_0^y\frac{\partial\theta(t)}{\partial t}\,R(0,t;x,y)\,dt;$$

здесь

$$\theta(t)=\lim_{y_0\to 0}\psi(t)=(-\ln\zeta t)^{\mu/(1-\rho)}\exp\biggl\{(s_2-1)(-\ln\zeta t)^{1/(1-\rho)}-(s_3-1)\frac{\ln t}{\rho-1}(-\ln\zeta t)^{\rho/(1-\rho)}\biggr\}.$$

После подстановки имеем

$$\begin{aligned}u(x,y)=\int_0^y\frac{(-\ln\zeta t)^{\mu/(1-\rho)-1}}{(\rho-1)t}&\exp\biggl\{(s_2-1)(-\ln\zeta t)^{1/(1-\rho)}-(s_3-1)\frac{\ln t}{\rho-1}(-\ln\zeta t)^{\rho/(1-\rho)}\biggr\}\\&\times\biggl[\mu+(s_2-1)(-\ln\zeta t)^{1/(1-\rho)}\\&\qquad-(s_3-1)\biggl((-\ln\zeta t)^{1/(1-\rho)}+\frac{\rho\ln t}{\rho-1}(-\ln\zeta t)^{\rho/(1-\rho)}\biggr)\biggr]\\&\times J_0\biggl(2\sqrt{-\frac{\mu}{\rho-1}x\ln\frac{\ln\zeta t}{\ln\zeta y}}\,\biggr)\,dt\end{aligned}$$

(сходимость несобственного интеграла очевидна; $\rho>1$). При замене переменной интегрирования $v=\ln(\ln\zeta t/\ln\zeta y)/(\rho-1)$ (т.е. $\ln\zeta t=e^{(\rho-1)v}\ln\zeta y$, $dt/t=$

$(\rho-1)e^{(\rho-1)v}\ln\zeta y\,dv)$, получаем

$$
\begin{aligned}
u(x,y)=\int_0^\infty e^{-\mu v}(-\ln\zeta y)^{\mu/(1-\rho)}\exp\biggl\{&(s_2-1)e^{-v}(-\ln\zeta y)^{1/(1-\rho)}\\
&-(s_3-1)\frac{e^{(\rho-1)v}\ln\zeta y-\ln\zeta}{\rho-1}\,e^{-\rho v}(-\ln\zeta y)^{\rho/(1-\rho)}\biggr\}\\
&\times\biggl[\mu+(s_2-1)e^{-v}(-\ln\zeta y)^{1/(1-\rho)}-(s_3-1)\biggl(e^{-v}(-\ln\zeta y)^{1/(1-\rho)}\\
&+\frac{\rho(e^{(\rho-1)v}\ln\zeta y-\ln\zeta)}{\rho-1}\,e^{-\rho v}(-\ln\zeta y)^{\rho/(1-\rho)}\biggr)\biggr]J_0\bigl(2\sqrt{-\mu x v}\,\bigr)\,dv.
\end{aligned}
$$

Далее, $\Psi(x,y,\zeta;s_2,s_3)=u(x,y)g(y)$ и, возвращаясь от переменных x, y, ζ к переменным z_1, z_2, z_3 по формулам (8), приходим к выражению (5).

Совершенный выше предельный переход при $y_0\to0$ нуждается в обосновании; однако непосредственной подстановкой выражения (5) в уравнение (6) и проверкой условий (4) убеждаемся, что (5) является решением задачи (6), (4). Выполнено требование аналитичности решения по переменным z_1, z_2, z_3; единственность решения (5) устанавливается, исходя из аналитичности решения (ср. [13], [3]).

(б) $0<\rho<1$. Используется замена переменных

$$
x=z_1,\quad y=\exp\biggl\{-(\rho-1)z_2^{-\rho}z_3+z_2^{1-\rho}+\frac{\rho-1}{\rho}\,z_2^{-\rho}\biggr\},\quad \zeta=\exp\{(\rho-1)z_2^{-\rho}z_3-z_2^{1-\rho}\};
$$

$$
z_1=x,\quad z_2=\biggl(\frac{\rho}{\rho-1}\ln\zeta y\biggr)^{-1/\rho},\quad z_3=\frac{1}{\rho\ln\zeta y}\biggl(\ln\zeta+\biggl(\frac{\rho}{\rho-1}\ln\zeta y\biggr)^{(\rho-1)/\rho}\biggr).
$$

