

А.В. Калинкин

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ МАРКОВСКИХ СИСТЕМ С ВЗАЙМОДЕЙСТВИЕМ

Методические указания
к выполнению типового расчета



Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

А.В. Калинкин

Статистическое моделирование дискретных марковских систем с взаимодействием

*Методические указания
к выполнению типового расчета*



Москва

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н. Э. Баумана

2017

УДК 519.21+531.19

ББК 22.171

K17

Издание доступно в электронном виде на портале ebooks.bmstu.ru
по адресу: <http://ebooks.bmstu.ru/catalog/109/book1630.html>

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Высшая математика»

*Рекомендовано Редакционно-издательским советом
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебно-методического пособия*

Калинкин, А. В.

K17 Статистическое моделирование дискретных марковских систем с взаимодействием: методические указания к выполнению типового расчета / А. В. Калинкин. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. — 41, [3] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-4655-1

Представлены необходимые теоретические сведения и методические указания по применению метода статистических испытаний при моделировании стохастических систем с взаимодействием при дискретном фазовом пространстве. Приведены соответствующие примеры, даны варианты типового расчета.

Для студентов факультетов «Фундаментальные науки» и «Робототехника и комплексная автоматизация».

УДК 519.21+531.19
ББК 22.171

ISBN 978-5-7038-4655-1

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017
© Оформление. Издательство
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

Предисловие

Данное пособие включает раздел курса «Марковские модели систем с взаимодействием», посвященный приближенным численным расчетам, и соответствует программе подготовки магистров по специальности «Прикладная математика» факультета «Фундаментальные науки».

Цель методических указаний — способствовать достижению студентами и аспирантами ряда компетенций, необходимых для исследования и последующего статистического моделирования на ЭВМ сложных физических и технических систем с дискретными состояниями.

Критериями достижения указанных целей являются усвоение обучающимися определяемых в данном курсе базовых понятий теории марковских процессов со счетным множеством состояний и решение предлагаемых в пособии задач типового расчета как аналитическими методами, так и с применением вычислительных компьютерных технологий. Используются программные пакеты Matlab, Maple, Mathematica с визуализацией данных.

1. Кинетические схемы и дискретные марковские модели

В различных областях естествознания и техники дискретные системы с взаимодействием составляющих их элементов задаются кинетическими схемами. В первом семестровом курсе «Дополнительные главы теории случайных процессов» [1] изложены основы аналитического метода для марковских процессов с дискретными состояниями. Рассматриваются одномерные и многомерные процессы рождения и гибели линейного типа, соответствующие схемам превращений [2–4]:

$T_1 \rightarrow T_2$ (ординарная);

$T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots \rightarrow T_n$ (последовательная);

$T_1 \rightarrow T_2, T_3$ (параллельная);

$T_1 \rightarrow T_2; T_2 \rightarrow T_3, T_4$ (последовательно-параллельная);

$T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots \rightarrow T_n \rightarrow T_1$ (простая циклическая);

$T \rightarrow 2T$ (автокатализ);

$T \rightarrow kT, k = 0, 1, 2, \dots$ (цепная с ветвлением);

$0 \rightarrow T; T \rightarrow 0$ (система массового обслуживания $M/M/\infty$) и другие.

Во втором семестровом курсе «Марковские модели систем с взаимодействием» [5] рассматриваются процессы рождения и гибели квадратичного типа, соответствующие схемам с парными взаимодействиями:

$2T \rightarrow T$ (бинарная);

$T_1 + T_2 \rightarrow T_3$ (бинарная);

$T_1 + T_2 \rightarrow T_4; T_1 + T_3 \rightarrow T_5$ (параллельная);

$T_1 + T_2 \rightarrow T_3; T_3 \rightarrow T_1 + T_2$ (двусторонняя);

$T_1 + T_2 \rightarrow T_2 + T_3$ (катализ) и другие.

В общем случае система с взаимодействиями и превращениями составляющих их элементов типов T_1, \dots, T_n задается кинетической схемой [1, 4, 6]:

$$\begin{cases} \epsilon_1^1 T_1 + \epsilon_2^1 T_2 + \dots + \epsilon_n^1 T_n \rightarrow \gamma_1^1 T_1 + \gamma_2^1 T_2 + \dots + \gamma_n^1 T_n; \\ \epsilon_1' T_1 + \epsilon_2' T_2 + \dots + \epsilon_n' T_n \rightarrow \gamma_1' T_1 + \gamma_2' T_2 + \dots + \gamma_n' T_n; \\ \epsilon_1'' T_1 + \epsilon_2'' T_2 + \dots + \epsilon_n'' T_n \rightarrow \gamma_1'' T_1 + \gamma_2'' T_2 + \dots + \gamma_n'' T_n, \end{cases} \quad (1.1)$$

где ε_j^i , γ_j^i — целые неотрицательные числа, $i=1, \dots, l$, $j=1, \dots, n$.

Схема (1.1) может учитывать поступление элементов извне (открытая система) и образование конечных элементов (финального продукта).

1.1. Детерминированный и стохастический подходы при моделировании схем взаимодействий

Детерминированный подход к моделированию кинетической схемы (1.1) состоит в следующем. Вводят количество $x_i(t)$ элементов типа T_i в момент времени $t \in [0, \infty)$, где $i = 1, \dots, n$. Функции $x_1(t), \dots, x_n(t)$ удовлетворяют системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, или кинетических уравнений [4]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n); \\ \vdots \\ \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n); \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.2)$$

с начальными условиями $x_1(0) = x_1^0, \dots, x_n(0) = x_n^0$. Вид функций f_1, \dots, f_n определяется схемой (1.1) по законам формальной кинетики [4]:

для ординарной схемы превращений $T_1 \rightarrow T_2$ полагают

$$\dot{x}_1 = -\lambda x_1; \quad \dot{x}_2 = \lambda x_1;$$

для бинарной схемы взаимодействий $T_1 + T_2 \rightarrow T_3$ полагают

$$\dot{x}_1 = -\lambda x_1 x_2; \quad \dot{x}_2 = -\lambda x_1 x_2; \quad \dot{x}_3 = \lambda x_1 x_2$$

(так называемый «закон действующих масс»), где $\lambda > 0$ — константа. В прикладных задачах функции f_1, \dots, f_n являются многочленами степени не выше третьей.

Стохастический подход основан на вероятностной модели [1, 7] для схемы взаимодействий (1.1) в виде однородного во време-

мени многомерного марковского процесса $(\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$, где $t \in [0, \infty)$, на дискретном фазовом пространстве

$$N^n = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_i = 0, 1, 2, \dots, i = 1, \dots, n\}.$$

Состояние $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ соответствует наличию α_1 элементов типа T_1 , α_2 элементов типа T_2 , ..., α_n элементов типа T_n ; строке $\varepsilon_1^i T_1 + \dots + \varepsilon_n^i T_n \rightarrow \gamma_1^i T_1 + \dots + \gamma_n^i T_n$ соответствует скачок случайного процесса из состояния $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ в состояние $(\alpha_1 - \varepsilon_1^i + \gamma_1^i, \dots, \alpha_n - \varepsilon_n^i + \gamma_n^i)$. В состоянии $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ процесс находится случайное время τ_α с показательным распределением, зависящим от параметров таким образом, что стохастическая и детерминированная (1.2) модели связаны «термодинамическим предельным переходом» [8, 9].

Далее для $\alpha, \beta, \gamma \in N^n$ приняты следующие обозначения: $\gamma = \alpha - \beta$, если $\gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1, \dots, \gamma_n = \alpha_n - \beta_n$; $\alpha \geq \beta$, если $\alpha_1 \geq \beta_1, \dots, \alpha_n \geq \beta_n$ и т. д.

1.2. Марковские процессы с дискретными состояниями. Уравнения Колмогорова

Для однородного во времени марковского процесса

$$\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)), t \in [0, \infty),$$

на множестве состояний N^n обозначим переходные вероятности:

$$P_{\alpha\beta}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = \beta | \xi(0) = \alpha\}, \alpha, \beta \in N^n.$$

Такой случайный процесс задается плотностями переходных вероятностей:

$$a_{\alpha\beta} = \left. \frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt} \right|_{t=0+}, \alpha, \beta \in N^n.$$

Далее всегда считаем, что выполнены условия, при которых переходные вероятности удовлетворяют первой (обратной) и второй (прямой) системам дифференциальных уравнений Колмогорова [10, 11]:

$$\frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \sum_{\gamma \in N^n} a_{\alpha\gamma} P_{\gamma\beta}(t), \alpha \in N^n;$$

$$\frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \sum_{\gamma \in N^n} P_{\alpha\gamma}(t) a_{\gamma\beta}, \beta \in N^n$$

с начальными условиями $P_{\alpha\alpha}(0) = 1, P_{\alpha\beta}(0) = 0$ при $\alpha \neq \beta$.

Состояние α называют поглощающим, если $a_{\alpha\alpha} = 0$.

Марковский процесс называется процессом рождения и гибели, если из состояния $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ процесс может совершить скачок только в состояние $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ такое, что $|\alpha_i - \gamma_i| \leq 1$ для всех $i = 1, \dots, n$ [6, 10]. Если «вложенная цепь Маркова» [10] для процесса является случайным блужданием на N^n , то определяют типы процессов рождения и гибели: линейный, квадратичный, кубический и так далее в зависимости от вида функции $a_{\alpha\alpha} = \phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Из множества марковских процессов на фазовом пространстве N^n выделяют специальный класс процессов B_2 , указывая конкретный вид плотностей переходных вероятностей $\{a_{\alpha\beta}, \alpha, \beta \in N^n\}$ [1].

1.3. Марковская модель кинетической схемы. Первое и второе уравнения в производящих функциях

Из схемы взаимодействий (1.1) имеем векторы $\varepsilon^i = (\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_n^i) \in N^n$, $i = 1, \dots, l$. Каждому вектору ε^i сопоставим распределение вероятностей на N^n , $\{p_\gamma^i \geq 0, \sum_{\gamma \in N^n} p_\gamma^i = 1, p_{\varepsilon^i}^i = 0\}$, и набор чисел $\{\Phi_\alpha^i \geq 0, \alpha \in N^n; \Phi_\alpha^i = 0$, если при некотором k $\alpha_k < \varepsilon_k^i\}$ по формуле

$$\Phi_\alpha^i = \lambda_i \prod_{j=1}^n \alpha_j (\alpha_j - 1) \dots (\alpha_j - \varepsilon_j^i + 1), \quad \alpha \in N^n, \quad (1.3)$$

где $\lambda_i > 0$ — коэффициенты пропорциональности, $i = 1, \dots, l$. Для марковского процесса $\xi(t)$ класса B_2 по определению полагаем [1]:

$$a_{\alpha\alpha} = -\sum_{i=1}^l \Phi_\alpha^i, \quad a_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^l \Phi_\alpha^i p_{\beta-\alpha+\varepsilon^i}^i, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta \in N^n.$$

Процесс $\xi(t)$ интерпретируется как стохастическая модель системы взаимодействующих частиц n типов T_1, \dots, T_n . Событие $\{\xi(t) = \alpha\}$ есть такое состояние системы, в котором в момент времени t имеется совокупность S_α частиц, состоящая из α_1 частиц типа T_1 , ..., и α_n частиц типа T_n : $S_\alpha = \alpha_1 T_1 + \dots + \alpha_n T_n$. Зададим l комплексов взаимодействия частиц S_ε^i , соответствующих векторам ε^i . Через случайное время τ_α^i , $P\{\tau_\alpha^i \leq t\} = 1 - \exp(-\Phi_\alpha^i t)$, происходит взаимодействие комплекса частиц S_ε^i . В этот момент из α_1 частиц типа T_1 выбирается ε_1^i частиц, ..., из α_n частиц типа T_n выбирается ε_n^i частиц, и этот комплекс частиц S_{ε^i} с распределением вероятностей $\{p_\gamma^i\}$ заменяется совокупностью S_γ новых

частиц. Система из состояния S_α , соответствующего вектору α , переходит в состояние $S_{\alpha - \varepsilon' + \gamma}$, соответствующее вектору $\alpha - \varepsilon' + \gamma$. Далее происходит аналогичная эволюция системы частиц.

