Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

А.В. Титов, А.В. Калинкин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА. НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА И ФОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Методические указания к решению типовых задач

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2008

УДК 510.6
ББК 22.12
Т 45

Рецензент *В.Б. Чадов*

Титов А.В., Калинкин А.В.
Т 45 Математическая логика. Нечеткие множества и формальные системы: Метод. указания к решению типовых задач. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 31 с.: ил.

Пособие содержит изложение разделов курса математической логики, включающих элементы теории нечетких множеств, а также теории формальных языков и их семантики. Даны примеры решения типовых задач, в конце каждого раздела приведены задания для самостоятельной работы студентов.

Для студентов 2-го курса факультетов ИБМ, ФН, РК.

УДК 510.6
ББК 22.12

Пособие включает основные понятия теории нечетких множеств, описание операций над нечеткими множествами и элементы нечеткой логики. Приведено описание классификационной схемы вывода. Даны определения языка первого порядка и семантики языка первого порядка.

1. НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА И НЕЧЕТКИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

При рассмотрении прикладных задач, содержащих неопределенность, используется аппарат теории нечетких множеств. В отличие от других математических средств он позволяет формализовать словесную информацию экспертов о задаче и извлечь из нее полезные следствия для построения решения.

1.1. Понятие принадлежности

Принадлежность элемента x множеству X записывается как $x \in X$. Подмножеством A множества X называется множество, каждый элемент которого является элементом множества X, $A \subset X$. Символ $\emptyset$ обозначает пустое множество.

Множество X называется базовым.

Для множества $A \subset X$ определяется дополнение до множества X:

$$x \in \overline{A} \leftrightarrow (x \in X) \wedge (x \notin A)$$

— элемент x принадлежит дополнению тогда и только тогда, когда он принадлежит базовому множеству X и не принадлежит множеству A.

Для двух множеств $A, B \subset X$ определяются бинарные операции, именуемые объединением, пересечением и разностью:

$$x \in C = A \cup B \leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$$

— элемент x принадлежит объединению двух множеств тогда и только тогда, когда он принадлежит первому или второму множеству;

$$x \in C = A \cap B \leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$$

— элемент x принадлежит пересечению двух множеств тогда и только тогда, когда он принадлежит и первому, и второму множествам;

$$x \in C = A \backslash B \leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)$$

— элемент x принадлежит разности двух множеств тогда и только тогда, когда он принадлежит первому множеству и не принадлежит второму.

Свойства операций над множествами рассматриваются в [1, 2].

Принадлежность элемента x множеству A выражается также с помощью характеристической функции

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Характеристическая функция позволяет записать множество A в виде множества упорядоченных пар:

$$A = \{\langle x; \mu_A(x) \rangle \mid x \in X,\ \mu_A(x) \in \{0, 1\}\},$$

где первым элементом пары является элемент базового множества, вторым — значение характеристической функции на этом элементе. Характеристические функции дополнения, объединения, пересечения и разности равны соответственно:

$$\begin{aligned}
\mu_{\overline{A}}(x) &= 1 - \mu_A(x); \\
\mu_{A\cup B}(x) &= \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}; \\
\mu_{A\cap B}(x) &= \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}; \\
\mu_{A\setminus B}(x) &= \mu_A(x) \wedge \mu_{\overline{B}}(x) = \min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}.
\end{aligned}$$

Введенные операции соответствуют операциям бинарной булевой алгебры [2, 3].

П р и м е р 1. Дано базовое множество $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ и два подмножества:

$$A = \{\langle x_1; 1\rangle, \langle x_2; 0\rangle, \langle x_3; 0\rangle, \langle x_4; 1\rangle, \langle x_5; 1\rangle\},$$
$$B = \{\langle x_1; 1\rangle, \langle x_2; 1\rangle, \langle x_3; 0\rangle, \langle x_4; 0\rangle, \langle x_5; 1\rangle\}.$$

Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $B\setminus A$.

Р е ш е н и е. Для элементов базового множества имеем значения характеристических функций:

$$\mu_A(x_1) = 1,\ \mu_A(x_2) = 0,\ \mu_A(x_3) = 0,\ \mu_A(x_4) = 1,\ \mu_A(x_5) = 1;$$
$$\mu_B(x_1) = 1,\ \mu_B(x_2) = 1,\ \mu_B(x_3) = 0,\ \mu_B(x_4) = 0,\ \mu_B(x_5) = 1.$$

Вычислив значения характеристических функций объединения, пересечения и разности, получим

$$\begin{aligned}
A \cup B &= \{\langle x_1; 1\rangle, \langle x_2; 1\rangle, \langle x_3; 0\rangle, \langle x_4; 1\rangle, \langle x_5; 1\rangle\}; \\
A \cap B &= \{\langle x_1; 1\rangle, \langle x_2; 0\rangle, \langle x_3; 0\rangle, \langle x_4; 0\rangle, \langle x_5; 1\rangle\}; \\
B\setminus A &= \{\langle x_1; 0\rangle, \langle x_2; 1\rangle, \langle x_3; 0\rangle, \langle x_4; 0\rangle, \langle x_5; 0\rangle\}.
\end{aligned}$$

З а д а ч а 1. Дано множество $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ и его подмножества:

$$A = \{\langle x_1; 0\rangle, \langle x_2; 1\rangle, \langle x_3; 0\rangle, \langle x_4; 1\rangle, \langle x_5; 1\rangle, \langle x_6; 0\rangle, \langle x_7; 1\rangle\},$$
$$B = \{\langle x_1; 0\rangle, \langle x_2; 1\rangle, \langle x_3; 1\rangle, \langle x_4; 0\rangle, \langle x_5; 0\rangle, \langle x_6; 1\rangle, \langle x_7; 0\rangle\}.$$

Найти $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A\setminus B$.

З а д а ч а 2. Доказать равенства:
а) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$;
б) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$;
в) $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$;
г) $A \cup B = A \cup (B \backslash A)$;
д) $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$;
е) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \backslash C$;
ж) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

1.2. Нечеткие множества и операции над ними

О п р е д е л е н и е 1. X — базовое множество. Нечетким подмножеством A множества X называется множество упорядоченных пар

$$A = \{\langle x; \mu_A(x)\rangle \mid x \in X,\ \mu_A(x) \in [0,1]\}.$$

Функцию $\mu_A(x) : X \to [0,1]$, называют функцией принадлежности множества A. Множество $\{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$ называют носителем нечеткого множества.

Функция принадлежности обобщает понятие характеристической функции; считается, что число $\mu_A(x)$ определяет степень принадлежности элемента x множеству A. Функция принадлежности задается перечислением элементов множества A или функциональным законом.