Выполнено предельное условие, связанное с (4): из $y\to0$ следует, что $z_2(y,\zeta)\to0$, $z_3(y,\zeta)\to0$. После подстановки в (6) и (4), получаем уравнение для функции $\Psi(x,y,\zeta;s_2,s_3)$:

$$
\rho y\ln\zeta y\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}-\biggl(\frac{1}{\ln\zeta y}\biggl(\ln\zeta+\biggl(\frac{\rho}{\rho-1}\ln\zeta y\biggr)^{(\rho-1)/\rho}\biggr)-\mu\biggr)\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\mu\Psi=0
$$

с граничными условиями

$$
\Psi(0,y,\zeta;s_2,s_3)=\exp\biggl\{\biggl(\frac{\rho\ln\zeta y}{(\rho-1)}\biggr)^{-1/\rho}s_2+\biggl(\ln\zeta+\biggl(\frac{\rho}{\rho-1}\biggr)\ln\zeta y\biggr)^{(\rho-1)/\rho}\Big/(\rho\ln\zeta y)s_3\biggr\},
$$

$$
\Psi(x,0,\zeta;s_2,s_3)=e^x.
$$

Далее вывод решения (5) аналогичен случаю (а). Выражение для функции Римана совпадает с (15) (вместо $\rho-1$ будет ρ). Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Для марковского процесса $\xi(t)$ производящая функция финальных вероятностей $(\rho\ne1,\ \alpha_1\ne0)$ такова:*

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2,s_3)\\
&\quad=\frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1-1)!}\int_0^\infty v^{\alpha_1-1}e^{-\mu v}\\
&\qquad\times\biggl(1+(s_2-1)e^{-v}-(s_3-1)\frac{e^{-\rho v}-e^{-v}}{\rho-1}\biggr)^{\alpha_2}(1+(s_3-1)e^{-\rho v})^{\alpha_3}\,dv.
\end{aligned}\tag{18}
$$

Доказательство. Производящую функцию (2) представим в виде

$$\Phi(z_1,z_2,z_3;s_2,s_3)=\sum_{\alpha_1=0}^{\infty}\frac{z_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\,\Phi_{(\alpha_1,0,0)}(s_2,s_3)+\sum_{\alpha_1=0}^{\infty}\sum_{\alpha_2=1}^{\infty}\frac{z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1!\,\alpha_2!}\,\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,0)}(s_2,s_3)$$
$$+\sum_{\alpha_2=0}^{\infty}\sum_{\alpha_3=1}^{\infty}\frac{z_2^{\alpha_2}z_3^{\alpha_3}}{\alpha_2!\,\alpha_3!}\,\Phi_{(0,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2,s_3)$$
$$+\sum_{\alpha_1=1}^{\infty}\sum_{\alpha_2=0}^{\infty}\sum_{\alpha_3=1}^{\infty}\frac{z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}z_3^{\alpha_3}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!}\,\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2,s_3) \tag{19}$$

и сведем выражение (5) к аналогичной сумме. Воспользуемся разложениями

$$J_0(z)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{(z/2)^{2i}}{(i!\,i!)}\qquad\text{и}\qquad e^{az_3}(b+cz_3)=b+\sum_{j=1}^{\infty}\biggl(\frac{z_3^j}{j!}\biggr)(ba^j+jca^{j-1}),$$

тогда из (5)

$$\Phi(z_1,z_2,z_3;s_2,s_3)$$
$$=\sum_{\alpha_1=0}^{\infty}\frac{\mu^{\alpha_1}z_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!\,\alpha_1!}\int_0^\infty v^{\alpha_1}\exp\biggl\{-\mu v+z_2\biggl(1+(s_2-1)e^{-v}-(s_3-1)\frac{e^{-\rho v}-e^{-v}}{\rho-1}\biggr)\biggr\}$$
$$\times\biggl[\mu+z_2\biggl((s_2-1)e^{-v}-(s_3-1)\frac{\rho e^{-\rho v}-e^{-v}}{\rho-1}\biggr)\biggr]\,dv$$
$$+\sum_{\alpha_1=0}^{\infty}\sum_{\alpha_3=1}^{\infty}\frac{\mu^{\alpha_1}z_1^{\alpha_1}z_3^{\alpha_3}}{\alpha_1!\,\alpha_1!\,\alpha_3!}$$
$$\times\int_0^\infty v^{\alpha_1}\exp\biggl\{-\mu v+z_2\biggl(1+(s_2-1)e^{-v}-(s_3-1)\frac{e^{-\rho v}-e^{-v}}{\rho-1}\biggr)\biggr\}$$
$$\times\biggl[\biggl(\mu+z_2\biggl((s_2-1)e^{-v}-(s_3-1)\frac{\rho e^{-\rho v}-e^{-v}}{\rho-1}\biggr)\biggr)$$
$$\times(1+(s_3-1)e^{-\rho v})^{\alpha_3}+\alpha_3(s_3-1)\rho e^{-\rho v}(1+(s_3-1)e^{-\rho v})^{\alpha_3-1}\biggr]\,dv. \tag{20}$$