В состоянии S_α система находится случайное время τ_α , пока не произойдет какое-либо из l взаимодействий, т. е. $\tau_\alpha = \min(\tau_\alpha^1, \dots, \tau_\alpha^l)$. Здесь предполагается, что случайные величины $\tau_\alpha^1, \dots, \tau_\alpha^l$ независимы. Тогда $P\{\tau_\alpha \leq t\} = 1 - \exp(-(\phi_\alpha^1 + \dots + \phi_\alpha^l)t)$ и вероятность, что произошло взаимодействие комплекса частиц $S_{\varepsilon'}$,

при условии, что взаимодействие произошло, равна $\Phi_\alpha^l \left(\sum_{i=1}^l \Phi_\alpha^{e_i} \right)^{-1}$. Возможные превращения частиц в такой системе представляют схемой взаимодействий (1.1), где случайный вектор $\gamma^i = (\gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots, \gamma_n^i)$ имеет распределение $\{p_\gamma^i\}, i = 1, \dots, l$.

Выбор значений (1.3) для ϕ_α^i объясняется следующим образом. Пусть марковский процесс находится в состоянии $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, что соответствует наличию совокупности частиц $S_\alpha = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \dots + \alpha_n T_n$. Предполагаем, что за время $\Delta t \rightarrow 0$ вероятность $\Phi_\alpha^l \Delta t + o(\Delta t)$ взаимодействия комплекса частиц $S_{\varepsilon'}$ пропорциональна числу $C_{\alpha_1}^{\varepsilon_1^i}$ сочетаний ε_1^i частиц типа T_1 из имеющихся α_1 частиц типа T_1, \dots , пропорциональна числу $C_{\alpha_n}^{\varepsilon_n^i}$ сочетаний ε_n^i частиц типа T_n из имеющихся α_n частиц типа T_n .

Для марковских процессов класса B_2 уравнения Колмогорова для переходных вероятностей записывают в компактном виде, используя производящие функции. Многомерной производящей функцией $F_\xi(s_1, \dots, s_n)$, соответствующей целочисленному случайному вектору $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ с распределением вероятностей $\{p_\alpha \geq 0, \alpha \in N^n, \sum_{\alpha \in N^n} p_\alpha = 1\}$, называется сумма ряда [3, 10]:

$$F_\xi(s_1, \dots, s_n) = \mathbf{M} s_1^{\xi_1} \dots s_n^{\xi_n} = \sum_{\alpha \in N^n} p_\alpha s_1^{\alpha_1} \dots s_n^{\alpha_n}.$$

Далее будем применять запись $s = (s_1, \dots, s_n)$, $s^\alpha = s_1^{\alpha_1} \dots s_n^{\alpha_n}$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$. Для вектора будем использовать обозначение 1, если все его компоненты равны единице; через $|s|$ обозначим вектор с компонентами $|s_i|$.

Математические ожидания компонент случайного вектора вычисляют по формуле [3]:

$$\mathbf{M} \xi_i = \frac{\partial F_\xi(1)}{\partial s_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где производная в точке $s=1$ понимается как производная слева по всем координатам s_i , $i=1, \dots, n$. Выражение для дисперсии имеет вид

$$\mathbf{D}\xi_i = \frac{\partial^2 F_\xi(1)}{\partial s_i^2} + \frac{\partial F_\xi(1)}{\partial s_i} - \left(\frac{\partial F_\xi(1)}{\partial s_i} \right)^2, \quad i=1, \dots, n.$$

Для свертки первой системы дифференциальных уравнений Колмогорова вводятся экспоненциальные производящие функции для переходных вероятностей

$$G_\beta(t; z) = \sum_{\alpha \in N^n} \frac{z^\alpha}{\alpha!} P_{\alpha\beta}(t), \quad z = (z_1, \dots, z_n),$$

и линейные дифференциальные операторы

$$h_i \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = \sum_{\gamma \in N^n} p_\gamma^i \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma}, \quad i=1, \dots, l; \quad \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} = \frac{\partial^{\gamma_1+\dots+\gamma_n}}{\partial z_1^{\gamma_1} \dots \partial z_n^{\gamma_n}}.$$

Теорема 1 [1]. Экспоненциальная производящая функция переходных вероятностей $G_\beta(t; z)$ марковского процесса $\xi(t)$ класса B_2 при любом $\beta \in N^n$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial G_\beta(t; z)}{\partial t} = \sum_{i=1}^l \lambda_i z^{\epsilon^i} \left(h_i \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial^{\epsilon^i}}{\partial z^{\epsilon^i}} \right) G_\beta(t; z), \quad G_\beta(0; z) = \frac{z^\beta}{\beta!},$$

где $\lambda_i > 0$, $i=1, \dots, n$.

Для свертки второй системы дифференциальных уравнений Колмогорова используют производящие функции:

$$F_\alpha(t; s) = \mathbf{M}(s^{\xi(t)} | \xi(0) = \alpha) = \sum_{\beta \in N^n} P_{\alpha\beta}(t) s^\beta, \quad h_i(s) = \sum_{\gamma \in N^n} p_\gamma^i s^\gamma, \quad |s| \leq 1.$$

Теорема 2 [1]. Производящая функция переходных вероятностей $F_\alpha(t; s)$ марковского процесса $\xi(t)$ класса B_2 при любом $\alpha \in N^n$ удовлетворяет при $|s| \leq 1$ линейному дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial t} = \sum_{i=1}^l \lambda_i (h_i(s) - s^{\epsilon^i}) \frac{\partial^{\epsilon^i}}{\partial s^{\epsilon^i}} F_\alpha(t; s), \quad F_\alpha(0; s) = s^\alpha.$$

Функции $G_\beta(t; z)$, $F_\alpha(t; s)$, $h_i(s)$ являются аналитическими в рассматриваемых областях.

2. Двухвершинное стационарное распределение в бистабильной системе

$3T \rightarrow 2T; 2T \rightarrow 3T; T \rightarrow 0; 0 \rightarrow T$

Рассматриваем однородный во времени марковский процесс рождения и гибели $\xi(t)$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, переходные вероятности $P_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j | \xi(0) = i\}$ которого при $t \rightarrow 0+$ представимы в виде

$$\begin{aligned} P_{i,i-1}(t) &= (\lambda_1 i + \lambda_3 i(i-1)(i-2))t + o(t), \\ P_{i,i+1}(t) &= (\lambda_0 + \lambda_2 i(i-1))t + o(t), \\ P_{ii}(t) &= 1 - (\lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 i(i-1) + \lambda_3 i(i-1)(i-2))t + o(t), \\ P_{ij}(t) &= o(t), \quad j \neq i-1, \quad i, \quad i+1, \end{aligned}$$

где $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$.

Первую систему дифференциальных уравнений для переходных вероятностей при помощи экспоненциальной производящей функции

$$G_j(t; z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!} P_{ij}(t), \quad j = 0, 1, \dots$$

запишем в виде линейного уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_j(t; z)}{\partial t} &= \left[\lambda_3 z^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^3}{\partial z^3} \right) + \lambda_2 z^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial z^3} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \lambda_1 z \left(1 - \frac{\partial}{\partial z} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_0 \left(\frac{\partial}{\partial z} - 1 \right) \right] G_j(t; z), \quad G_j(0, z) = \frac{z^j}{j!}. \end{aligned}$$

Вторую систему дифференциальных уравнений для переходных вероятностей при помощи производящей функции ($|s| \leq 1$)

$$F_i(t; s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) s^j, \quad i = 0, 1, \dots$$

представим в виде линейного уравнения третьего порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i(t; s)}{\partial t} &= \lambda_3 (s^2 - s^3) \frac{\partial^3 F_i(t; s)}{\partial s^3} + \lambda_2 (s^3 - s^2) \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} + \lambda_1 (1 - s) \frac{\partial F_i(t; s)}{\partial s} + \\ &\quad + \lambda_0 (s - 1) F_i(t; s), \quad F_i(0; s) = s^i. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В состоянии i процесс находится случайное время τ_i , $P\{\tau_i < t\} = 1 - \exp[-(\lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 i(i-1) + \lambda_3 i(i-1)(i-2))t]$. Затем происходит переход процесса $i \rightarrow i-1$ с вероятностью, равной

$$\frac{\lambda_1 i + \lambda_3 i(i-1)(i-2)}{\lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 i(i-1) + \lambda_3 i(i-1)(i-2)},$$

или переход $i \rightarrow i+1$ с вероятностью, равной

$$\frac{\lambda_0 + \lambda_2 i(i-1)}{\lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 i(i-1) + \lambda_3 i(i-1)(i-2)}.$$

Далее происходит аналогичная эволюция процесса (рис. 2.1).

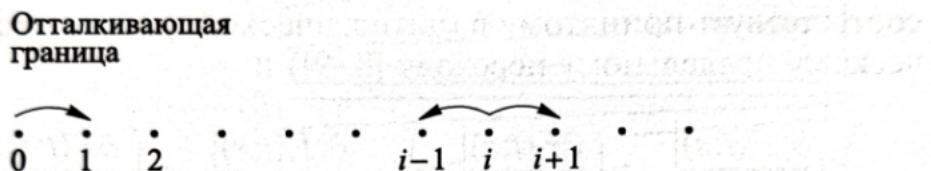


Рис. 2.1. Скачки процесса $3T \rightarrow 2T; 2T \rightarrow 3T; T \rightarrow 0; 0 \rightarrow T$

Рассматриваемый марковский процесс является процессом рождения и гибели кубического типа.

Марковская модель $\xi(t)$ иллюстрирует роль стохастических флуктуаций при рассмотрении химической реакции с кинетической схемой $A + 2T \rightleftharpoons 3T; T \rightleftharpoons B$ [6], причем концентрации веществ A и B поддерживаются постоянными. Предполагается, что система является однородной в пространстве, что достигается, например, перемешиванием. Коэффициент λ_2 пропорционален концентрации вещества A , а коэффициент λ_0 — концентрации вещества B .

2.1. Детерминированная модель и ее исследование

Дифференцируем уравнение (2.1) по s :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial t \partial s} &= \lambda_3 (2s - 3s^2) \frac{\partial^3 F_i(t; s)}{\partial s^3} + \lambda_3 (s^2 - s^3) \frac{\partial^4 F_i(t; s)}{\partial s^4} + \\ &+ \lambda_2 (3s^2 - 2s) \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} + \lambda_2 (s^3 - s^2) \frac{\partial^3 F_i(t; s)}{\partial s^3} - \lambda_1 \frac{\partial F_i(t; s)}{\partial s} + \\ &+ \lambda_1 (1-s) \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} + \lambda_0 F_i(t; s) + \lambda_0 (s-1) \frac{\partial F_i(t; s)}{\partial s}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вводим обозначение для среднего:

$$A_i(t) = M(\xi(t)|\xi(0)=i) = \left. \frac{\partial F_i(t;s)}{\partial s} \right|_{s=1},$$

учитываем $F_i(t;1) \equiv 1$ и получаем из (2.2) при $s=1$ равенство:

$$\frac{dA_i(t)}{dt} = -\lambda_3 \left. \frac{\partial^3 F_i(t;s)}{\partial s^3} \right|_{s=1} + \lambda_2 \left. \frac{\partial^2 F_i(t;s)}{\partial s^2} \right|_{s=1} - \lambda_1 A_i(t) + \lambda_0. \quad (2.3)$$

Дифференциальные уравнения закона действующих масс соблюдаются как приближенные для среднего $A_i(t)$ при большом начальном числе частиц. Полагают $i \rightarrow \infty$ (предельный переход соответствует принятому в статистической физике термодинамическому предельному переходу [8, 9]) и

$$\left. \frac{\partial^2 F_i(t;s)}{\partial s^2} \right|_{s=1} \approx \left(\left. \frac{\partial F_i(t;s)}{\partial s} \right|_{s=1} \right)^2, \quad \left. \frac{\partial^3 F_i(t;s)}{\partial s^3} \right|_{s=1} \approx \left(\left. \frac{\partial F_i(t;s)}{\partial s} \right|_{s=1} \right)^3.$$

Тогда из (2.3) следует уравнение детерминированной модели

$$\dot{x} = -\lambda_3 x^3 + \lambda_2 x^2 - \lambda_1 x + \lambda_0 \quad (2.4)$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где $x(t)$ — количество реагента в момент времени t .

Поскольку $-\lambda_3 < 0$, то при $t \rightarrow \infty$ в системе устанавливается равновесие. Если три корня стационарного уравнения

$$-\lambda_3 x^3 + \lambda_2 x^2 - \lambda_1 x + \lambda_0 = 0 \quad (2.5)$$

действительные и различные, то существуют три точки локального равновесия. При этом меньший и больший корень являются точками устойчивого равновесия, а корень между ними — точкой неустойчивого равновесия.

