А. В. К а л и н к и н (Москва, МИРАН)**. Третье уравнение для ветвящегося процесса со схемой взаимодействий $2T_1 \to \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2$, $\gamma_1 = 0, 1$.**

На множестве состояний $N^2 = \{(\alpha_1, \alpha_2),\ \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \ldots\}$ рассматривается однородный марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$ с непрерывным временем t, $t \in [0, \infty)$. Обозначим $P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2)\}$ переходные вероятности. В случае разложимого ветвящегося процесса со схемой взаимодействий частиц $2T_1 \to \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2$ (частицы типа T_2 называются *финальными* [1]), производящая функция $F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty} P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2}$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in N^2$, переходных вероятностей ($|s_1| \leqslant 1$, $|s_2| \leqslant 1$) удовлетворяет второму уравнению Колмогорова [2] ($\lambda > 0$)

$$\frac{\partial F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2)}{\partial t} = \lambda(h(s_1, s_2) - s_1^2) \frac{\partial^2 F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2)}{\partial s_1^2} \tag{1}$$

с начальным условием $F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(0; s_1, s_2) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$. Здесь $h(s_1, s_2) = \sum_{\gamma_1,\gamma_2=0}^{\infty} p_{\gamma_1\gamma_2} s_1^{\gamma_1} s_2^{\gamma_2}$ — вероятностная производящая функция, $h(1, 1) = 1$ [1].

Рассмотрим процесс со схемой взаимодействий $2T_1 \to \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2$, $\gamma_1 = 0, 1$.

Теорема 1. *Пусть $h(s_1, s_2) = h_0(s_2) + s_1 h_1(s_2)$. Для двухмерного марковского процесса гибели $\xi(t)$ производящая функция переходных вероятностей имеет вид*

$$\begin{aligned} F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \frac{e^{\lambda t/4}}{2\sqrt{2\pi\lambda t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/(\lambda t)} \biggl[\int_{\cos 2v}^{1} \frac{1}{\sqrt{y - \cos 2v}} \\ \times \left(\frac{1}{2\pi i} \int_T \varphi^{\alpha_1}(x, y; s_1, s_2) s_2^{\alpha_2}\, dx\right) dy\biggr]_v' dv, \qquad (\alpha_1, \alpha_2) \in N^2, \end{aligned} \tag{2}$$

где $T = \{x = iu,\ \pi/2 \leqslant u \leqslant 5\pi/2\}$ — ориентированный по возрастанию u отрезок на комплексной плоскости, линейная по переменной s_1 функция $\varphi(x, y; s_1, s_2)$ задана формулой

$$\varphi(x, y; s_1, s_2) = \frac{\frac{1}{2}(\psi_2(s_2)\sqrt{1 - y^2} e^x - h_1(s_2)(1 - y) - \psi_1(s_2)\sqrt{1 - y^2} e^{-x}) + s_1}{\frac{1}{2}(\sqrt{1 - y^2} e^x + 2y - \sqrt{1 - y^2} e^{-x})};$$

функции $\psi_{1,2}(s_2) = h_1(s_2)/2 \pm \sqrt{h_1^2(s_2)/4 + h_0(s_2)}$ определены квадратным уравнением $h_0(s_2) + s_1 h_1(s_2) - s_1^2 = 0$.

Производящая функция $\varphi(x, y; s_1, s_2)$ удовлетворяет нелинейному уравнению первого порядка [3]

$$(h_0(s_2) + s_1 h_1(s_2) - s_1^2) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}\right)^2 - (h_0(s_2) + \varphi h_1(s_2) - \varphi^2) = \sqrt{h_1^2(s_2) + 4h_0(s_2)}\, \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Замкнутое решение (2) линейного уравнения в частных производных (1) найдено методом [4, гл. 4], где рассмотрен случай $h_0(s_2) \equiv p_0$, $h_1(s_2) \equiv p_1$.

Рассмотрим процесс $\xi(t)$ со схемой взаимодействий $2T_1 \to 3T_1 + \gamma_2 T_2$.

Теорема 2. *Пусть $h(s_1, s_2) = s_1^3 h_3(s_2)$. Для двухмерного марковского процесса рождения $\xi(t)$ производящая функция переходных вероятностей имеет вид ($F_{(0,\alpha_2)}(t; s_1, s_2) \equiv s_2^{\alpha_2}$)*

$$\begin{aligned} F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \frac{e^{\lambda t/4}}{2\sqrt{2\pi\lambda t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/(\lambda t)} \biggl[\int_{\cos 2v}^{1} \frac{1}{\sqrt{y - \cos 2v}} \\ \times \left(\frac{1}{2\pi i} \int_T s_1 \varphi^{\alpha_1 - 1}(x, y; s_1, s_2) s_2^{\alpha_2}\, dx\right) dy\biggr]_v' dv, \qquad (\alpha_1, \alpha_2) \in N^2, \end{aligned}$$

$\alpha_1 = 1, 2, \ldots,$ где T — тот же, что и в теореме 1, отрезок, дробно-линейная по переменной s_1 функция $\varphi(x, y; s_1, s_2)$ задана формулой

$$\varphi(x, y; s_1, s_2) = \frac{s_1 \, \frac{1}{2}(\sqrt{1-y^2}e^x + 2y - \sqrt{1-y^2}e^{-x})}{1 - s_1 h_3(s_2) \, \frac{1}{2}(-\sqrt{1-y^2}e^x + 1 - y)}.$$

Производящая функция $\varphi(x, y; s_1, s_2)$ удовлетворяет уравнению первого порядка

$$(s_1^3 h_3(s_2) - s_1^2)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s_1}\right)^2 - (\varphi^3 h_3(s_2) - \varphi^2) = h_3(s_2)\varphi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Мы не приводим аналогичные решения уравнения (1) для схемы взаимодействий $2T_1 \to \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2$, $\gamma_1 = 0, 1, 2$ $(h(s_1, s_2) = h_0(s_2) + s_1 h_1(s_2) + s_1^2 h_2(s_2))$ и схемы $2T_1 \to \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2$, $\gamma_1 = 2, 3$ $(h(s_1, s_2) = s_1^2 h_2(s_2) + s_1^3 h_3(s_2))$ из-за их громоздкого вида.

В [4] описаны специальные классы марковских процессов, для которых возможен вывод нелинейного уравнения Колмогорова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
2. *Севастьянов Б. А., Калинкин А. В.* Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц. — Докл. АН СССР, 1982, т. 264, в. 2, с. 306–308.
3. *Калинкин А. В.* Третье уравнение Колмогорова для ветвящегося процесса с взаимодействием частиц. — Докл. РАН, 2000, т. 371, в. 2, с. 159–162.
4. *Калинкин А. В.* Марковские процессы с взаимодействием. — Успехи матем. наук, 2001, т. 56 (в печати).