П р и м е р 2. $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Нечеткое множество A задается высказыванием «x — малое натуральное число», полагаем

$$A = \{\langle 1;1\rangle, \langle 2;1\rangle, \langle 3;0,9\rangle, \langle 4;0,7\rangle, \langle 5;0,4\rangle, \langle 6;0,2\rangle, \langle 7;0,1\rangle\}.$$

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $\alpha \in [0,1]$. Подмножеством α-уровня нечеткого множества A называется множество

$$A_\alpha = \{x \in A \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

П р и м е р 3. Дано нечеткое множество

$$A = \{\langle x_1;0,3\rangle, \langle x_2;0,7\rangle, \langle x_3;1\rangle, \langle x_4;0\rangle, \langle x_5;0,4\rangle\}.$$

Определить множество A_α при $\alpha = 0,3; 0,8$.

Р е ш е н и е. Получаем

$$A_{0,3} = \{\langle x_1; 1\rangle, \langle x_2; 1\rangle, \langle x_3; 1\rangle, \langle x_4; 0\rangle, \langle x_5; 1\rangle\};$$
$$A_{0,8} = \{\langle x_1; 0\rangle, \langle x_2; 0\rangle, \langle x_3; 1\rangle, \langle x_4; 0\rangle, \langle x_5; 0\rangle\}.$$

Операции над нечеткими множествами определяются [4, 5] с помощью функций принадлежности:

дополнение нечеткого множества

$$\overline{A} = X \backslash A \leftrightarrow \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x);$$

объединение нечетких множеств

$$C = A \cup B \leftrightarrow \mu_C(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\};$$

пересечение нечетких множеств

$$C = A \cap B \leftrightarrow \mu_C(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\};$$

разность нечетких множеств

$$C = A \backslash B \leftrightarrow \mu_C(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_{\overline{B}}(x) = \min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}.$$

П р и м е р 4. Дано множество $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ и два нечетких подмножества:

$$A = \{\langle x_1; 0,3\rangle, \langle x_2; 0,7\rangle, \langle x_3; 1\rangle, \langle x_4; 0\rangle, \langle x_5; 0,4\rangle\};$$
$$B = \{\langle x_1; 0,5\rangle, \langle x_2; 0,1\rangle, \langle x_3; 1\rangle, \langle x_4; 0,1\rangle, \langle x_5; 0,4\rangle\}.$$

Найти нечеткие множества $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$.

Р е ш е н и е. Для элементов базового множества имеем

$$\mu_A(x_1) = 0,3,\ \mu_A(x_2) = 0,7,\ \mu_A(x_3) = 1,$$
$$\mu_A(x_4) = 0,\ \mu_A(x_5) = 0,4;$$
$$\mu_B(x_1) = 0,5,\ \mu_B(x_2) = 0,1,\ \mu_B(x_3) = 1,$$
$$\mu_B(x_4) = 0,1,\ \mu_B(x_5) = 0,4.$$

Вычислив значения функций принадлежности отрицания, объединения и пересечения, получим

$$\begin{aligned}
\overline{A} =\ & \{\langle x_1; 0,7\rangle, \langle x_2; 0,3\rangle, \langle x_3; 0\rangle, \langle x_4; 1\rangle, \langle x_5; 0,6\rangle\};\\
A \cup B =\ & \{\langle x_1; 0,5\rangle, \langle x_2; 0,7\rangle, \langle x_3; 1\rangle, \langle x_4; 0,1\rangle, \langle x_5; 0,4\rangle\};\\
A \cap B =\ & \{\langle x_1; 0,3\rangle, \langle x_2; 0,1\rangle, \langle x_3; 1\rangle, \langle x_4; 0\rangle, \langle x_5; 0,4\rangle\}.
\end{aligned}$$

З а д а ч а 3. Определить подмножество α-уровня нечеткого множества

$$A = \{\langle x_1; 0,3\rangle, \langle x_2; 0,2\rangle, \langle x_3; 0,5\rangle, \langle x_4; 0,7\rangle, \langle x_5; 0,2\rangle, \langle x_6; 0,9\rangle\}$$

в случаях $\alpha = 0; 0,3; 0,6; 0,7; 1,0$.

З а д а ч а 4. Для множества $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ и его нечетких подмножеств

$$\begin{aligned}
A &= \{\langle x_1; 0,2\rangle, \langle x_2; 0,7\rangle, \langle x_3; 1\rangle, \langle x_4; 0,1\rangle, \langle x_5; 0,4\rangle, \langle x_6; 0,9\rangle\},\\
B &= \{\langle x_1; 0,5\rangle, \langle x_2; 0,1\rangle, \langle x_3; 0\rangle, \langle x_4; 0,7\rangle, \langle x_5; 0,2\rangle, \langle x_6; 0,9\rangle\}
\end{aligned}$$

найти $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $\overline{A} \cap B$.

З а д а ч а 5. Доказать для нечетких множеств следующие равенства:

а) $A \cup (A \cap B) = A$;

б) $A \cap (A \cup B) = A$.

1.3. Нечеткие отношения

Даны базовые множества X, Y и нечеткие множества

$$A = \{\langle x; \mu_A(x)\rangle \mid x \in X\}; \quad B = \{\langle y; \mu_B(y)\rangle \mid y \in Y\}.$$

Прямым произведением множеств A и B называют нечеткое множество

$$A \times B = \{\langle (x, y);\ \mu_{A\times B}(x, y)\rangle \mid x \in X, y \in Y\},$$

где $\mu_{A\times B}(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$.

Базовые множества $X, Y, Z, \ldots$ можно считать подмножествами универсального множества U; n-арным отношением называется подмножество прямого произведения универсальных множеств:

$$U^n = U \times U \times \ldots \times U = \\ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in U, x_2 \in U, \ldots, x_n \in U\}.$$

Нечетким n-арным отношением называется нечеткое подмножество множества U^n:

$$A = \{\langle(x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ \mu_A(x_1, x_2, \ldots, x_n)\rangle \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U^n\},$$

где $\mu_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0, 1]$ — функция принадлежности. Операции над отношениями есть операции над функциями принадлежности.