На рис. 2.2 показаны решения уравнения детерминированной модели (2.4) при различных начальных условиях. Горизонтальные линии соответствуют точкам локального равновесия. В зависимости от начального условия $x(t)$ стремится к одному из двух устойчивых положений: если начальное положение ниже положения неустойчивого равновесия, то при $t \rightarrow \infty$ решение $x(t)$ стремится к значению меньшего корня; в противном случае — к значению большего корня x_c . Численное моделирование марковского про-

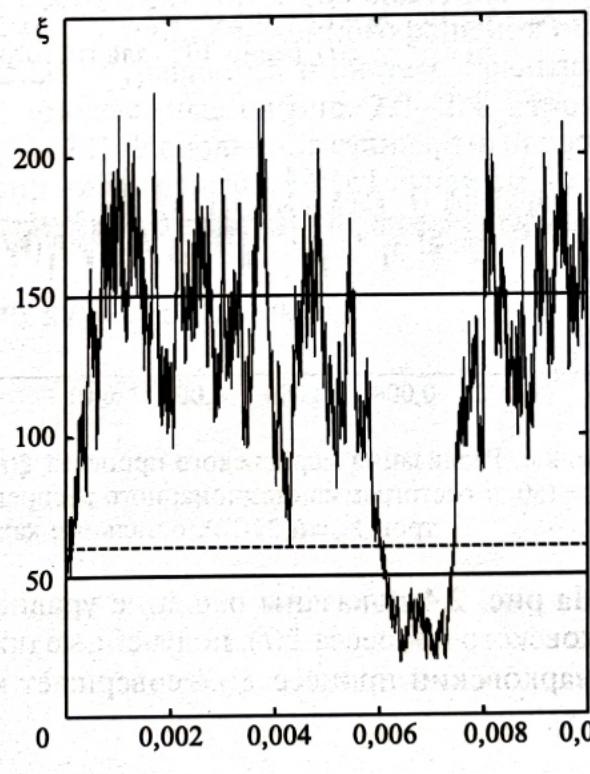
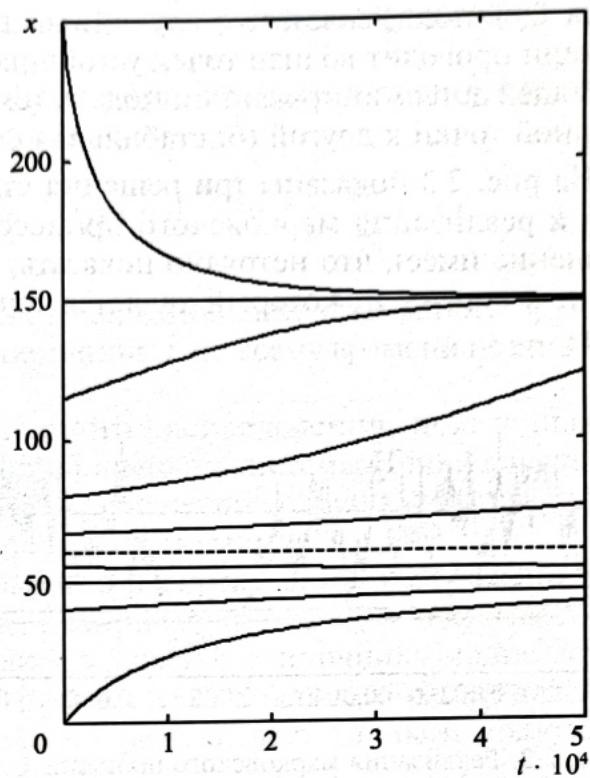


Рис. 2.2. Решения $x(t)$ уравнения (2.4) и реализация марковского процесса $\xi(t)$ при начальном условии $\xi(0) = 60$. Значения параметров:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= 4,5 \cdot 10^5; \lambda_1 = 1,95 \cdot 10^4; \\ \lambda_2 &= 2,6 \cdot 10^2; \lambda_3 = 1\end{aligned}$$

цесса $\xi(t)$ показывает, что случайный процесс большую часть времени проводит вблизи точек устойчивого равновесия соответствующей детерминированной модели (см. рис. 2.2, 2.3), переходя от одной точки к другой (бистабильная система [6], гл. 7, § 1).

На рис. 2.3 показаны три решения стационарного уравнения (2.5) и реализация марковского процесса $\xi(t)$. При $\lambda_0 \rightarrow \infty$ это уравнение имеет, что нетрудно показать, единственный действительный корень x_c , который является точкой устойчивого равновесия.

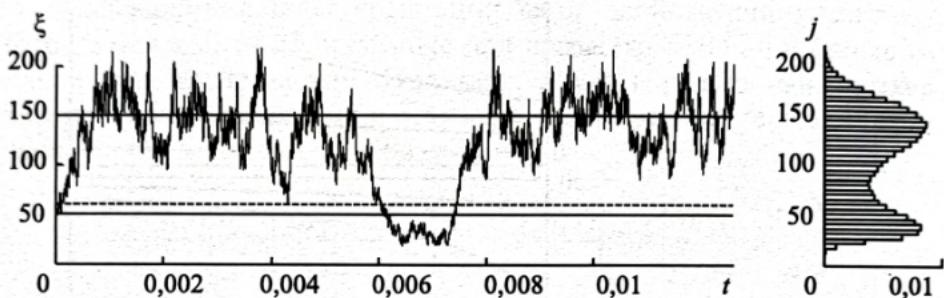


Рис. 2.3. Реализация марковского процесса $\xi(t)$ при начальном условии $\xi(0)=60$ и гистограмма стационарного распределения. Значения параметров: $\lambda_0 = 4,5 \cdot 10^5$, $\lambda_1 = 1,95 \cdot 10^4$, $\lambda_2 = 2,6 \cdot 10^2$, $\lambda_3 = 1$. Число скачков процесса $\xi(t)$ равно 10^7 (для гистограммы)

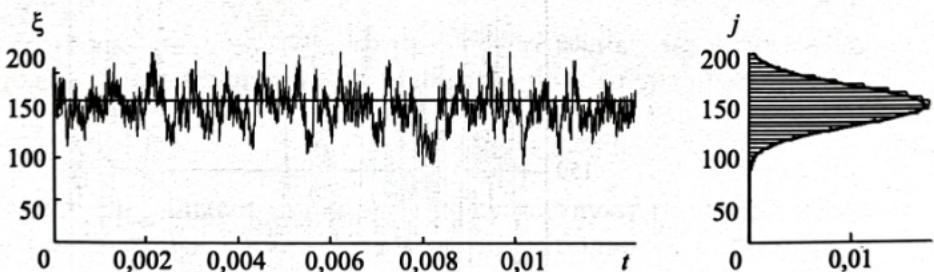


Рис. 2.4. Реализация марковского процесса $\xi(t)$ при начальном условии $\xi(0)=160$ и гистограмма стационарного распределения. Значения параметров $\lambda_0 = 6,75 \cdot 10^5$, остальные как на рис. 2.3

На рис. 2.4 показаны решение уравнения (2.5) и реализация марковского процесса $\xi(t)$, полученные при увеличении параметра λ_0 ; марковский процесс $\xi(t)$ совершает колебания около значения x_c .

2.2. Гистограммы для стационарного распределения

Методом статистического моделирования получены оценки \hat{q}_j для стационарных вероятностей:

$$q_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = j | \xi(0) = i\}, \quad j \in N; \quad \sum_{j=0}^{\infty} q_j = 1.$$

Значение \hat{q}_j вычисляют как отношение суммарного времени нахождения процесса в состоянии j ко всему времени построения реализации процесса.

Гистограмма стационарного распределения, показанная на рис. 2.3, иллюстрирует бистабильность системы. Точки локальных максимумов гистограммы не совпадают с точками устойчивого равновесия в детерминированной модели.

Гистограмма стационарного распределения, изображенная на рис. 2.4, получена при увеличении параметра λ_0 и показывает, что при увеличении интенсивности внешнего источника стационарное распределение близко к плотности нормального распределения. Точка максимума гистограммы не совпадает с точкой равновесия в детерминированной модели.

З а м е ч а н и е. Для построения рисунков вида рис. 2.2 применяют метод Рунге — Кутта для приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем. Реализации марковских процессов, приведенные на рис. 2.2–2.4, строятся методом Монте-Карло [12–14]. Используют стандартный датчик равномерно распределенных на отрезке $[0;1]$ случайных чисел $r = \text{RNDM}[0;1]$. Случайная величина с показательным распределением

$$P\{\tau \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

определяется формулой $\tau = -\ln(1-r)/\lambda$.

3. Квазистационарное распределение для марковского ветвящегося процесса со схемой $2T \rightarrow T; T \rightarrow 0, 2T$

Рассматриваем однородный во времени марковский процесс рождения и гибели $\xi(t)$, где $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, переходные вероятности $P_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j | \xi(0) = i\}$ которого при $t \rightarrow 0+$ представимы в виде

$$\begin{aligned}P_{i,i-1}(t) &= (\lambda_2 i(i-1) + p_0 \lambda_1 i)t + o(t), \\P_{ii}(t) &= 1 - (\lambda_2 i(i-1) + \lambda_1 i)t + o(t), \\P_{i,i+1}(t) &= p_2 \lambda_1 i t + o(t), \\P_{ij}(t) &= o(t), \quad j \neq i-1, i, i+1,\end{aligned}$$

где $p_0 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_0 + p_2 = 1$; $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Экспоненциальная производящая функция переходных вероятностей $G_j(t; z) = \sum_{i=0}^{\infty} (z^i / i!) P_{ij}(t)$ удовлетворяет первому уравнению:

$$\frac{\partial G_j(t; z)}{\partial t} = \left[\lambda_2 z^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \lambda_1 z \left(p_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + p_0 - \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] G_j(t; z),$$

$$G_j(0, z) = z^j / j!.$$

Производящая функция переходных вероятностей $F_i(t; s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) s^j$ удовлетворяет второму уравнению:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_i(t; s)}{\partial t} &= \lambda_2 (s - s^2) \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} + \lambda_1 (p_2 s^2 + p_0 - s) \frac{\partial F_i(t; s)}{\partial s}, \\F_i(0; s) &= s^i.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Марковский процесс находится в состоянии i случайное время $\tau_i = \min(\tau_2, \tau_1)$, где τ_2, τ_1 — независимые случайные величины;

$$P\{\tau_2 \leq t\} = 1 - \exp(-\lambda_2 i(i-1)t), \quad P\{\tau_1 \leq t\} = 1 - \exp(-\lambda_1 i t).$$

Если $\min(\tau_2, \tau_1) = \tau_2$, то процесс переходит в состояние $i-1$. Если $\min(\tau_2, \tau_1) = \tau_1$, то процесс с вероятностью p_0 переходит в состояние $i-1$ и с вероятностью p_2 — в состояние $i+1$ (ветвящийся процесс

$T \rightarrow 0, 2T$ [3]). Далее происходит аналогичная эволюция процесса (рис. 3.1). Состояние 0 является поглощающим.

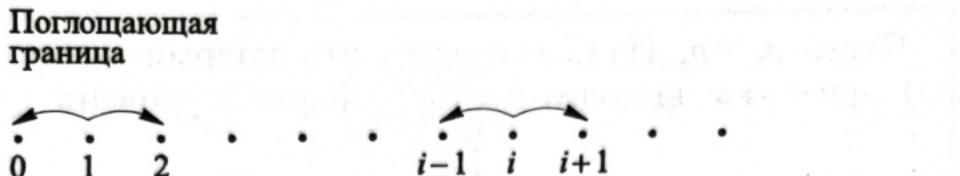


Рис. 3.1. Скачки процесса $2T \rightarrow T; T \rightarrow 0, 2T$

Рассматриваемый марковский процесс является процессом рождения и гибели квадратичного типа.

3.1. Уравнение детерминированной модели и его решение

Для рассматриваемой автокаталитической реакции с кинетической схемой $2T \rightarrow T; T \rightarrow 0, 2T$ [15] получим детерминированную модель, описывающую изменение количества реагента $x(t)$. Продифференцируем уравнение (3.1) по s и подставим $s = 1$, получим

$$\left. \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial t \partial s} \right|_{s=1} = -\lambda_2 \left. \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} \right|_{s=1} + \lambda_1 (2p_2 - 1) \left. \frac{\partial F_i(t; s)}{\partial s} \right|_{s=1}.$$

Используем обозначения для среднего числа частиц $A_i(t) = \left. \frac{\partial F_i(t; s)}{\partial s} \right|_{s=1}$:

$$\frac{dA_i(t)}{dt} = -\lambda_2 \left. \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} \right|_{s=1} + \lambda_1 (p_2 - p_0) A_i(t). \quad (3.2)$$

Считая при $i \rightarrow \infty$ справедливым приближение «термодинамического предельного перехода»

$$\left. \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} \right|_{s=1} \approx \left(\left. \frac{\partial F_i(t; s)}{\partial s} \right|_{s=1} \right)^2 = A_i^2(t),$$

получаем из (3.2) уравнение детерминированной модели:

$$\dot{x} = -\lambda_2 x^2 + \lambda_1 (p_2 - p_0) x$$

с начальным условием $x(0) = x_0$. Решение (при $p_0 \neq p_2$) имеет вид

$$x(t) = \frac{\lambda_1(p_2 - p_0)x_0}{(\lambda_1(p_2 - p_0) - \lambda_2 x_0)\exp(-\lambda_1(p_2 - p_0)t) + \lambda_2 x_0}. \quad (3.3)$$

Пусть $p_2 > p_0$. Из (3.3) следует, что детерминированная модель $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$ выходит на стационарный уровень

$$x_c = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{\lambda_1(p_2 - p_0)}{\lambda_2} > 0.$$

Пусть $p_2 < p_0$. Из (3.3) следует, что детерминированная модель $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$ выходит на уровень 0.