В первом слагаемом подставляем разложение

$$e^{az_2}(b+cz_2)=b+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_2^k}{k!}\,(ba^k+kca^{k-1});$$

затем в получившемся выражении интеграл разбиваем на сумму двух интегралов и второй из них интегрируем по частям. Во втором слагаемом в (20) интеграл разбиваем на сумму двух интегралов и второй из них интегрируем по частям (с учетом случаев $\alpha_1=0$ и $\alpha_1>0$); затем в получившееся выражение подставляем разложение $e^{az_2}=\sum_{k=0}^{\infty}(z_2^k/k!)a^k$. В результате преобразований из (20) получаем

$$\Phi(z_1,z_2,z_3;s_2,s_3)$$
$$=e^{z_1}+e^{z_2s_2+z_3s_3}-1+\sum_{\alpha_1=1}^{\infty}\sum_{\alpha_2=1}^{\infty}\frac{\mu^{\alpha_1}z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1!\,(\alpha_1-1)!\,\alpha_2!}$$
$$\times\int_0^\infty v^{\alpha_1-1}e^{-\mu v}\biggl(1+(s_2-1)e^{-v}-(s_3-1)\frac{e^{-\rho v}-e^{-v}}{\rho-1}\biggr)^{\alpha_2}\,dv$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{\alpha_1=1}^{\infty}\sum_{\alpha_2=0}^{\infty}\sum_{\alpha_3=1}^{\infty}\frac{\mu^{\alpha_1}z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}z_3^{\alpha_3}}{\alpha_1!\,(\alpha_1-1)!\,\alpha_2!\,\alpha_3!}\\
&\qquad\times\int_0^\infty v^{\alpha_1-1}e^{-\mu v}\biggl(1+(s_2-1)e^{-v}-(s_3-1)\frac{e^{-\rho v}-e^{-v}}{\rho-1}\biggr)^{\alpha_2}\\
&\qquad\times(1+(s_3-1)e^{-v})^{\alpha_3}\,dv.
\end{aligned}
$$

Приравнивая в полученном ряде и ряде (19) коэффициенты при одинаковых степенях z_1, z_2, z_3, получаем интегральное представление (18). Следствие 1 доказано.

5. Асимптотические свойства финального распределения. В рассматриваемом специальном случае частицы типов T_2 и T_3 называются *финальными* [10]. Обозначим через $\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$ случайное число частиц типа T_2 и $\eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$ случайное число частиц типа T_2, которые останутся после того, как процесс эпидемии остановится, т.е. не останется частиц типа T_1. Случайный вектор $(\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)},\ \eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)})$ имеет вероятностное распределение $\{q_{(0,\gamma_2,\gamma_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)},\ (\gamma_2,\gamma_3)\in\mathbb{N}^2\}$, которое определяется производящей функцией (18). Для математических ожиданий получаем при $\alpha_2\to\infty$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}&=\frac{\partial\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1,1)}{\partial s_2}=\alpha_2\biggl(\frac{\mu}{\mu+1}\biggr)^{\alpha_1},\\
\mathsf{E}\eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}&=\frac{\partial\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1,1)}{\partial s_3}\sim\frac{\alpha_2}{\rho-1}\biggl(\biggl(\frac{\mu}{\mu+1}\biggr)^{\alpha_1}-\biggl(\frac{\mu}{\mu+\rho}\biggr)^{\alpha_1}\biggr).
\end{aligned}
$$

Вычисление дисперсий приводит к следующим асимптотическим формулам при $\alpha_2\to\infty$:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{D}\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}&=\frac{\partial^2\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1,1)}{\partial s_2^2}+\frac{\partial\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1,1)}{\partial s_2}-\biggl(\frac{\partial\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1,1)}{\partial s_2}\biggr)^2\\
&\sim\alpha_2^2\biggl(\biggl(\frac{\mu}{\mu+2}\biggr)^{\alpha_1}-\biggl(\frac{\mu}{\mu+1}\biggr)^{2\alpha_1}\biggr),\\
\mathsf{D}\eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}&\sim\frac{\alpha_2^2}{(\rho-1)^2}\biggl(\biggl(\frac{\mu}{\mu+2}\biggr)^{\alpha_1}-2\biggl(\frac{\mu}{\mu+\rho+1}\biggr)^{\alpha_1}+\biggl(\frac{\mu}{\mu+2\rho}\biggr)^{\alpha_1}\\
&\qquad-\biggl(\frac{\mu}{\mu+1}\biggr)^{2\alpha_1}+2\biggl(\frac{\mu^2}{(\mu+1)(\mu+\rho)}\biggr)^{\alpha_1}-\biggl(\frac{\mu}{\mu+\rho}\biggr)^{2\alpha_1}\biggr).
\end{aligned}
$$