Определение 3. Пусть R_1, R_2 — нечеткие отношения на множествах $X \times Y$ и $Y \times Z$ соответствено. Композицией отношений R_1 и R_2 называется нечеткое отношение $R = R_1 * R_2$ на множестве $X \times Z$, функция принадлежности которого определяется равенством

$$\mu_R(x, z) = \mu_{R_1 * R_2}(x, z) = \bigvee_{y \in Y} \mu_{R_1}(x, y) \wedge \mu_{R_2}(y, z).$$

Пример 5. Даны множества $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$. Нечеткие отношения R_1, R_2 на множествах $X \times Y$ и $Y \times Z$ заданы матрицами. Найти композицию отношений $R_1 * R_2$.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	$0,1$	$0,2$	$0,4$	$0,8$
x_2	0	$0,5$	$0,7$	$0,3$
x_3	$0,8$	$0,6$	$0,4$	0

R_2	z_1	z_2	z_3
y_1	$0,7$	$0,6$	$0,5$
y_2	0	$0,4$	$0,8$
y_3	0	0	$0,1$
y_4	$0,3$	$0,6$	$0,3$

Р е ш е н и е. По определению, матрица отношения $R_1 * R_2$ вычисляется как максиминное произведение матриц ($i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3$),

$$\begin{aligned}\mu_R(x_i, z_j) = \max\{&\min\{\mu_{R_1}(x_i, y_1), \mu_{R_2}(y_1, z_j)\},\\ &\min\{\mu_{R_1}(x_i, y_2), \mu_{R_2}(y_2, z_j)\},\\ &\min\{\mu_{R_1}(x_i, y_3), \mu_{R_2}(y_3, z_j)\},\\ &\min\{\mu_{R_1}(x_i, y_4), \mu_{R_2}(y_4, z_j)\}\}.\end{aligned}$$

$R_1 * R_2$	z_1	z_2	z_3
x_1	$0,3$	$0,6$	$0,3$
x_2	$0,3$	$0,4$	$0,5$
x_3	$0,7$	$0,6$	$0,6$

З а д а ч а 6. Даны множества

$$X = \{x_1, x_2, x_3\},\ \ Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\},\ \ Z = \{z_1, z_2, z_3\}.$$

Найти композицию нечетких отношений R_1 и R_2, заданных на множествах $X \times Y$ и $Y \times Z$.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	$0,1$	$0,2$	$0,4$	$0,8$	$0,3$
x_2	0	$0,5$	$0,7$	$0,3$	$0,7$
x_3	$0,8$	$0,6$	$0,4$	0	$0,4$

R_2	z_1	z_2	z_3
y_1	$0,7$	$0,6$	$0,5$
y_2	0	$0,4$	$0,8$
y_3	0	0	$0,1$
y_4	$0,3$	$0,6$	$0,3$
y_5	$0,1$	$0,7$	$0,8$

1.4. Нечеткие и лингвистические переменные. Расплывчатые высказывания

О п р е д е л е н и е 4. Нечеткая переменная характеризуется набором $(A, U, R(A, u))$, где A — название переменой; U — универсальное множество; $R(A,u)$ — нечеткое подмножество множества U.

Определение 5. Лингвистическая переменная — переменная, значениями которой являются нечеткие переменные.

Пример 6. «Рост» — лингвистическая переменная. «Высокий», «средний», «низкий» — нечеткие переменные с базовым множеством $U = [1; 2{,}5]$ (метра).

Нечетким (расплывчатым) высказыванием называют высказывание, о степени истинности которого можно судить в данный момент.

Язык L теории нечетких высказываний включает:

1) пропозициональные буквы $A, B, C, \ldots$;

2) логические связки: отрицание $\neg$ (читается «не»); дизъюнкция $\vee$ (читается «или»); конъюнкция $\wedge$ (читается «и»); импликация $\to$ (читается «если $\ldots$, то $\ldots$»); эквиваленция $\leftrightarrow$ (читается «тогда и только тогда»);

3) скобки ( ).

Формулами исчисления нечетких высказываний называются выражения языка L, построенные по следующим правилам:

1) пропозициональные переменные есть формулы языка L;

2) если A, B — формулы, то $\neg A$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$ — формулы.

Для нечеткого высказывания A вводится степень истинности $s(A)$ — число из промежутка $[0; 1]$. Нечеткое высказывание, имеющее истинностное значение $0,5$, называют индифферентностью. Степень истинности формул вычисляют по следующим правилам:

$$\begin{aligned}
s(\neg A) &= 1 - s(A);\\
s(A \vee B) &= \max\{s(A), s(B)\};\\
s(A \wedge B) &= \min\{s(A), s(B)\};\\
s(A \to B) &= \max\{1 - s(A), s(B)\};\\
s(A \leftrightarrow B) &= \min\{\max\{1 - s(A), s(B)\}, \max\{s(A), 1 - s(B)\}\}.
\end{aligned}$$

Пример 7. Даны нечеткое высказывание

$$D = ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)) \to \neg(A \wedge C)$$

и степени истинности высказываний $s(A) = 0,8$, $s(B) = 0,5$, $s(C) = 0,7$. Определить степень истинности $s(D)$.

Р е ш е н и е. Обозначим $E = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$, $F = \neg(A \wedge C)$; тогда $s(D) = \max\{1 - s(E), s(F)\}$. Имеем

$$\begin{aligned} s(E) = \max\{s(A \wedge B), s(\neg A \wedge B)\} = \\ = \max\{\min\{s(A), s(B)\}, \min\{s(\neg A)s(B)\}\} = \\ = \max\{\min\{0,8; 0,5\}, \min\{1 - 0,8; 0,5\}\} = \\ = \max\{0,5; 0,2\} = 0,5. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} s(F) = 1 - s(A \wedge C) = 1 - \min\{s(A), s(C)\} = \\ = 1 - \min\{0,8; 0,7\} = 0,3. \end{aligned}$$

Окончательно получим, что

$$s(D) = \max\{1 - 0,5; 0,5\} = 0,5.$$

О п р е д е л е н и е 6. Высказывания A и B нечетко близки, если $s(A \leftrightarrow B) \geq 0,5$. Высказывания A и B нечетко индифферентны, если $s(A \leftrightarrow B) = 0,5$.

Пропозициональные буквы $A, B, C, \ldots$, область значений которых состоит из всевозможных нечетких высказываний, называют нечеткими пропозициональными переменными. Если A — формула, $P_1, \ldots, P_n$ — нечеткие пропозициональные переменные, из которых построена формула A, то можно записать выражение $A(P_1, \ldots, P_n)$.

О п р е д е л е н и е 7. Степенью равносильности формул $A_1(P_1, \ldots, P_n)$ и $A_2(P_1, \ldots, P_n)$ от нечетких переменных $P_1, \ldots$ $\ldots, P_n$, называют число

$$\mu(A_1, A_2) = \bigwedge_{s(P_1), \ldots, s(P_n)} s(A_1 \leftrightarrow A_2),$$

где конъюнкция берется по всем наборам значений истинности нечетких переменных $P_1, \ldots, P_n$.

П р и м е р 8. Для формул

$$A_1(P_1, P_2) = P_1 \to P_2; \qquad A_2(P_1, P_2) = P_1 \wedge P_2$$

найти степень равносильности $\mu(A_1, A_2)$ при $s(P_1) = \{0,7; 0,5\}$, $s(P_2) = \{0,2; 0,8\}$.