3.2. Гистограмма для квазистационарного распределения

Случайный процесс $\xi(t)$ может длительное время находиться в окрестности точки x_c , но с вероятностью 1 останавливается (при любых значениях параметров) в поглощающем состоянии 0 (рис. 3.2).

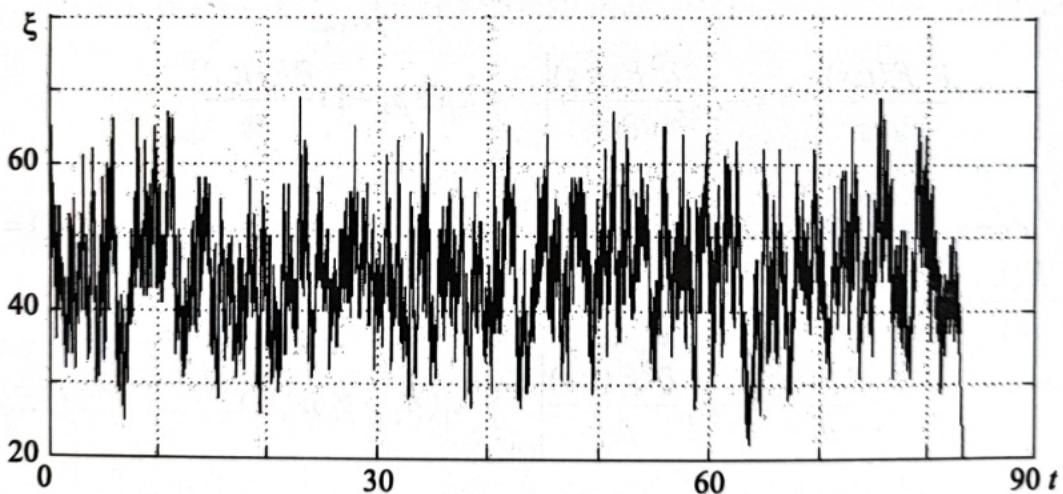


Рис. 3.2. Реализация марковского процесса $\xi(t)$ при начальном условии $\xi(0)=100$. Значения параметров: $\lambda_1=5,5$, $\lambda_2=0,1$; $p_0=0,1$, $p_2=0,9$

В работе [15] доказано существование предельного условного распределения

$$q_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = j | \xi(t) > 0, \xi(0) = i\}, \quad j = 1, 2, \dots; \quad \sum_{j=1}^{\infty} q_j = 1,$$

и сделано предположение, что квазистационарное распределение близко к нормальному.

На рис. 3.3 приведена гистограмма условного распределения, полученная методом статистических испытаний.

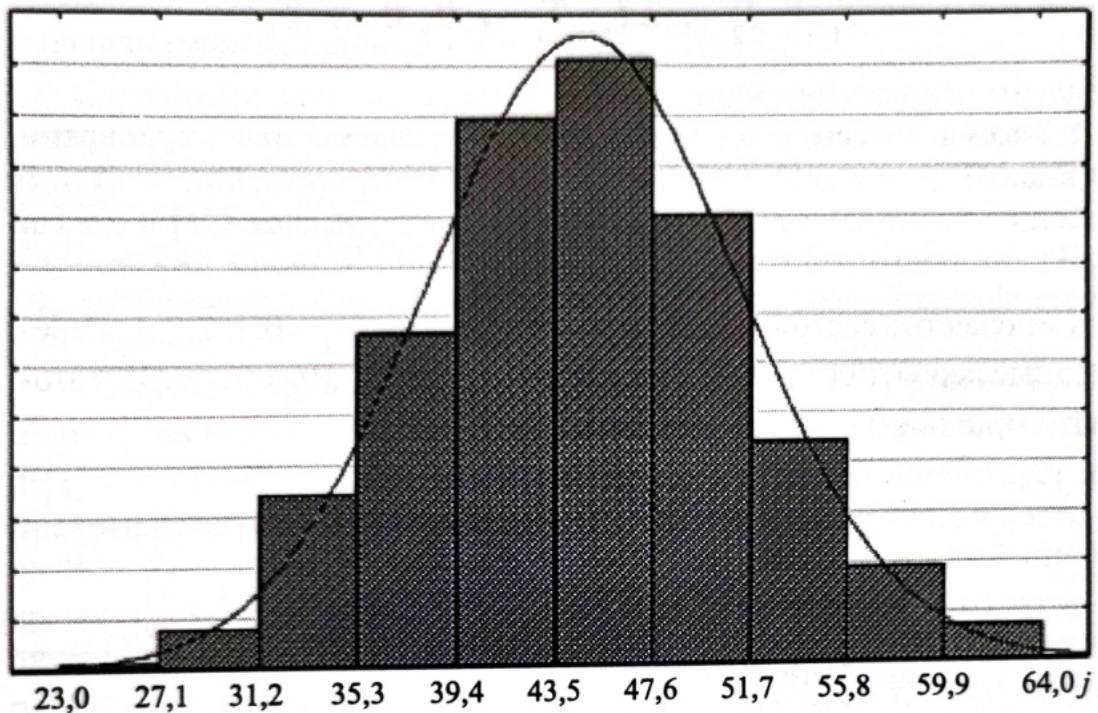


Рис. 3.3. Гистограмма квазистационарного распределения, построенная по 1000 реализациям процесса $\xi(t)$ на промежутке $t \in [0; 50]$

При больших λ_1 и $p_2 > 1/2$ гистограмма близка к плотности нормального распределения [16].

4. Спиралевидные реализации процесса рождения и гибели квадратичного типа

$$T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow 0; 0 \rightarrow T_2$$

Рассматриваем однородный во времени двумерный марковский процесс

$$\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t)), \quad t \in [0, \infty),$$

на множестве состояний $N^2 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, 2, \dots\}$, переходные вероятности $P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2) | \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2)\}$ которого при $t \rightarrow 0+$ представимы в виде

$$P_{(\alpha_1+1, \alpha_2-1)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \lambda_2 \alpha_1 \alpha_2 t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1-1, \alpha_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \lambda_1 \alpha_1 t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1, \alpha_2+1)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \lambda_0 t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1, \alpha_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = 1 - (\lambda_2 \alpha_1 \alpha_2 + \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_0) t + o(t),$$

где $\lambda_2 > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_0 > 0$.

Вводим экспоненциальную производящую и производящую функции переходных вероятностей ($|s| \leq 1, |s_1| \leq 1$):

$$G_\beta(t; z) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1! \alpha_2!} P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t), \quad F_\alpha(t; s) = \sum_{\beta_1, \beta_2=0}^{\infty} P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2}. \quad (4.1)$$

Первая система дифференциальных уравнений для переходных вероятностей марковского процесса $\xi(t)$ равносильна дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial G_\beta(t; z)}{\partial t} = \left[\lambda_2 z_1 z_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \right) + \lambda_1 z_1 \left(1 - \frac{\partial}{\partial z_1} \right) + \lambda_0 \left(\frac{\partial}{\partial z_2} - 1 \right) \right] G_\beta(t; z)$$

с начальным условием $G_\beta(0; z) = \frac{z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2}}{\beta_1! \beta_2!}$.

Вторая система дифференциальных уравнений для переходных вероятностей равносильна дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial t} = \lambda_2(s_1^2 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_1(1 - s_1) \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_1} + \lambda_0(s_2 - 1) F_\alpha(t; s)$$

с начальным условием $F_\alpha(0; s) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$.

Случайный процесс $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ интерпретируется как модель распространения инфекции в популяции с двумя типами особей: тип T_1 — инфицированные; тип T_2 — восприимчивые. Процесс введен в [17] как модель повторяющейся эпидемии и обобщает марковский процесс эпидемии Бартлетта — Мак-Кендрика [18, 19] допущением, что число восприимчивых особей пополняется иммиграцией.

Состояние процесса (α_1, α_2) означает наличие α_1 частиц типа T_1 и α_2 частиц типа T_2 . Через случайное время τ_α^2 , с вероятностью $P\{\tau_\alpha^2 < t\} = 1 - e^{-\lambda_2 \alpha_1 \alpha_2 t}$, пара частиц типа T_1 , T_2 взаимодействует и превращается в две частицы типа T_1 — процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1 + 1, \alpha_2 - 1)$. Через случайное время τ_α^1 , $P\{\tau_\alpha^1 < t\} = 1 - e^{-\lambda_1 \alpha_1 t}$, частица типа T_1 выбывает из популяции — процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1 - 1, \alpha_2)$. Кроме этого, через случайное время τ_α^0 , $P\{\tau_\alpha^0 < t\} = 1 - e^{-\lambda_0 t}$, частица типа T_2 появляется в популяции извне — процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1, \alpha_2 + 1)$. Случайные величины $\tau_\alpha^2, \tau_\alpha^1, \tau_\alpha^0$ независимы, в состоянии (α_1, α_2) процесс находится случайное время $\tau_\alpha = \min\{\tau_\alpha^2, \tau_\alpha^1, \tau_\alpha^0\}$. Далее идет аналогичная эволюция случайного процесса.

Возможные скачки марковского процесса показаны на рис. 4.1.

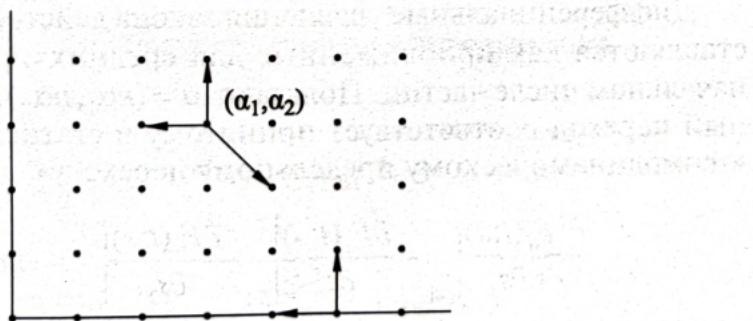


Рис. 4.1. Скачки процесса $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow 0; 0 \rightarrow T_2$

Рассматриваемый процесс является двумерным процессом рождения и гибели квадратичного типа.

4.1. Детерминированная модель и ее исследование. Пример реализации марковского процесса

Чтобы получить детерминированную модель для кинетической схемы $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow 0; 0 \rightarrow T_2$, дифференцируем уравнение (3.1) по s_1 или s_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial t} &= \lambda_2 (2s_1 - s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_2 (s_1^2 - s_1 s_2) \frac{\partial^3 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1^2 \partial s_2} - \\ &- \lambda_1 \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_1} + \lambda_1 (1 - s_1) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1^2} + \lambda_0 (s_2 - 1) \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_1}, \\ \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_2 \partial t} &= -\lambda_2 s_1 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_2 (s_1^2 - s_1 s_2) \frac{\partial^3 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2^2} + \\ &+ \lambda_1 (1 - s_1) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} - \lambda_0 F_\alpha(t; s) + \lambda_0 (s_2 - 1) \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_2}, \end{aligned}$$

подставляем $s_1 = 1, s_2 = 1$ и, учитывая равенство $F_\alpha(t; 1) \equiv 1$, используя обозначения

$$A_i(t) = \mathbf{M}(\xi_i(t) | \xi_1(0) = \alpha_1, \xi_2(0) = \alpha_2) = (\partial F_\alpha(t; s) / \partial s_i) \Big|_{s=1}$$

для среднего числа частиц типа T_i , где $i = 1, 2$, получаем

$$\frac{dA_1(t)}{dt} = \lambda_2 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} \Big|_{s=1} - \lambda_1 A_1(t); \quad \frac{dA_2(t)}{dt} = -\lambda_2 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} \Big|_{s=1} + \lambda_0.$$

Дифференциальные уравнения закона действующих масс представляются как приближенные для средних $A_i(t)$ при большом начальном числе частиц. Полагают $\alpha = (n\alpha_1, n\alpha_2)$, $n \rightarrow \infty$ (предельный переход соответствует принятому в статистической физике «термодинамическому предельному переходу») и

$$\frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} \Big|_{s=1} \approx \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_1} \Big|_{s=1} \cdot \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_2} \Big|_{s=1} = A_1(t) A_2(t).$$

Приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений ($x_1(t)$ — количество частиц T_1 , $x_2(t)$ — количество частиц T_2)

$$\dot{x}_1 = \lambda_2 x_1 x_2 - \lambda_1 x_1; \quad \dot{x}_2 = -\lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_0 \quad (4.2)$$

с начальными условиями $x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0$.