Используя явное выражение (18) для производящей функции вероятностного распределения на $\mathbb{N}^2$, применив стандартным образом метод преобразования Лапласа для вывода предельных теорем [14], [10] получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $x_1,x_2\in[0,1]$. *Тогда* $(\rho\neq1,\ \alpha_1\neq0)$

$$
\lim_{\alpha_2\to\infty}\mathsf{P}\biggl\{\frac{\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}}{\alpha_2}\leqslant x_1,\ \frac{\eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}}{\alpha_2}\leqslant x_2\biggr\}=\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}f(y_1,y_2)\,dy_1\,dy_2,
$$

причем двумерное преобразование Лапласа для плотности распределения вероятностей $f(x_1,x_2)$ *имеет вид* $(\lambda_1\geqslant0,\ \lambda_2\geqslant0)$

$$
F(\lambda_1,\lambda_2)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda_1x_1-\lambda_2x_2}f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2
$$

$$= \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1-1)!}\int_0^\infty v^{\alpha_1-1}e^{-\mu v-\lambda_1 e^{-v}+\lambda_2(e^{-\rho v}-e^{-v})/(\rho-1)}\,dv. \tag{21}$$

Замечание. Двумерная плотность распределения представляется в виде

$$f(x_1,x_2)=e^{-(x_1+x_2)/2}\sum_{n=0}^\infty\sum_{m=0}^\infty \frac{a_{nm}}{n!\,m!}L_n(x_1)L_m(x_2), \qquad x_1\geqslant 0, \quad x_2\geqslant 0, \tag{22}$$

где $L_n(x)$, $n=0,1,2,\dots,$ – многочлены Лагерра и

$$a_{nm}=\frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1-1)!}\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^m\frac{C_n^iC_m^j}{i!\,j!}\int_0^\infty v^{\alpha_1-1}$$
$$\times(-1)^i\left(\frac{e^{-\rho v}-e^{-v}}{\rho-1}\right)^j e^{-(i+\mu)v-(1/2)e^{-v}+(1/2)(e^{-\rho v}-e^{-v})/(\rho-1)}\,dv.$$

Разложение по многочленам Лагерра является стандартным в операционном исчислении. Справедливость представления (22) устанавливается прямым вычислением преобразования Лапласа от (22), с использованием равенства ($\lambda\geqslant 0$)

$$\int_0^\infty e^{-(\lambda+1/2)x}L_n(x)\,dx=\frac{n!}{\lambda+1/2}\left(\frac{\lambda-1/2}{\lambda+1/2}\right)^n, \qquad n=0,1,2,\dots,$$

и ряда Тейлора ($|p_1|<1$, $|p_2|<1$)

$$\frac{F\bigl((1/2)(1+p_1)/(1-p_1),(1/2)(1+p_2)/(1-p_2)\bigr)}{(1-p_1)(1-p_2)}=\sum_{n=0}^\infty\sum_{m=0}^\infty a_{nm}p_1^np_2^m,$$
$$a_{nm}=\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^m\frac{C_n^iC_m^j}{i!j!}\,\frac{\partial^{i+j}F(1/2,1/2)}{\partial\lambda_1^i\partial\lambda_2^j}\,.$$

Случайные величины $\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$ и $\eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$ имеют распределения, определяемые производящими функциями $\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2,1)$ и $\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1,s_3)$. Соответственно, полагая в (21) $\lambda_2=0$ или $\lambda_1=0$, имеем следствия для одномерных распределений.