Р е ш е н и е. По определению,

$$\mu(A_1, A_2) = \bigwedge_{s(P_1), s(P_2)} s((P_1 \to P_2) \leftrightarrow (P_1 \wedge P_2)).$$

При $s(P_1) = 0,7$ и $s(P_2) = 0,2$ вычисляем

$$\begin{aligned}
&s(P_1 \to P_2) = \max\{1 - s(P_1), s(P_2)\} = \max\{1 - 0,7; 0,2\} = 0,3,\\
&s(P_1 \wedge P_2) = \min\{s(P_1), s(P_2)\} = \min\{0,7; 0,2\} = 0,2,\\
&s((P_1 \to P_2) \leftrightarrow (P_1 \wedge P_2)) =\\
&\qquad\qquad = \min\{\max\{1 - 0,3; 0,2\}, \max\{0,3; 1 - 0,2\}\} = 0,7.
\end{aligned}$$

При $s(P_1) = 0,7$ и $s(P_2) = 0,8$ получаем

$$\begin{aligned}
&s(P_1 \to P_2) = \max\{1 - 0,7; 0,8\} = 0,8,\\
&s(P_1 \wedge P_2) = \min\{0,7; 0,8\} = 0,7,\\
&s((P_1 \to P_2) \leftrightarrow (P_1 \wedge P_2)) =\\
&\qquad\qquad = \min\{\max\{1 - 0,8; 0,7\}, \max\{0,8; 1 - 0,7\}\} = 0,7.
\end{aligned}$$

При $s(P_1) = 0,5$ и $s(P_2) = 0,2$ находим

$$\begin{aligned}
&s(P_1 \to P_2) = \max\{1 - 0,5; 0,2\} = 0,5,\\
&s(P_1 \wedge P_2) = \min\{0,5; 0,2\} = 0,2,\\
&s((P_1 \to P_2) \leftrightarrow (P_1 \wedge P_2)) =\\
&\qquad\qquad = \min\{\max\{1 - 0,5; 0,2\}, \max\{0,5; 1 - 0,2\}\} = 0,5.
\end{aligned}$$

При $s(P_1) = 0,5$ и $s(P_2) = 0,8$ вычисляем

$$\begin{aligned}
&s(P_1 \to P_2) = \max\{1 - 0,5; 0,8\} = 0,8,\\
&s(P_1 \wedge P_2) = \min\{0,5; 0,8\} = 0,5,
\end{aligned}$$

$$s((P_1 \to P_2) \leftrightarrow (P_1 \wedge P_2)) =$$
$$= \min\{\max\{1-0,8; 0,5\}, \max\{0,8; 1-0,5\}\} = 0,5.$$

Окончательно получаем

$$\mu(A_1, A_2) = \min\{0,7; 0,7; 0,5; 0,5\} = 0,5.$$

О п р е д е л е н и е 8. Нечеткими тавтологиями называют формулы A_1, A_2, такие, что $\mu(A_1(P_1, \ldots, P_n), A_2(P_1, \ldots, P_n)) \geq 0,5$ при любых значениях $s(P_1), \ldots, s(P_n)$. Для них принято обозначение $A_1 \approx A_2$.

З а д а ч а 7. Вычислить степень равносильности формул $A_1 = P_1 \to \neg P_2$ и $A_2 = P_1 \vee P_2$ при $s(P_1) = \{0,2; 0,5\}$, $s(P_2) = \{0,3; 0,5; 0,9\}$.

З а д а ч а 8. Установить нечеткие тавтологии:

а) $\neg(\neg P) \approx P$;

б) $P \wedge P \approx P$;

в) $P \vee P \approx P$;

г) $P \wedge (P \vee Q) \approx P$;

д) $\neg(P \wedge Q) \approx \neg P \vee \neg Q$.

1.5. Расплывчатые модели на основе классификационной схемы вывода

Для управления сложными техническими объектами разрабатываются системы, предназначенные для принятия управленческих решений в условиях неопределенности — советующие и экспертные системы. Сложные объекты управления имеют следующие черты:

– не все цели выбора управляющих решений и условия, влияющие на этот выбор, могут быть выражены в виде количественных соотношений;

– формализованное описание объекта управления отсутствует либо является неприемлемо сложным;

– часть информации, необходимая для математического описания объекта, имеет форму представлений и пожеланий специалистов-экспертов, обладающих опытом работы с данным объектом.

По указанным причинам построение точных моделей технической системы как объекта управления, пригодных для реализации и эксплуатации на ЭВМ, затруднительно. Точная модель, учитывающая все факторы, действующие на объект управления, будет громоздкой и неприемлемой для практического использования по экономическим условиям либо из-за слишком большого времени расчета на ЭВМ.

Целесообразным является построение не модели объекта управления, а модели управления объектом. Такая модель включает описание действий лица, принимающего решения в процессе управления объектом. Например, в случае управления предприятием руководитель предприятия часто использует качественные оценки: «мало», «много», «довольно близко», «слишком медленно» и т. д. Естественным оказывается использование нечетких понятий и экспертных оценок в модели управления. Системы принятия управленческих решений с использованием нечеткой логики имеют блочный вид:

1) блок принятия решений;

2) блок оценки состояний;

3) блок выдачи управленческих решений.

Основным блоком нечеткой модели управления является блок принятия решений. Блок оценки состояний на основе поступающей информации дает формализованное описание ситуации, возникшей на объекте управления. Для оценки семантически нечетких понятий используются лингвистические переменные, которые являются специальной формой организации экспертной информации. Для принятия решений в системе управления формируется решающая таблица, т. е. таблица, устанавливающая соответствие между возможными ситуациями и некоторым набором управляющих воздействий. Реализация модели типа «ситуация—действие» осуществляется на основе использования нечетких классификационных схем вывода, в которых ситуации разбиваются на классы нечетких множеств, каждому из которых соответствует управленческое решение.

Опишем классификационную схему вывода.

Многомерное пространство признаков, влияющих на выбор управленческого решения, разбивают на расплывчатые классы (эталонные области), соответствующие этим решениям. Алгоритм принятия управленческого решения заключается в определении для данной ситуации (характеризуемой точкой в многомерном пространстве признаков) наиболее близкого эталонного класса в пространстве признаков и выработке соответствующего решения.

Расплывчатой классификационной моделью называется набор (U, P, W), в которой $U = \{X, Y, \ldots, Z\}$ — многомерное пространство признаков, определяющих ситуацию, $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ — разбиение пространства U на расплывчатые эталонные классы, $W = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ — множество управленческих решений, соответствующих эталонным классам. Построение классификационной модели разбивают на этапы.

1. Исходя из анализа цели управления выделяют множество признаков, значения которых характеризуют ситуацию.

2. С каждым из выделенных признаков связывают лингвистическую переменную. Например, при оценке деятельности организации одним из таких признаков A является «организационный состав организации и его структура», с которым связана лингвистическая переменная «степень оптимальности организационного состава» со значениями α_1 = «оптимальный», α_2 = «близкий к оптимальному», α_3 = «неоптимальный» и т. д. Ситуациям, описываемым всем комплексом лингвистических переменных, соответствуют управленческие решения: ω_1 = «сохранить организационный состав», ω_2 = «провести реорганизацию части организационного состава», ω_3 = «реорганизовать всю структуру организационного состава» и т. д.