Систему нелинейных уравнений (4.2) исследуют методом линеаризации в окрестности точки стационарности [17, 20]:

$$(x_1^c, x_2^c) = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right).$$

Вводим функции $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, определяемые равенствами

$$x_1 = x_1^c(1+u_1), \quad x_2 = x_2^c(1+u_2);$$

подставляем эти выражения в (4.2), получаем систему уравнений

$$\dot{u}_1 = \lambda_1(u_2 + u_1u_2); \quad \lambda_1\dot{u}_2 = -\lambda_0\lambda_2(u_1 + u_2 + u_1u_2).$$

Полагая u_1 , u_2 малыми и пренебрегая произведением u_1u_2 , имеем

$$\dot{v}_1 = \lambda_1 v_2; \quad \lambda_1\dot{v}_2 = -\lambda_0\lambda_2(v_1 + v_2).$$

Дифференцируя первое из последних уравнений $\ddot{v}_1 = \lambda_1\dot{v}_2$ и исключая v_2 , получаем

$$\ddot{v}_1 + \frac{\lambda_0\lambda_2}{\lambda_1}\dot{v}_1 + \lambda_0\lambda_2 v_1 = 0.$$

Решение линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами выражается через корни характеристического многочлена

$$k^2 + \frac{\lambda_0\lambda_2}{\lambda_1}k + \lambda_0\lambda_2 = 0.$$

Пусть $\frac{\lambda_0^2\lambda_2^2}{4\lambda_1^2} - \lambda_0\lambda_2 < 0$, тогда общее решение имеет вид

$$v_1 = e^{-\frac{\lambda_0\lambda_2 t}{2\lambda_1}} \left(C_1 \cos \sqrt{\lambda_0\lambda_2 - \frac{\lambda_0^2\lambda_2^2}{4\lambda_1^2}} t + C_2 \sin \sqrt{\lambda_0\lambda_2 - \frac{\lambda_0^2\lambda_2^2}{4\lambda_1^2}} t \right);$$

$$v_2 = e^{-\frac{\lambda_0\lambda_2 t}{2\lambda_1}} \left[\left(-\frac{\lambda_0\lambda_2}{2\lambda_1} C_1 + \sqrt{\lambda_0\lambda_2 - \frac{\lambda_0^2\lambda_2^2}{4\lambda_1^2}} C_2 \right) \cos \sqrt{\lambda_0\lambda_2 - \frac{\lambda_0^2\lambda_2^2}{4\lambda_1^2}} t - \left(\sqrt{\lambda_0\lambda_2 - \frac{\lambda_0^2\lambda_2^2}{4\lambda_1^2}} C_1 + \frac{\lambda_0\lambda_2}{2\lambda_1} C_2 \right) \sin \sqrt{\lambda_0\lambda_2 - \frac{\lambda_0^2\lambda_2^2}{4\lambda_1^2}} t \right],$$

где C_1 , C_2 — произвольные константы.

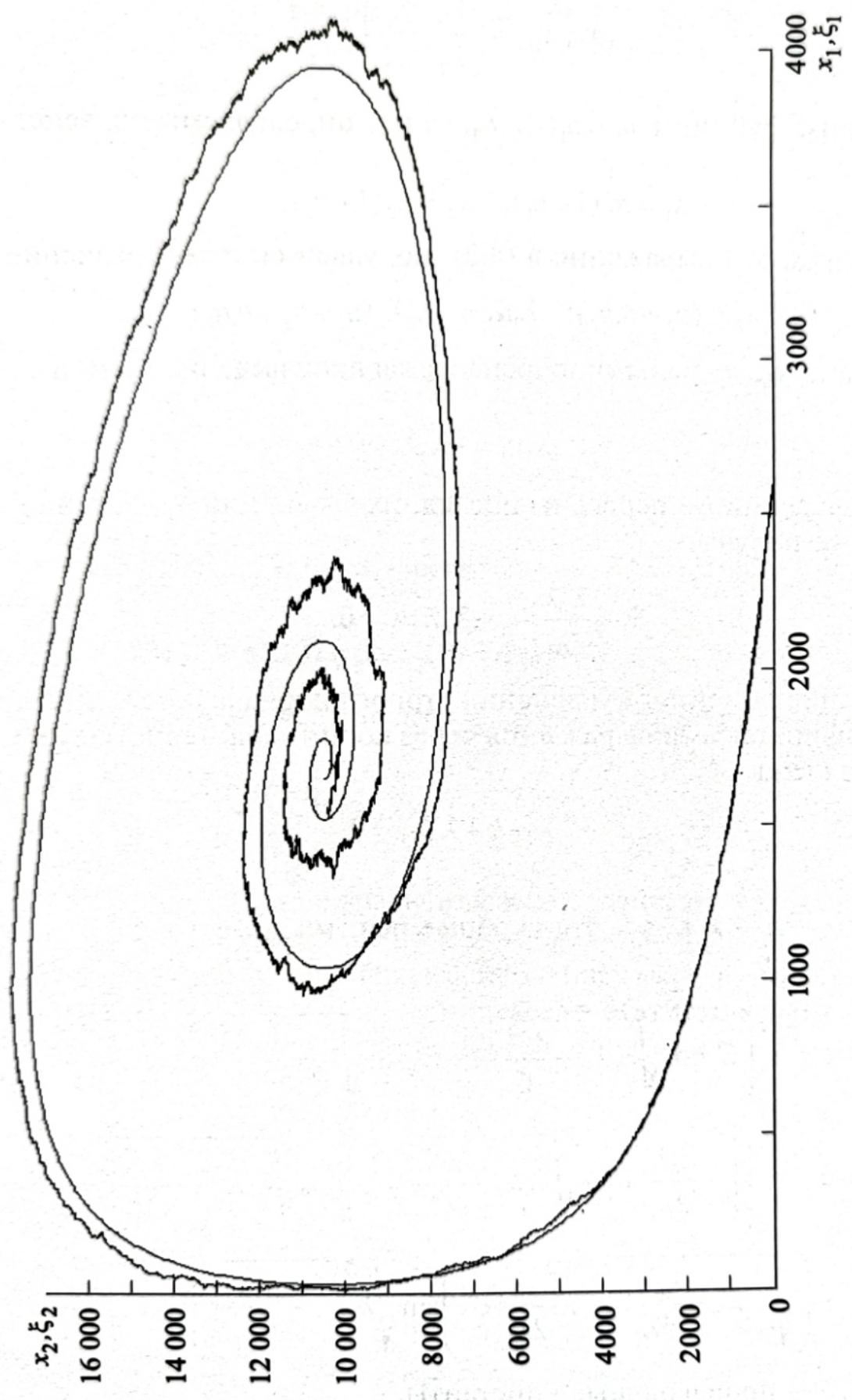


Рис. 4.2. Детерминированная $(x_1(t), x_2(t))$ и стохастическая $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ реализации на фазовой плоскости при начальных условиях $x_1^0 = \alpha_1 = 3000$, $x_2^0 = \alpha_2 = 0$. Значения параметров: $\lambda_0 = 10^3$, $\lambda_1 = 0,5$, $\lambda_2 = 5 \cdot 10^{-5}$

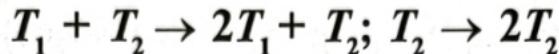
Таким образом, функции

$$x_1(t) \approx x_1^c(1 + v_1(t)); \quad x_2(t) \approx x_2^c(1 + v_2(t))$$

задают затухающие колебания — траектория на фазовой плоскости $x_1 \times x_2$ есть спираль, накручивающаяся на точку стационарности (рис. 4.2).

Пример спиралеобразной реализации марковского процесса $\xi(t)$, показанный на рис. 4.2, получен методом Монте-Карло. Случайный процесс длительное время находится в окрестности точки стационарности $(\lambda_0 / \lambda_1, \lambda_1 / \lambda_2)$, но с вероятностью 1 попадает независимо от значений параметров в поглощающее множество $\{(0,0), (0,1), (0,2), \dots\}$.

5. Система «паразит — носитель»



Рассмотрим однородный во времени двумерный марковский процесс

$$\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t)), \quad t \in [0, \infty),$$

на множестве состояний N^2 , соответствующий схеме взаимодействий $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1 + T_2; T_2 \rightarrow 2T_2$. Используя производящие функции переходных вероятностей (4.1), получаем первую систему уравнений для переходных вероятностей:

$$\frac{\partial G_\beta(t; z)}{\partial t} = \left[\lambda_1 z_1 z_2 \left(\frac{\partial^3}{\partial z_1^2 \partial z_2} - \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \right) + \lambda_2 z_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \right] G_\beta(t; z)$$

с начальным условием $G_\beta(0; z) = \frac{z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2}}{\beta_1! \beta_2!}$

и вторую систему уравнений

$$\frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial t} = \lambda_1 (s_1^2 s_2 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_2 (s_2^2 - s_2) \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_2} \quad (5.1)$$

с начальным условием $F_\alpha(0; s) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$.

Кинетическая схема задает модель типа «паразит — носитель» [21], где «носитель» T_2 размножается, а «паразит» T_1 способен размножаться при наличии носителя. Фазовое пространство — множество векторов с целыми неотрицательными компонентами (α_1, α_2) , где α_1 — число частиц типа T_1 , α_2 — число частиц типа T_2 . Если случайный процесс находится в состоянии $(0, \alpha_2)$, то происходит скачок $(0, \alpha_2) \rightarrow (0, \alpha_2 + 1)$. Состояния $(\alpha_1, 0)$ — поглощающие. Из других состояний (α_1, α_2) возможны скачки $(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow (\alpha_1 + 1, \alpha_2)$ или $(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2 + 1)$ (рис. 5.1). В состоянии (α_1, α_2) процесс находится случайное время $\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \min(\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2, \tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^1)$. Распределения случайных величин $\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2, \tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^1$ имеют вид

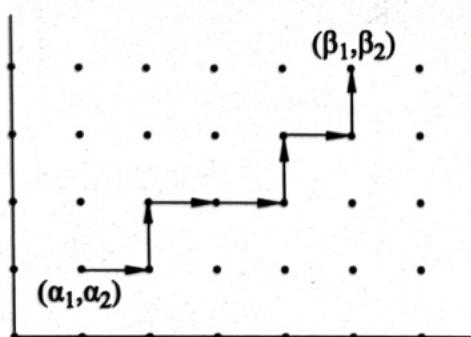


Рис. 5.1. Реализация на фазовом пространстве N^2 процесса $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1 + T_2; T_2 \rightarrow 2T_2$

$P\{\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2 < t\} = 1 - \exp(-\lambda_1 \alpha_1 \alpha_2 t)$, $P\{\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^1 < t\} = 1 - \exp(-\lambda_2 \alpha_2 t)$. Эти случайные величины независимы.

5.1. Уравнения детерминированной модели и их решение

Продифференцируем (5.1) по s_1 или s_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial t \partial s_1} &= \lambda_1 (2s_1 s_2 - s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \\ &+ \lambda_1 (s_1^2 s_2 - s_1 s_2) \frac{\partial^3 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1^2 \partial s_2} + \lambda_2 (s_2^2 - s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2}; \\ \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial t \partial s_2} &= \lambda_1 (s_1^2 - s_1) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_1 (s_1^2 s_2 - s_1 s_2) \frac{\partial^3 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2^2} + \\ &+ \lambda_2 (2s_2 - 1) \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_2} + \lambda_2 (s_2^2 - s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_2^2}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Подставляя $s = 1$ и используя обозначения $A_i(t) = \left. \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_i} \right|_{s=1}$ для среднего числа частиц типа T_i , $i = 1, 2$, получаем

$$\frac{dA_1(t)}{dt} = \lambda_1 \left. \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} \right|_{s=1}; \quad \frac{dA_2(t)}{dt} = \lambda_2 \left. \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_2} \right|_{s=1}. \quad (5.3)$$

Считаем, что при $\alpha = (n\alpha_1, n\alpha_2)$, $n \rightarrow \infty$, справедливо приближение:

$$\left. \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} \right|_{s=1} \approx \left. \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_1} \right|_{s=1} \cdot \left. \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_2} \right|_{s=1},$$

и из (5.3) приходим к детерминированной модели

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 x_2; \quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2$$

с начальными условиями $x_1(0) = \alpha_1$, $x_2(0) = \alpha_2$. Решение последней системы имеет вид

$$x_1(t) = \alpha_1 \exp[\lambda_1 \alpha_2 (e^{\lambda_2 t} - 1) / \lambda_2]; \quad x_2(t) = \alpha_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (5.4)$$

Здесь $x_1(t)$, $x_2(t)$ — количество частиц T_1 , T_2 в момент времени t .