Следствие 2 [3]. *Пусть $x\in[0,1]$. Тогда*

$$\lim_{\alpha_2\to\infty}\mathsf{P}\biggl\{\frac{\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}}{\alpha_2}\leqslant x\biggr\}=\frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1-1)!}\int_{-\ln x}^\infty y^{\alpha_1-1}e^{-\mu y}\,dy.$$

Рассмотрим функцию $x(y)=-(e^{-\rho y}-e^{-y})/(\rho-1)$, $y\in[0,\infty)$. Функция $x(y)$ возрастает на $[0,y_0]$ и убывает на $[y_0,\infty)$; y_0 – точка максимума и $x_0=x(y_0)\leqslant 1$. На отрезке $[0,x_0]$ определены обратные функции $y_1(x)$, $y_1(0)=0$, и $y_2(x)$, $\lim_{x\to 0}y_2(x)=\infty$; причем $y_1(x_0)=y_2(x_0)$.

Следствие 3. *Пусть $x\in[0,x_0]$. Тогда*

$$\lim_{\alpha_2\to\infty}\mathsf{P}\biggl\{\frac{\eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}}{\alpha_2}\leqslant x\biggr\}=\frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1-1)!}\biggl(\int_0^{y_1(x)}y^{\alpha_1-1}e^{-\mu y}\,dy+\int_{y_2(x)}^\infty y^{\alpha_1-1}e^{-\mu y}\,dy\biggr).$$

Рассмотрим случай согласованного стремления α_2 и α_3 к бесконечности. Из (18) следует предельная теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha_2 \to \infty$, $\alpha_3 \to \infty$, *причем отношение* α_3/α_2 *стремится к* $\varkappa$, *где* $0 \leqslant \varkappa < \infty$. *Пусть* $x_1, x_2 \in [0,1]$. *Тогда* $(\rho \neq 1,\ \alpha_1 \neq 0)$

$$\lim_{\substack{\alpha_2\to\infty\\ \alpha_3\to\infty}} \mathsf{P}\biggl\{\frac{\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}}{\alpha_2} \leqslant x_1, \frac{\eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}}{\alpha_2} \leqslant x_2\biggr\} = \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} f(y_1,y_2)\,dy_1\,dy_2,$$

причем преобразование Лапласа для плотности распределения вероятностей имеет вид $(\lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0)$

$$\begin{aligned} F(\lambda_1,\lambda_2) &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 \\ &= \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1-1)!}\int_0^\infty v^{\alpha_1-1} e^{-\mu v - \lambda_1 e^{-v} + \lambda_2(e^{-\rho v}(1-\varkappa(\rho-1)) - e^{-v})/(\rho-1)}\,dv. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] J. Gani, “Approaches to the modelling of AIDS”, *Stochastic Processes in Epidemic Theory*, Lecture Notes in Biomathematics, **86**, Heidelberg, Springer, 1990, 145–154.

[2] Б. А. Севастьянов, А. В. Калинкин, “Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц”, *Докл. АН СССР*, **264**:2 (1982), 306–308.

[3] А. В. Калинкин, “Финальные вероятности ветвящегося процесса с взаимодействием частиц и процесс эпидемии”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **43**:4 (1998), 773–780.

[4] “Эпидемии процесс”, *Математическая энциклопедия*, т. 5, Советская энциклопедия, М., 1985.

[5] А. Н. Старцев, “О распределении размера эпидемии в одной немарковской модели”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **41**:4 (1996), 827–839.

[6] В. П. Маслов, С. Э. Таривердиев, “Асимптотика уравнений Колмогорова–Феллера для системы из большого числа частиц”, Итоги науки и техники. Теория вероятн. Матем. статист. Теорет. киб., **19**, ВИНИТИ, М., 1982, 85–125.

[7] А. В. Калинкин, “Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием”, *УМН*, **57**:2 (2002), 23–84.

[8] J. Gani, “On a partional differential equation of epidemic theory. I”, *Biometrika*, **52**:3 (1965), 617–622.

[9] А. Н. Колмогоров, Б. А. Севастьянов, “Вычисление финальных вероятностей для ветвящихся случайных процессов”, *Докл. АН СССР*, **56** (1947), 783–786.

[10] Б. А. Севастьянов, *Ветвящиеся процессы*, Наука, М., 1971.

[11] А. В. Мастихин, “Решение стационарного первого уравнения Колмогорова для марковского процесса эпидемии со схемой $T_1 + T_2 \to T_1 + T_3$, $T_1 + T_3 \to T_1$, $T_1 \to 0$”, *Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2005, № 2 (17), 75–86.

[12] А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко, *Сборник задач по уравнениям математической физики*, Наука, М., 1985.

[13] E. T. Copson, *Partial Differential Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975.

[14] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, Мир, М., 1984.

А. В. Мастихин
Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана
E-mail: mastikhin@yandex.ru

Поступило
10.11.2006
Исправленный вариант
17.04.2007