3. Для значений лингвистической переменной $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ на базовых шкалах определяющих ситуацию признаков $\{X, Y, \ldots, Z\}$ строят функции принадлежности $\mu_{\alpha_i}(x)$, $x \in X$, $\mu_{\alpha_i}(y)$, $y \in Y$, $\ldots$ $\ldots, \mu_{\alpha_i}(z)$, $z \in Z$, где $i = 1, 2, 3, \ldots$

4. Формируют качественную структуру модели управления в виде решающей таблицы, имеющей число столбцов, равное числу признаков, и число строк, равное числу ситуаций, определяемых всевозможными наборами значений лингвистических переменных.

Первые n столбцов таблицы содержат один из возможных наборов значений лингвистической переменной, например, «организационный состав и его структура» по всем признакам. В последнем столбце записывают управленческое решение ω_l, соответствующее набору значений лингвистической переменной, находящихся в одной с ним строке. Построение решающей таблицы является прерогативой специалистов-экспертов.

Если $A, B, \ldots, C$ — набор лингвистических переменных, описывающих ситуацию принятия решения, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, $(\beta_1, \ldots \ldots, \beta_q)$, $\ldots$, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ — наборы соответствующих нечетких переменных, $X, Y, \ldots, Z$ — шкалы, в которых измеряются значения признаков, соответствующих лингвистическим переменным, то каждому набору $(\alpha_i, \beta_j, \ldots, \gamma_k)$ соответствует управленческое решение ω_l из набора управленческих решений. Все наборы нечетких переменных, которым соответствует управленческое решение ω_1, составляют эталонный класс L_1. Так же определяются классы $L_2, \ldots, L_m$.

5. Для ситуации, характеризуемой точкой $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$, строят расплывчатую классификационную модель (U, P, W). Расплывчатый эталонный класс P_l, $l = 1, \ldots, m$, характеризуется функцией принадлежности

$$\mu_{P_l}(x_0, y_0, \ldots, z_0) = \bigvee_{(\alpha_i, \beta_j, \ldots, \gamma_k) \in L_l} \mu_{\alpha_i}(x_0) \wedge \mu_{\beta_j}(y_0) \wedge \ldots \wedge \mu_{\gamma_k}(z_0).$$

Выбирают управленческое решение ω_{l^*}, для которого функция принадлежности максимальна:

$$\mu_{P_{l^*}}(x_0, y_0, \ldots, z_0) = \\ = \max\{\mu_{P_1}(x_0, y_0, \ldots, z_0), \ldots, \mu_{P_m}(x_0, y_0, \ldots, z_0)\}.$$

П р и м е р 9. Рассмотрим технологический процесс, в котором управляющее решение заключается в регулировании объема заготовок, подаваемых на технологическую линию.

Факторы, влияющие на тип управляющего решения: X — количество запасов; Y — класс качества; Z — план выпуска. Факторам X, Y, Z в результате эксперимента сопоставлены лингвистические переменные: A — «количество»; B — «класс качества»; C — «план». Лингвистической переменной A соответствуют нечеткие переменные (ее значения): α_1 — «мало», α_2 — «много». Переменной B соответствуют β_1 — «низкий», β_2 — «высокий». Переменной C соответствуют γ_1 — «нормальный», γ_2 — «большой».

Функции принадлежности, соответствующие указанным значениям лингвистических переменных, имеют вид, показанный на рис. 1–3.

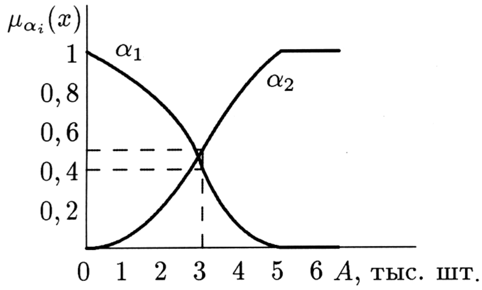

Рис. 1

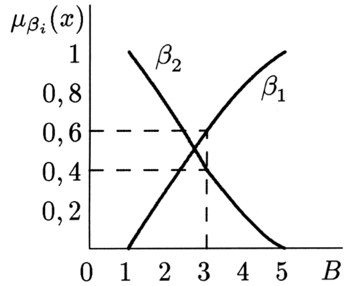

Рис. 2

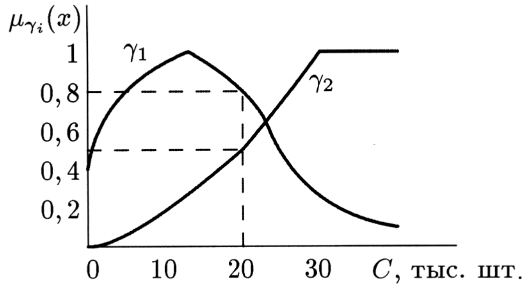

Рис. 3

В управлении технологическим процессом используются три решения: ω_1 — «прекратить технологический процесс»; ω_2 — «продолжить технологический процесс»; ω_3 — «увеличить подачу заготовок». В результате экспертного опроса получена решающая таблица.

Найти управляющее решение в ситуации, характеризуемой следующими параметрами: объем запасов (x_0) — 3 тыс. шт.; класс качества (y_0) — 3; план выпуска (z_0) — 20 тыс. шт.

Количество	Класс качества	План	Управляющее решение
α_1	β_1	γ_1	ω_1
α_1	β_1	γ_2	ω_1
α_1	β_2	γ_1	ω_2
α_1	β_2	γ_2	ω_2
α_2	β_1	γ_1	ω_1
α_2	β_1	γ_2	ω_1
α_2	β_2	γ_1	ω_2
α_2	β_2	γ_2	ω_3

Р е ш е н и е. Множества наборов значений нечетких переменных, которым в таблице соответствуют управляющие решения ω_1, ω_2, ω_3, имеют вид

$$L_1 = \{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_1, \beta_1, \gamma_2), (\alpha_2, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_1, \gamma_2)\};$$

$$L_2 = \{(\alpha_1, \beta_2, \gamma_1), (\alpha_1, \beta_2, \gamma_2), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_1)\}; \quad L_3 = \{(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)\}.$$