5.2. Вычисление математических ожиданий в марковской модели

Для математического ожидания числа частиц типа T_1

$$A_1(t) = \mathbf{M}(\xi_1(t)|(\xi_1(0), \xi_2(0)) = (\alpha_1, \alpha_2)) = \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_1} \Big|_{s_1=1, s_2=1}.$$

Введем, следуя работе [21], функцию

$$H(t; s_2) = \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_1} \Big|_{s_1=1},$$

тогда $A_1(t) = H(t; s_2) \Big|_{s_2=1}$. В равенство (5.2) подставляем $s_1 = 1$:

$$\frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial t \partial s_1} \Big|_{s_1=1} = s_2 (\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} \Big|_{s_1=1},$$

и используем введенную функцию

$$\frac{\partial H(t; s_2)}{\partial t} = s_2 (\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1) \frac{\partial H(t; s_2)}{\partial s_2} \quad (5.5)$$

с начальным условием $H(0; s_2) = \alpha_1 s_2^{\alpha_2}$.

Для решения линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (5.5) запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнение характеристик) [22]:

$$\frac{dt}{1} = \frac{ds_2}{-s_2(\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1)} = \frac{dH}{0},$$

и найдем первые интегралы.

Из равенства $\frac{dt}{1} = \frac{ds_2}{-s_2(\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1)}$ после интегрирования получаем (при $\lambda_1 \neq \lambda_2$)

$$t = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \left(\frac{\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1}{s_2} \right) + C_1^*.$$

Потенцируя, положим $C_1 = e^{C_1^*}$, и тогда первый интеграл

$$\frac{\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1}{s_2} \exp(-(\lambda_1 - \lambda_2)t) = C_1,$$

другой первый интеграл получаем из равенства

$$\frac{dt}{1} = \frac{dH}{0}; \quad H = C_2,$$

и общее решение уравнения (5.5) следующее [22]:

$$F\left(\frac{\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1}{s_2} \exp(-(\lambda_1 - \lambda_2)t), H\right) = 0,$$

где F — произвольная дифференцируемая функция.

Решение последнего уравнения относительно H :

$$H(t; s_2) = f\left(\frac{\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1}{s_2} \exp(-(\lambda_1 - \lambda_2)t)\right),$$

где f — произвольная дифференцируемая функция.

Найдем частное решение уравнения (5.5), соответствующее начальному условию. При $t = 0$ получаем равенство

$$f\left(\frac{\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1}{s_2}\right) = \alpha_1 s_2^{\alpha_2}.$$

Положим

$$y = \frac{\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1}{s_2},$$

тогда

$$s_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{y - \lambda_2}$$

и искомая функция $f(y) = \alpha_1 \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{y - \lambda_2}\right)^{\alpha_2}$.

Таким образом, имеем частное решение:

$$H(t; s_2) = \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_2)^{\alpha_2} \left[\frac{\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1}{s_2} \exp(-(\lambda_1 - \lambda_2)t) - \lambda_2 \right]^{-\alpha_2}.$$

Подставив в последнюю формулу $s_2 = 1$, получаем выражение для математического ожидания (при $\lambda_1 \neq \lambda_2$):

$$A_1(t) = \alpha_1 \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \exp(-(\lambda_1 - \lambda_2)t) - \lambda_2} \right)^{\alpha_2}. \quad (5.6)$$

Для нахождения $A_2(t)$ рассмотрим второе из уравнений (5.3):

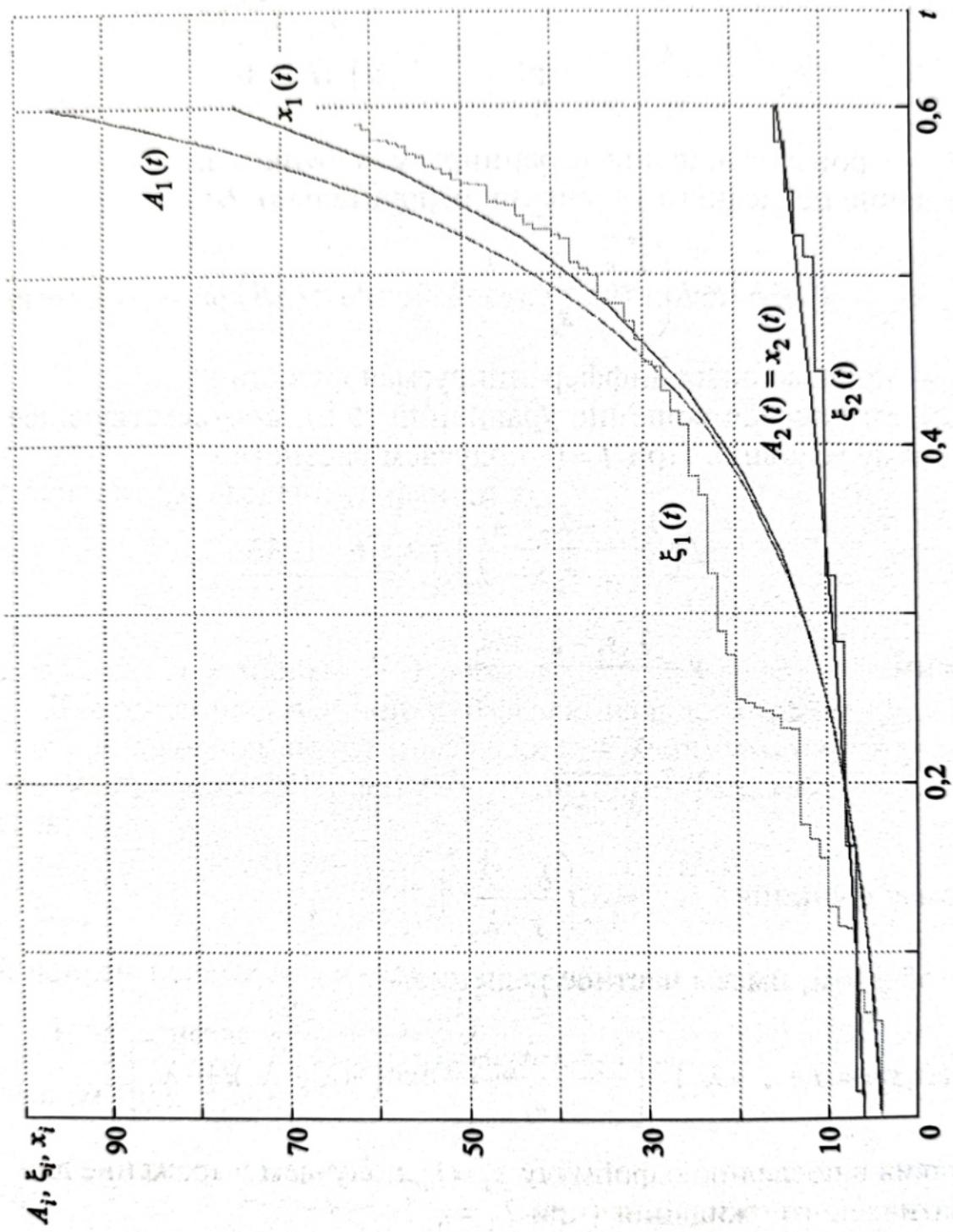


Рис. 5.2. Детерминированные ($x_1(t)$, $x_2(t)$) и стохастические ($\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$) реализации, средние значения $A_1(t)$, $A_2(t)$ при $t \in [0; 0,6]$. Начальные условия: $x_1(0) = \alpha_1 = 4$; $x_2(0) = \alpha_2 = 6$. Значения параметров: $\lambda_1 = 0,5$; $\lambda_2 = 1,5$

$$\frac{dA_2(t)}{dt} = \lambda_2 A_2(t)$$

с начальным условием $A_2(0) = \alpha_2$. Отсюда

$$A_2(t) = \alpha_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Полученные точные решения (5.4), (5.6) показывают несовпадение $x_1(t)$ для детерминированной модели и среднего $A_1(t)$ для марковской модели. В частности,

$$\lim_{t \rightarrow t_{kp}} A_1(t) = \infty,$$

где $t_{kp} = \ln(\lambda_1 / \lambda_2) / (\lambda_1 - \lambda_2)$, а значения $x_1(t)$ конечны при $t \in [0, \infty)$ (рис. 5.2) [23].

6. Вероятностный аналог модели конкуренции $T_1 + T_2 \rightarrow T_1, T_2; 2T_1 \rightarrow T_1; 2T_2 \rightarrow T_2;$ $T_1 \rightarrow 2T_1; T_2 \rightarrow 2T_2$

Кинетическая схема $T_1 + T_2 \rightarrow T_1, T_2; 2T_1 \rightarrow T_1; 2T_2 \rightarrow T_2; T_1 \rightarrow 2T_1; T_2 \rightarrow 2T_2$ описывает конкуренцию между двумя видами особей за обладание ограниченным микрокосмом [24]: $T_1 + T_2 \rightarrow T_1, T_2$ означает конкурентную борьбу между частицами разных типов, и в результате остается частица типа T_1 или T_2 . Частицы каждого типа могут размножаться $T_1 \rightarrow 2T_1; T_2 \rightarrow 2T_2$ и гибнуть в результате самолимитирования $2T_1 \rightarrow T_1; 2T_2 \rightarrow T_2$ (рис. 6.1).

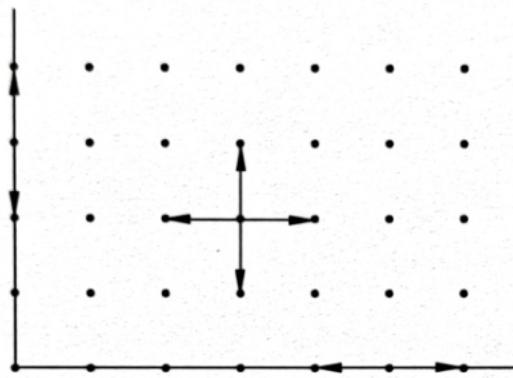


Рис. 6.1. Скачки процесса $T_1 + T_2 \rightarrow T_1, T_2; 2T_1 \rightarrow T_1; 2T_2 \rightarrow T_2;$
 $T_1 \rightarrow 2T_1; T_2 \rightarrow 2T_2$

Детерминированная модель задается системой кинетических уравнений

$$\dot{x}_1 = b_1 x_1 - \frac{b_1}{K_1} x_1^2 - \frac{b_1 \kappa_1}{K_1} x_1 x_2; \quad \dot{x}_2 = b_2 x_2 - \frac{b_2}{K_2} x_2^2 - \frac{b_2 \kappa_2}{K_2} x_1 x_2 \quad (6.1)$$

с начальными условиями $x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0$, где $x_1(t), x_2(t)$ — численности популяций в момент времени t ; b_1, b_2 — коэффициенты потенциальной скорости роста особей первого и второго видов; K_1, K_2 — предельные количества особей каждого вида при отсутствии конкуренции; κ_1, κ_2 — коэффициенты борьбы за существование [24].

Детерминированной модели (6.1) соответствует однородный во времени марковский процесс

$$\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t)), \quad t \in [0, \infty),$$

на множестве состояний $N^2 = \{(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \dots\}$, переходные вероятности $P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t)$ которого представимы при $t \rightarrow 0+$ в виде

$$P_{(\alpha_1-1, \alpha_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = (p_2 \alpha_1 \alpha_2 \lambda_1 + \alpha_1 (\alpha_1 - 1) \lambda_2) t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1+1, \alpha_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \alpha_1 \lambda_4 t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1, \alpha_2-1)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = (p_1 \alpha_1 \alpha_2 \lambda_1 + \alpha_2 (\alpha_2 - 1) \lambda_3) t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1, \alpha_2+1)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \alpha_2 \lambda_5 t + o(t),$$

где $p_1 \geq 0; p_2 \geq 0; p_1 + p_2 = 1; \lambda_i > 0, i = 1, \dots, 5$ [12].

Используя двумерные производящие функции (4.2), записываем первое уравнение

$$\frac{\partial G_\beta(t; z)}{\partial t} = \left[\lambda_1 z_1 z_2 \left(\frac{p_1 \partial}{\partial z_1} + \frac{p_2 \partial}{\partial z_2} - \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \right) + \lambda_2 z_1^2 \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) + \lambda_3 z_2^2 \left(\frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) + \lambda_4 z_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \frac{\partial}{\partial z_1} \right) + \lambda_5 z_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \right] G_\beta(t; z)$$

с начальным условием $G_\beta(0; z) = \frac{z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2}}{\beta_1! \beta_2!}$

и второе уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial t} &= \lambda_1 (p_1 s_1 + p_2 s_2 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_2 (s_1 - s_1^2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1^2} + \\ &+ \lambda_3 (s_2 - s_2^2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_2^2} + \lambda_4 (s_1^2 - s_1) \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_1} + \lambda_5 (s_2^2 - s_2) \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_2} \quad (6.2) \end{aligned}$$

с начальным условием $F_\alpha(0; s) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$.

Применив к (6.2) изложенный ранее «термодинамический предельный переход», получаем, что параметры вероятностной (6.2) и детерминированной (6.1) моделей связаны соотношениями:

$$\lambda_1 p_1 = \frac{b_2 \kappa_2}{K_2}; \lambda_1 p_2 = \frac{b_1 \kappa_1}{K_1}; \lambda_2 = \frac{b_1}{K_1}; \lambda_3 = \frac{b_2}{K_2}; \lambda_4 = b_1; \lambda_5 = b_2.$$

На рис. 6.2 штриховыми линиями на фазовой плоскости представлены решения системы уравнений детерминированной моде-

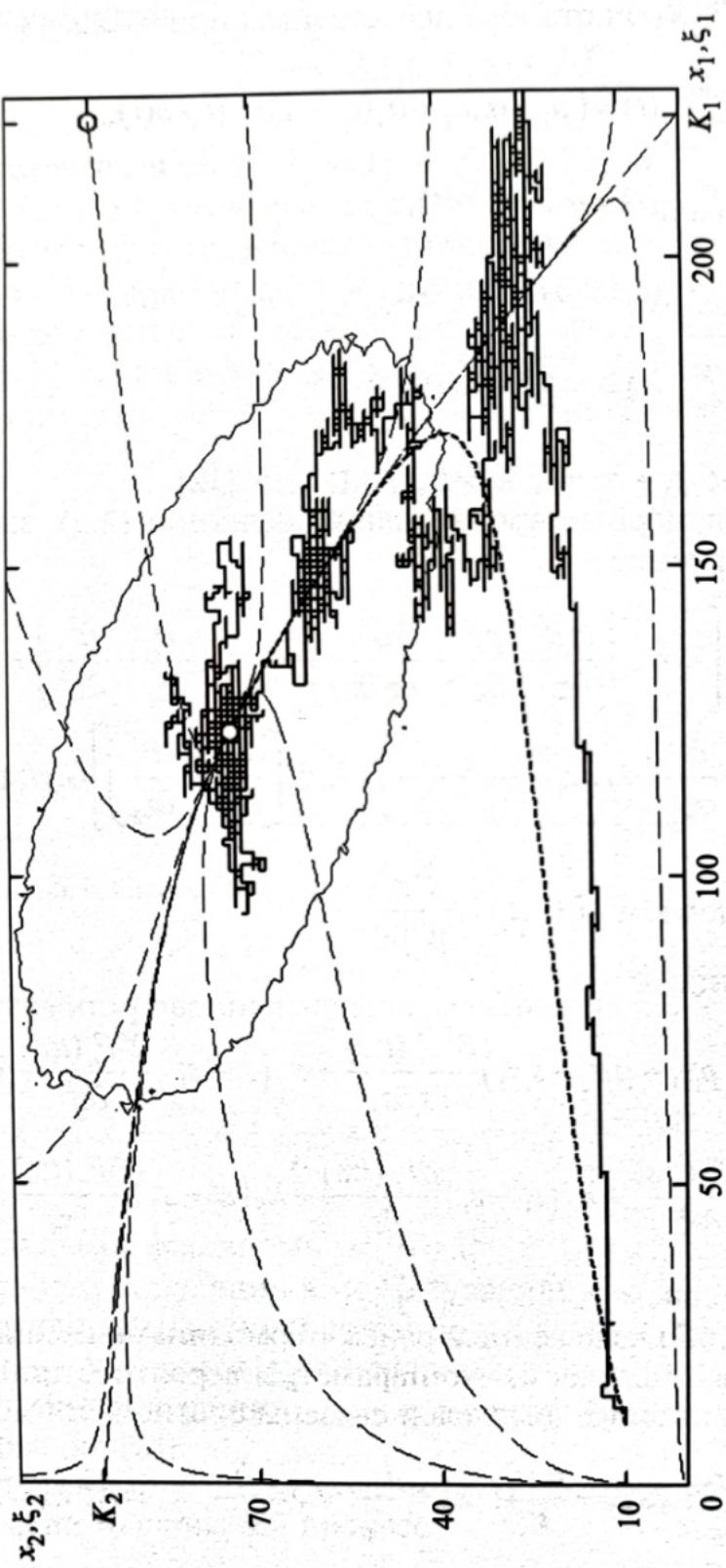


Рис. 6.2. Детерминированная $(x_1(t), x_2(t))$ (штриховая линия) и стохастическая $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ (сплошная линия) реализации на фазовой плоскости. Значения параметров: $b_1 = 0,1645$; $b_2 = 0,0552$; $K_1 = 223$; $K_2 = 96$; $\varkappa_1 = 1,35$; $\varkappa_2 = 0,18$. Число скачков процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ равно 10^4

ли (6.1), построенные при различных начальных условиях. Приведен пример реализации марковского процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ при начальном условии $(\xi_1(0), \xi_2(0)) = (10, 10)$. Можно сделать вывод, что при выбранных значениях параметров процесс совершает случайные колебания вблизи точки равновесия детерминированной модели.

6.1. Двумерная гистограмма квазистационарного распределения

Процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$ при $t \rightarrow \infty$ оказывается либо в классе состояний $L_1 = \{(1, 0), (2, 0), \dots\}$, либо в классе состояний $L_2 = \{(0, 1), (0, 2), \dots\}$. Вероятность попадания в один из замкнутых классов за время t обозначим как

$$Q_{\alpha_1 \alpha_2}(t) = \sum_{\beta=1}^{\infty} \left(P_{(\beta, 0)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) + P_{(0, \beta)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) \right), \quad \alpha_1, \alpha_2 = 1, 2, \dots$$

и введем квазистационарные вероятности [3]:

$$q_{\beta_1 \beta_2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t)}{1 - Q_{\alpha_1 \alpha_2}(t)}$$

нахождения процесса в состоянии (β_1, β_2) , $\beta_1, \beta_2 = 1, 2, \dots$, при $t \rightarrow \infty$ и условии, что процесс не попал в L_1, L_2 . Здесь имеем

$$\sum_{\beta_1, \beta_2=1}^{\infty} q_{\beta_1 \beta_2} = 1.$$

Методом статистического моделирования получены оценки квазистационарных вероятностей $\hat{q}_{\beta_1 \beta_2}$, вычисленные как отношение суммарного времени нахождения процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ в состоянии (β_1, β_2) ко всему времени моделирования, при условии что процесс не попал в L_1, L_2 . Гистограмма квазистационарного распределения, изображенная на рис. 6.3, близка к плотности двумерного нормального распределения. На рис. 6.2 показана линия уровня гистограммы.

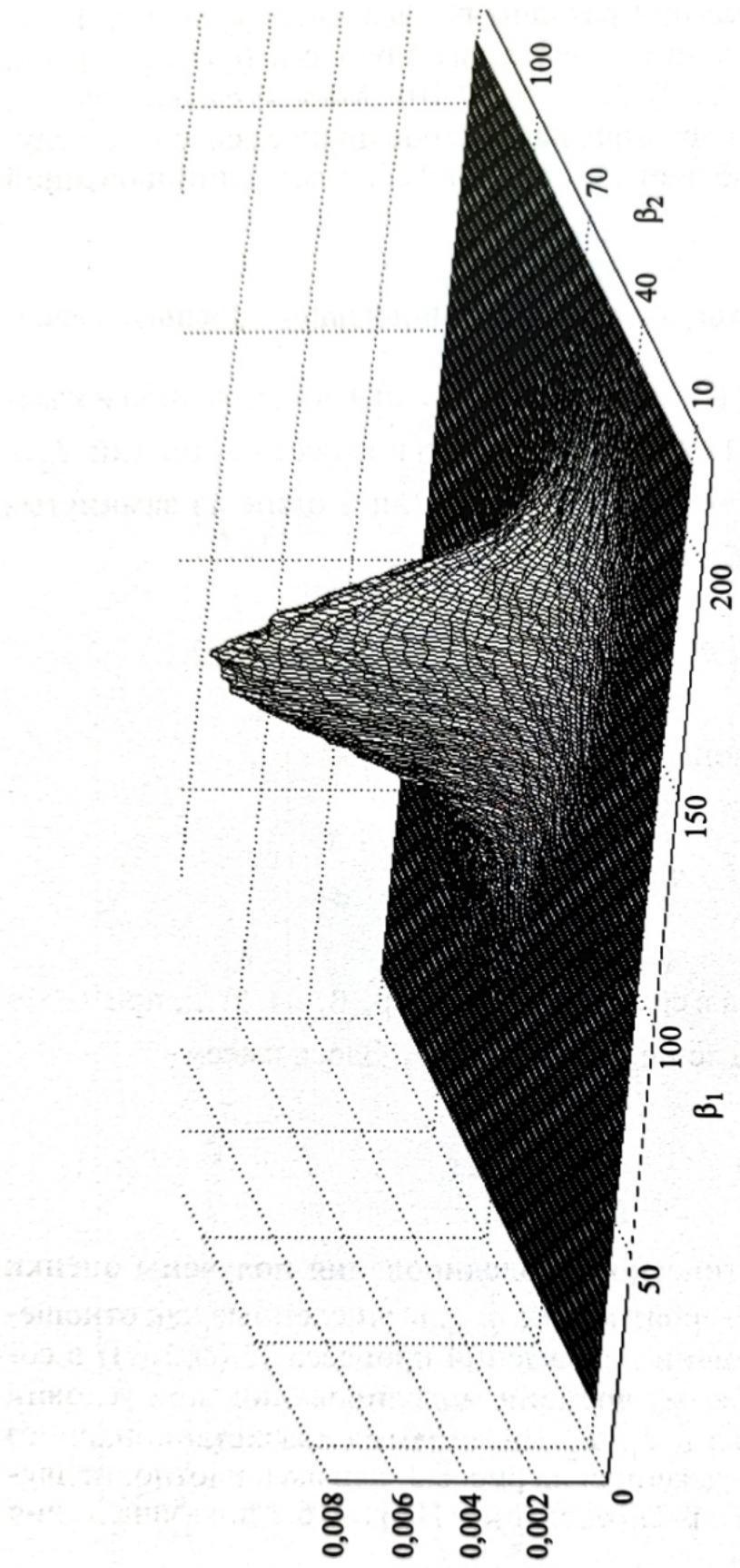


Рис. 6.3. Гистограмма квазистационарного распределения. Значения параметров: $b_1 = 0,1645$; $b_2 = 0,0552$; $K_1 = 223$; $K_2 = 96$; $\nu_1 = 1,35$; $\nu_2 = 0,18$. Число скачков процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ равно 10^7 (для гистограммы)

7. Типовой расчет

Задание 1. По схеме взаимодействий выписать первое и второе уравнения для производящих функций переходных вероятностей марковского процесса. Из второго уравнения «термодинамическим предельным переходом» (при большом числе частиц) вывести систему дифференциальных уравнений детерминированной модели кинетической схемы. Найти точки стационарности системы дифференциальных уравнений и провести анализ поведения траекторий $x_1(t), \dots, x_n(t)$ детерминированной модели. Графики траекторий детерминированной модели $x_i(t)$ в зависимости от времени t даются стандартной подпрограммой метода Рунге — Кутта.

Задание 2. Определить скачки марковского процесса рождения и гибели из состояния $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, дать их графическое представление и выписать вероятностное распределение для времени τ_α нахождения процесса в состоянии α . На этой основе в одном из программных пакетов Matlab, Maple, Mathematica составить численную модель случайного процесса $(\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$.

Графики реализаций марковского процесса $\xi_i(t)$ в зависимости от времени t строятся с использованием датчика случайных чисел. Вывести совместные графики стохастических и детерминированных траекторий на всех фазовых плоскостях x_i , используя стандартные графические подпрограммы.