Следовательно, для ситуации, характеризуемой точкой (x_0, y_0, z_0), функции принадлежности этой точки расплывчатым (эталонным) классам P_1, P_2, P_3, соответствующим управляющим решениям $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, вычисляются по формулам

$$\mu_{P_1}(x_0, y_0, z_0) =$$
$$= (\mu_{\alpha_1}(x_0) \wedge \mu_{\beta_1}(y_0) \wedge \mu_{\gamma_1}(z_0)) \vee (\mu_{\alpha_1}(x_0) \wedge \mu_{\beta_1}(y_0) \wedge \mu_{\gamma_2}(z_0)) \vee$$
$$\vee (\mu_{\alpha_2}(x_0) \wedge \mu_{\beta_1}(y_0) \wedge \mu_{\gamma_1}(z_0)) \vee (\mu_{\alpha_2}(x_0) \wedge \mu_{\beta_1}(y_0) \wedge \mu_{\gamma_2}(z_0));$$
$$\mu_{P_2}(x_0, y_0, z_0) = (\mu_{\alpha_1}(x_0) \wedge \mu_{\beta_2}(y_0) \wedge \mu_{\gamma_1}(z_0)) \vee$$
$$\vee (\mu_{\alpha_1}(x_0) \wedge \mu_{\beta_2}(y_0) \wedge \mu_{\gamma_2}(z_0)) \vee (\mu_{\alpha_2}(x_0) \wedge \mu_{\beta_2}(y_0) \wedge \mu_{\gamma_1}(z_0));$$
$$\mu_{P_3}(x_0, y_0, z_0) = \mu_{\alpha_2}(x_0) \wedge \mu_{\beta_2}(y_0) \wedge \mu_{\gamma_2}(z_0).$$

Рассмотрение графиков функций принадлежности дает для точки $(x_0, y_0, z_0) = (3000; 3; 20000)$:

$$\mu_{\alpha_1}(3000) = 0,4, \qquad \mu_{\alpha_2}(3000) = 0,5;$$
$$\mu_{\beta_1}(3) = 0,6, \qquad \mu_{\beta_2}(3) = 0,4;$$
$$\mu_{\gamma_1}(20000) = 0,8, \qquad \mu_{\gamma_2}(20000) = 0,5.$$

Таким образом,

$$\mu_{P_1}(3000; 3; 20000) = \max\{\min\{0,4; 0,6; 0,8\}, \min\{0,4; 0,6; 0,5\},$$
$$\min\{0,5; 0,6; 0,8\}, \min\{0,5; 0,6; 0,5\}\} =$$
$$= \max\{0,4; 0,4; 0,5\} = 0,5;$$
$$\mu_{P_2}(3000; 3; 20000) = \max\{\min\{0,4; 0,4; 0,8\}, \min\{0,4; 0,4; 0,5\},$$
$$\min\{0,5; 0,4; 0,8\}\} = 0,4;$$
$$\mu_{P_3}(3000; 3; 20000) = \min\{0,5; 0,4; 0,5\} = 0,4.$$

Точка $(3000; 3; 20000)$ обладает наибольшей принадлежностью классу P_1, которому соответствует ω_1.

Рекомендуется управляющее решение «прекратить технологический процесс».

2. ФОРМАЛЬНЫЕ ЯЗЫКИ

Предметом математической логики являются прежде всего математические теории. При этом слово «теория» понимается в некотором специальном смысле. Под теорией в математической логике понимают формализованный язык L вместе с некоторым множеством предложений (формул) этого языка. Чтобы грамматический анализ языка был однозначен, правила его образования должны носить четкий характер.

Элементами языка являются символы (буквы) и различные наборы символов, которые называют выражениями. Правильно составленные выражения, которым в данном языке придается определенный смысл, называют отмеченными выражениями. Символы языка — буквы — образуют множество минимальных выражений (под минимальными понимаются выражения, не разложимые на составляющие) — алфавит в широком смысле, так как в него включены скобки, знаки препинания, пробелы и т. д.

Пусть некоторое множество S является множеством символов языка L. Каждое выражение языка есть конечная последовательность символов, $e = s_1, s_2, \dots, s_n$. Выражение e можно представить как функцию, определенную на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$

со значениями в S, $e(1) = s_1, e(2) = s_2, \ldots, e(n) = s_n$. Выполняется свойство единственности разложения выражения, т. е. если $e = s_1, s_2, \ldots, s_n$ и $e = t_1, t_2, \ldots, t_m$, то $n = m$ и $s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n$.

Грамматический анализ основан на распознавании сложного выражения как результата сопряжения более простых выражений. На множестве всех выражений E введем бинарную операцию (умножение), определив произведение выражений $e = s_1, s_2, \ldots, s_n$ и $f = t_1, t_2, \ldots, t_m$ как $e \times f = s_1, s_2, \ldots, s_n, t_1, t_2, \ldots, t_m$. Введенная операция подчиняется ассоциативному закону $(ef)g = e(fg)$. Кроме того, если ввести выражение нулевой длины e_0, то $e_0 \times e = e \times e_0 = e$, e_0 играет роль единицы, и множество E с введенной операцией образует полугруппу с единицей.

2.1. Классификация отмеченных выражений

Классификация выражений абстрактного языка начинается с символов языка. В общем случае абстрактный язык включает девять категорий символов — четыре счетных класса: класс переменных; класс констант; класс функциональных символов; класс символов отношений — и пять категорий, включающих по одному символу — логические связки: символ отрицания; символ дизъюнкции; символ конъюнкции; символ квантора общности; символ квантора существования.

Каждому функциональному символу и каждому символу отношения ставится в соответствие натуральное число — ранг данного символа.

2.2. Языки первого порядка

Односортный язык первого порядка является набором из четырех множеств [6, 7]:

$$L = \langle V, Const, Fn, Pr \rangle,$$

который называется сигнатурой языка.

V — непустое множество, элементы которого называются переменными.

$Const$ — множество констант (может быть пустое).

Fn — множество, элементы которого называются функциональными символами (буквами) языка L (может быть пустое). С каждой функциональной буквой f однозначно связан некоторый объект — вид данной функциональной буквы. В случае односортного языка для задания вида функционального символа достаточно указать количество его аргументов.

Pr — непустое множество, элементы которого называются предикатными символами (буквами) языка L. С каждой предикатной буквой P связано число k, которое называется количеством аргументных мест символа P.

Нульместные предикатные символы называются пропозициональными переменными. Отмеченными выражениями языка первого порядка являются термы и формулы. Термы — это имена предметов, формулы — высказывания о предметах. В формальных языках выражения строятся по определенным правилам. Термы в односортном языке строятся индуктивно с помощью следующих правил [6 – 8].

1. Все переменные являются термами.

2. Все константные символы являются термами.

3. Если f — n-местный функциональный символ и $t_1, t_2, \ldots$ $\ldots, t_n$ —термы, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — терм.

При построении формул кроме перечисленных используются символы, которые называют логическими символами языка. Эти символы делятся на связки и кванторы. В формальном языке применяют логические связки $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$. Используют квантор всеобщности $\forall$ (читается «для всех») и квантор существования $\exists$ (читается «существует»).

О п р е д е л е н и е 9. Выражение вида $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, где P — n-местный предикатный символ, а $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы, называется атомарной формулой. Формулами являются выражения, построенные по следующим правилам [6, 7].

1. Все атомарные формулы являются формулами.

2. Если A — формула, то $\neg A$ — формула.

3. Если A и B — формулы, то $A \vee B$ — формула.

4. Если A и B — формулы, то $A \wedge B$ — формула.

5. Если A и B — формулы, то $A \to B$ — формула.

6. Если A — формула и x — произвольная переменная языка, то $\forall x A$ — формула.

7. Если A — формула и x — произвольная переменная языка, то $\exists x A$ — формула.

Терм, не содержащий переменных, называется замкнутым.

Определение 10. Вхождение переменной x в формулу называется связанным, если существует формула B, являющаяся частью исходной формулы и содержащая x, такая, что B имеет вид $\exists x A$ или $\forall x A$.

Формула, не содержащая свободных вхождений переменных, называется замкнутой формулой или высказыванием.

Пример 10. Выделить связанные и свободные переменные в формуле $\exists x(P(y) \vee F(x) \vee \forall x Q(x, z) \to \exists x R(x, y)) \wedge Q(z, y)$.

Решение. Запись $\underbrace{\forall(\exists) \quad x}$ означает «квантор действует на переменную x», знак ` отмечает свободную переменную:

$$\underbrace{\exists x(P(y) \vee F(x)} \vee \overbrace{\forall x Q(x}, \grave{z}) \to \underbrace{\exists x R(x}, \grave{y})) \wedge Q(\grave{z}, \grave{y}).$$

Определение 11. Функциональной сложностью терма t называют значение функции $\widetilde{l}$, заданной на множестве термов в соответствии со следующими правилами.

1. Если x переменная, то $\widetilde{l}(x) = 0$.

2. Если x константа, то $\widetilde{l}(x) = 0$.

3. Если терм имеет вид $f(t_1, \ldots, t_n)$, где $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $\widetilde{l}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \widetilde{l}(t_1) + \ldots + \widetilde{l}(t_n) + 1$.

Пример 11. Для терма $f(x, g(x, y), h(z))$ найти функциональную сложность.

Решение. Получаем

$$\widetilde{l}(f(x, g(x, y), h(z))) = \widetilde{l}(x) + \widetilde{l}(g(x, y)) + \widetilde{l}(h(z)) + 1 =$$
$$= 0 + \widetilde{l}(x) + \widetilde{l}(y) + 1 + \widetilde{l}(z) + 1 + 1 = 3.$$

О п р е д е л е н и е 12. Логической сложностью формулы A называют значение функции l, определенной на множестве формул в соответствии со следующими правилами.

1. Если A — атомарная формула, то $l(A) = 0$.
2. $l(\neg A) = l(A) + 1$.
3. $l(A \wedge B) = l(A) + l(B) + 1$.
4. $l(A \vee B) = l(A) + l(B) + 1$.
5. $l(A \to B) = l(A) + l(B) + 1$.
6. $l(\exists x A) = l(A) + 1$.
7. $l(\forall x A) = l(A) + 1$.

П р и м е р 12. Вычислить логическую сложность формулы

$$P \to ((Q \vee R) \to (R \to \neg P)),$$

где P, Q, R — атомарные формулы.

Р е ш е н и е. Получаем

$$\begin{aligned}
&l(P \to ((Q \vee R) \to (R \to \neg P))) = \\
&= l(P) + l((Q \vee R) \to (R \to \neg P)) + 1 = \\
&= l(Q \vee R) + l(R \to \neg P) + 1 + 1 = \\
&= l(Q) + l(R) + 1 + l(R) + l(\neg P) + 1 + 1 + 1 = \\
&= 1 + l(P) + 1 + 1 + 1 + 1 = 5.
\end{aligned}$$

З а д а ч а 9. Выписать все подформулы формул:

а) $Q(f(x), g(x, y)) \to P(x, y)$;

б) $\neg(P \wedge (Q \vee R)) \to ((P \wedge Q) \vee R)$;

в) $\forall x(P(f(x)) \wedge \exists x Q(x, y) \to \exists y R(x, y)) \vee Q(z, y)$;

г) $(R \to P) \to (\neg(Q \vee R) \to P)$;

д) $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$.

З а д а ч а 10. Выделить связанные и свободные вхождения переменных в формулах:

а) $\forall x(A(x) \to \neg B(x)) \to \neg(\exists x A(x) \wedge \forall x B(x))$;

б) $\exists x \forall y((F(y, z) \to F(x, z)) \to (F(x, x) \to F(y, x)))$;

в) $(\exists x(A(x) \vee (B \to C(y)) \to \forall x(A(x) \to Q(x, z))) \vee P(x)$.

З а д а ч а 11. Доказать, что функциональная сложность терма равна числу вхождений в него функциональных символов.

З а д а ч а 12. Вычислить логическую сложность формул:
а) $(\neg(P \wedge (Q \vee R))) \to ((P \wedge Q) \vee R)$;
б) $((P \to Q) \to (R \to \neg P)) \to (\neg Q \to \neg R)$;
в) $\neg\exists Q(x, x) \wedge R(f(y, x))$;
г) $(P \to (P \vee Q)) \to (P \to (P \to (P \vee Q)))$;
д) $\forall z(P(z) \wedge \exists z Q(x, z) \to \exists y R(z, y)) \vee Q(z, x)$.

3. СЕМАНТИКА ФОРМАЛЬНОГО ЯЗЫКА ПЕРВОГО ПОРЯДКА И ЕГО ИНТЕРПРЕТАЦИЯ. ОЦЕНКА ТЕРМОВ И ФОРМУЛ

Для придания смысла формулам формального языка определяется множество, элементы которого сопоставляются переменным языка. Пусть L — односортный язык первого порядка, $L = \langle V, Const, Fn, Pr\rangle$. Множество, элементы которого сопоставляются переменным языка L, вводится следующим определением.

О п р е д е л е н и е 13. Носителем языка L (или объектной областью языка L) называется множество D, элементы которого являются значениями переменных из множества V. Формула языка, в которой вместо параметров подставлены элементы носителя, называется оцененной и задает конкретное высказывание, истинное или ложное при данных значениях (оценках) параметров.

При оценке формулы (терма) каждую переменную x_i этой формулы заменяют на элемент носителя d_i. Так как при подстановке каждую переменную заменяют на конкретный элемент носителя, то оценка является константной подстановкой. Если T — выражение языка L, то оценку обозначают символом $|\ |$, а оцененное выражение — $|T|$. Каждый замкнутый терм в языке L с носителем D определяет некоторый элемент этого носителя, а каждое высказывание языка является ложным или истинным утверждением об элементах носителя.

Пусть t — замкнутый терм языка L. Значение $|t|_M$ терма, оцененного в модели M, определяется индукцией по построению термов [6, 7].

1. Если c — константа из множества $Const$, то $|c|_M = \check{c}$, где $\check{c}$ — элемент носителя D, соответствующий константному символу c языка L.

2. Если t — переменная языка L, которой в интерпретации соответствует элемент d носителя D, то $|t|_M = d$.

3. Если терм имеет вид $f(t_1, \ldots, t_n)$, то оценка терма определяется как $|f(t_1, \ldots, t_n)|_M = f(|t_1|_M, \ldots, |t_n|_M)$.

4. Если t — терм языка L, содержащий параметры, то для всякой оценки θ оцененный терм обозначается $t\theta$, оценка которого $|t\theta|_M$, т. е. терм с параметрами является функцией своей оценки.

Оценку формул определяют рекурсией по длине формул [6].

П р и м е р 13. Пусть задан терм

$$t = (x + y) \cdot z + x \cdot y,$$

где функциональным символам $x + y$, $x \cdot y$ приписаны функции (операции) сложения и умножения в множестве натуральных чисел $N = \{1, 2, \ldots\}$. Тогда терм t, оцененный посредством подстановки

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix},$$

задает оцененный терм $(2 + 4) \cdot 7 + 2 \cdot 4$, который имеет в N значение 64.

Оцененные формулы языка L разделяются на истинные и ложные. Запись $M \models A$ означает, что оцененная формула A истинна в модели M. Истинность оцененных в модели формул определяется индукцией по построению формул:

$M \models P(t_1, \ldots, t_n)$ тогда и только тогда, когда $P(|t_1|_M, \ldots$ $\ldots, |t_n|_M) = 1$;

$M \models \neg A$ тогда и только тогда, когда неверно, что $M \models A$;

$M \models A \vee B$ тогда и только тогда, когда $M \models A$ или $M \models B$;

$M \models A \wedge B$ тогда и только тогда, когда $M \models A$ и $M \models B$;

$M \models A \to B$ тогда и только тогда, когда если $M \models A$, то $M \models B$;

$M \models \forall x A$ тогда и только тогда, когда $\forall d \in D$, $M \models A({}^x{}_d)$, где $A({}^x{}_d)$ означает замену переменной x в формуле A на элемент носителя d;

$M \models \exists x A$ тогда и только тогда, когда $\exists x A$, $M \models A({}^{x}{}_{d})$.

Истинность или ложность формулы, зависящей от параметров, зависит от оценки параметров.

Пример 14. Пусть $M = \langle N, S^3 \rangle$, где N — натуральные числа, S^3 — предикатные символы от трех переменных, причем

$$S^3(x, y, z) = \text{ «истинно» } \leftrightarrow x + y = z.$$

Найти формулу с одной свободной переменной y, истинную в M тогда и только тогда, когда y четно.

Решение. Наличие трех переменных не означает, что все переменные различны, т. е. среди переменных в S^3 могут оказаться одинаковые.

Четность натурального числа y означает, что найдется такое натуральное число x, для которого y является результатом сложения этого числа с самим собой, т. е. $y = x + x$. Таким образом, имеем

$$\text{«}y\text{ — четное число»} = \exists x S(x, x, y).$$

Пример 15. Доказать, что формула $\neg \exists x A(x) \to \neg \forall x A(x)$ является тавтологией.

Решение. Необходимо доказать, что при любой оценке в модели M: $M \models \neg \exists x A(x) \to \neg \forall x A(x)$.

А. Переменная x не входит свободно в рассматриваемую формулу, поэтому область определения оценки θ не включает переменную x, хотя она может входить свободно в формулу A.

Б. В связи с этим необходимо доказать, что

$$M \models \neg \exists x (A\theta) \to \neg \forall x (A\theta),$$

где $A\theta$ — оцененная в модели M формула A.

В. Допустим, что $M \models \neg \exists x (A\theta)$. Отсюда следует, что неверно $M \models \neg \exists x (A\theta)$; таким образом, для любого элемента d носителя модели M неверно $M \models (A\theta)({}^{x}{}_{d})$ и следовательно, каково бы ни было $d \in D$, $M \models \neg (A\theta)({}^{x}{}_{d})$ — что в соответствии с истинностью дает $M \models \neg \forall x \neg (A\theta)$ и, следовательно, $M \models \neg \forall x A(x)$.

З а д а ч а 13. Доказать тождественную истинность формул:

а) $\forall x A(x) \to \exists x A(x)$;

б) $\exists x \forall y A(x,y) \to \forall y \exists x A(x,y)$.

З а д а ч а 14. Доказать, что если A не содержит свободно x, то:

а) $A \wedge \forall x B(x) \sim \forall x (A \wedge B(x))$;

б) $A \wedge \forall x B(x) \sim \forall x (A \vee B(x))$;

в) $A \wedge \exists x B(x) \sim \exists x (A \wedge B(x))$;

г) $A \wedge \exists x B(x) \sim \exists x (A \vee B(x))$;

д) $\forall x B(x) \to A \sim \forall x (B(x) \to A)$.

Знак $\sim$ означает эквивалентность формул.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бояринцева Т.Е.* Методические указания к выполнению типового расчета по теории множеств. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 28 с.

2. *Белоусов А.И., Ткачев С.Б.* Дискретная математика: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 744 с.

3. *Исмагилов Р.С., Калинкин А.В., Станцо В.В.* Комбинаторика и булевы функции. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 40 с.

4. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений: Пер. с англ. М.: Мир, 1976. 165 с.

5. Нечеткие множества в моделях управления и исследования интеллекта. М.: Наука, 1986. 312 с.

6. *Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г.* Введение в математическую логику: Учеб. пособие для вузов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. 120 с.

7. *Лавров И.А., Максимова Л.Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физматлит, 1995. 256 с.

8. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику: Пер. с англ. М.: Наука, 1971. 320 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Нечеткие множества и нечеткие высказывания 3
1.1. Понятие принадлежности 3
1.2. Нечеткие множества и операции над ними 6
1.3. Нечеткие отношения 8
1.4. Нечеткие и лингвистические переменные. Расплывчатые высказывания 10
1.5. Расплывчатые модели на основе классификационной схемы вывода 14
2. Формальные языки 20
2.1. Классификация отмеченных выражений 21
2.2. Языки первого порядка 21
3. Семантика формального языка первого порядка и его интерпретация. Оценка термов и формул 25
Список литературы 29

Учебное издание

Титов Андрей Валентинович

Калинкин Александр Вячеславович

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА.
НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА И ФОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ**

Редактор *С.А. Серебрякова*

Корректор *Р.В. Царева*

Компьютерная верстка *В.И. Товстоног*

Подписано в печать 10.01.2008. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 1,75. Тираж 300 экз. Изд. № 65.
Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5