Задание 3. Определить наличие иммиграции, поглощающих состояний, при $t \rightarrow \infty$ — наличие (квази)стационарного распределения, финального распределения или возможность ухода случайного процесса на бесконечность. Проанализировать и сравнить поведение стохастической и детерминированной моделей при $t \rightarrow \infty$. Визуальными наблюдениями за результатами численных экспериментов определить порядок начального состояния α , при котором стохастические реализации близки к детерминированным траекториям (если такая близость имеется).

Задание 4. Используя стандартные подпрограммы, построить одномерную (двумерную) гистограмму (квази)стационарного или финального распределения путем многократного повторения численного моделирования марковского процесса (при большом промежутке времени моделирования $t \in [0, T]$). Статистическими экспериментами исследовать изменение гистограммы в зависимости от одного из параметров (параметры интенсивности λ_i или начальное число частиц α_i — по указанию преподавателя). Воз-

можны ли значения параметров, когда гистограмма близка к плотности нормального закона, плотности показательного распределения или другому известному вероятностному распределению?

7.1. Варианты для типового расчета

1. $T_1 + T_2 \rightarrow 0, T_1, 2T_1; T_1 \rightarrow 0$, размножение нейтронов с выгоранием ядерного топлива [25].
2. $2T_1 + T_2 \rightarrow 3T_1; T_1 \rightarrow 0, 2T_2; 0 \rightarrow T_1$, брюсселятор [14, 26].
3. $T_1 + T_2 \rightarrow T_2 + T_4; T_1 \rightarrow 0; 0 \rightarrow T_1$, каталитический реактор с финальным продуктом [4].
4. $T_1 + T_2 \rightarrow T_4; T_4 \rightarrow T_3$, короткоживущее промежуточное соединение [6].
5. $T_1 \rightarrow 2T_2; 2T_2 \rightarrow T_1$, равновесная схема [27].
6. $T_1 + T_2 \rightarrow T_3 + T_4; T_3 + T_4 \rightarrow T_1 + T_2$, двусторонняя схема [27].
7. $T_1 \rightarrow 0, T_2; 2T_2 \rightarrow T_1$, два поглощающих состояния [28].
8. $T_1 + T_2 \rightarrow T_1; T_1 \rightarrow 0$, эпидемия Вейса [1, 29].
9. $T_1 + T_2 \rightarrow T_1; T_1 \rightarrow 0, 2T_1$, эпидемия Вейса с размножением переносчиков [21].
10. $T_1 + T_2 \rightarrow T_1; T_1 \rightarrow 0; 0 \rightarrow T_1, T_2$, открытая эпидемия Вейса [21].
11. $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow 0$, эпидемия Бартлетта — Мак-Кендрика [17, 18], эпидемия *SIR* [19].
12. $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow 0; 0 \rightarrow T_1, T_2$, общая эпидемия [7].
13. $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow T_3, T_2 + T_3$, замкнутая эпидемия.
14. $T_1 + T_3 \rightarrow T_1; T_2 + T_3 \rightarrow T_2; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow 0$, эпидемия Беккера [21].
15. $T_1 + T_2 \rightarrow T_1 + T_3; T_1 + T_3 \rightarrow T_1; T_1 \rightarrow 0$, эпидемия Гани [30].
16. $T_1 + T_2 \rightarrow T_1; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow T_3; 0 \rightarrow T_1$ [31].
17. $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow T_3; T_3 \rightarrow T_2$, эпидемия с приобретением иммунитета [32].
18. $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow T_2$, эпидемия *SIS* [19].
19. $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow T_2, T_3; T_3 \rightarrow T_2$, эпидемия *SIRS* [19].

20. $T_1 + T_2 \rightarrow T_1 + T_4; T_1 \rightarrow 0, T_2; T_2 \rightarrow 0; T_4 \rightarrow 0, T_1; 0 \rightarrow T_2$, эпидемия *SEIS* [19].
21. $T_1 + T_2 \rightarrow T_1 + T_4; T_1 \rightarrow 0, T_3; T_2 \rightarrow 0; T_3 \rightarrow 0; T_4 \rightarrow 0, T_1; 0 \rightarrow T_2$, эпидемия *SEIR* [19].
22. $T_1 + T_5 \rightarrow 2T_1; T_1 + T_2 \rightarrow T_2 + T_4; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow 0, T_3; T_3 \rightarrow 0, T_1; T_4 \rightarrow 0, T_2; T_5 \rightarrow 0; 0 \rightarrow T_5$, эпидемия *MSEIRS* [19].
23. $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 + T_3 \rightarrow T_1 + T_4; T_2 + T_4 \rightarrow T_1 + T_4; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow 0; 0 \rightarrow T_1, T_2$, ВИЧ-модель Н.В. Перцева.
24. $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow 2T_2$, трехпараметрическая система «хищник — жертва» [6, 7].
25. $T_1 + T_2 \rightarrow 0, 2T_1; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow 2T_2$, четырехпараметрическая система «хищник — жертва» [24, 33].
26. $T_1 + T_2 \rightarrow 0, 2T_1; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow 2T_2; 0 \rightarrow T_1$, система «хищник — жертва» с иммиграцией [24].
27. $T_1 + T_2 \rightarrow T_1; T_2 \rightarrow 2T_2; 0 \rightarrow T_1$, измененная открытая система «хищник — жертва» [21].
28. $T_1 + T_2 \rightarrow T_1, T_2; T_1 \rightarrow 2T_1; T_2 \rightarrow 2T_2$, взаимодействие двух видов [7].
29. $T_1 + T_2 \rightarrow T_2; T_1 \rightarrow 0, 2T_1; T_2 \rightarrow 0, 2T_2; 0 \rightarrow T_1, T_2$, открытая система [31].
30. $T_1 + T_2 \rightarrow T_3; T_3 \rightarrow T_2 + T_4; 0 \rightarrow T_1$, система массового обслуживания [34—36].

Литература

1. Калинкин А.В. Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием // Успехи математических наук. 2002. Т. 57. Вып. 2. С. 23–84.
2. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Директ-Медиа, 2012.
3. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.
4. Эмануэль Н.М., Кнорре Д.Г. Курс химической кинетики. М.: Высшая школа, 2004.
5. Калинкин А.В. Типовой расчет по марковским процессам рождения и гибели квадратичного типа // Тезисы докладов Всерос. конф. «Прикладная теория вероятностей и теоретическая информатика». М.: Изд-во ИПИ РАН, 2012. С. 61–63.
6. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Директ-Медиа, 2009.
7. Anderson W.J. Continuous-time markov chains: an application-oriented approach. New York: Springer, 1991.
8. Леонтович М.А. Основные уравнения кинетической теории газов с точки зрения теории случайных процессов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1935. Т. 5. Вып. 3–4. С. 211–231.
9. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. 2-е изд., испр. и доп. Новосибирск: Изд-во Новосибирского университета, 2000.
10. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.
11. Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы: учеб. для вузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.
12. Ланге А.М., Калинкин А.В. Вероятностный аналог модели конкуренции Г.Ф. Гаузе // Труды междунар. конф. «Стохастические модели в биологии и предельные алгебры». Омск: Изд-во ОГУ, 2010. С. 40–43.
13. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Изд-во «Академия», 2006.
14. Калинкин А.В., Ланге А.М., Мастихин А.В., Шапошников А.А. Численные методы Монте-Карло для моделирования схем взаимодействий при дискретных состояниях // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2005. Вып. 2(17). С. 3–74.

15. Sirl D. Limiting conditional distributions for a class of autocatalytic chemical reactions. Brisbane: University of Queensland Press, 2004.
16. Баварова Л.В., Калинкин А.В. О квазистационарном распределении марковского ветвящегося процесса со схемой взаимодействий $2T \rightarrow T; T \rightarrow 0, 2T$ // Обозрение прикладной и промышленной математики. Т. 18. Вып. 2 (2011). С. 245–246.
17. Бартлетт М.С. Введение в теорию случайных процессов. М.: Директ-Медиа, 2011.
18. Эпидемии процесс. Математическая энциклопедия. Т. 5. М.: Советская энциклопедия. 1985.
19. Epidemic model. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Epidemic_model (дата обращения 01.03.2016).
20. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. М.: Директ-Медиа, 2011.
21. Becker N.G. Interactions between species: some comparisons between deterministic and stochastic models // Rocky Mountain J. Math. 1973. Vol. 4. N. 1. P. 53–68.
22. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Либроком, 2009.
23. Первухин А.А. Сравнение стохастических и детерминированных моделей для схем взаимодействий частиц. Дипломная работа. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008.
24. Gause G.F. The Struggle for Existence. Baltimore: Williams and Wilkins, 1934. Перепечатано: Гаузе Г.Ф. Борьба за существование. Ижевск: ИКИ, 2002.
25. Чистяков В.П., Дорогов В.И. Вероятностные модели превращения частиц. М.: Наука, 1988.
26. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Директ-Медиа, 2008.
27. Dadvey I.G., Ninham B.W., Staff P.J. Stochastic models for second-order chemical reaction kinetics. The equilibrium state // J. Chem. Phys. 1966. Vol. 45. P. 2145–2155.
28. Смирнов А.В., Калинкин А.В. Вероятности вырождения марковского ветвящегося процесса со схемой взаимодействий $T_1 \rightarrow 0, T_2; 2T_2 \rightarrow T_1$ // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2016. Т. 23. Вып. 4. С. 356–357.
29. Weiss G. On the spread of epidemics by carriers // Biometrics. 1965. Vol. 21. N. 2. P. 481–490.
30. Gani J. Approaches to the modelling of AIDS // Lecture notes in biomathematics. Stochastic processes in epidemic theory. Heidelberg: 1990. Vol. 86. P. 145–154.

31. Becker N.G. A stochastic model for two interacting populations // J. Appl. Prob. 1970. Vol. 7. N. 3. P. 544–564.
32. Kendall D.G. Deterministic and stochastic epidemics in closed populations // Proc. Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1954–1955. Berkeley and Los Angeles: University of California Press, 1956. Vol. 4. P. 149–165.
33. Hitchcock S.E. Extinction probabilities in predator-prey models // J. Appl. Prob. 1986. Vol. 23. N. 1. P. 1–13.
34. Лисицина М.В. Система массового обслуживания с подвижными приборами // Студенческий научный вестник. Сб. тез. докл. студ. науч.-техн. конф. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. Т. 3. С. 129–130.
35. Сергеев А.А. Предельные теоремы для случайных процессов, характеризующих работу системы массового обслуживания с подвижными приборами // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2005. Т. 12. Вып. 3. С. 680.
36. Калинкин А.В. Схемы взаимодействий: детерминированные и стохастические модели: метод. указания к выполнению типового расчета по курсу «Дополнительные главы теории случайных процессов». М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009.

[<http://hoster.bmstu.ru/~kalinkin>]

Оглавление

Предисловие	3
1. Кинетические схемы и дискретные марковские модели.....	4
1.1. Детерминированный и стохастический подходы при моделировании схем взаимодействий	5
1.2. Марковские процессы с дискретными состояниями. Уравнения Колмогорова.....	6
1.3. Марковская модель кинетической схемы. Первое и второе уравнения в производящих функциях	7
2. Двухвершинное стационарное распределение в бистабильной системе $3T \rightarrow 2T; 2T \rightarrow 3T; T \rightarrow 0; 0 \rightarrow T$	10
2.1. Детерминированная модель и ее исследование.....	11
2.2. Гистограммы для стационарного распределения	15
3. Квазистационарное распределение для марковского ветвящегося процесса со схемой $2T \rightarrow T; T \rightarrow 0, 2T$	16
3.1. Уравнение детерминированной модели и его решение	17
3.2. Гистограмма для квазистационарного распределения	18
4. Спиралевидные реализации процесса рождения и гибели квадратичного типа $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow 0; 0 \rightarrow T_2$	20
4.1. Детерминированная модель и ее исследование. Пример реализации марковского процесса	22
5. Система «паразит – носитель» $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1 + T_2; T_2 \rightarrow 2T_2$	26
5.1. Уравнения детерминированной модели и их решение	27
5.2. Вычисление математических ожиданий в марковской модели	28
6. Вероятностный аналог модели конкуренции $T_1 + T_2 \rightarrow T_1, T_2; 2T_1 \rightarrow T_1; 2T_2 \rightarrow T_2; T_1 \rightarrow 2T_1; T_2 \rightarrow 2T_2$	32
6.1. Двумерная гистограмма квазистационарного распределения	35
7. Типовой расчет	37
7.1. Варианты для типового расчета.....	38
Литература	40

Учебное издание

Калинкин Александр Вячеславович

**Статистическое моделирование дискретных
марковских систем с взаимодействием**

Редактор *В.Г. Чуреева*

Художник *Э.Ш. Мурадова*

Корректор *Ю.Н. Морозова*

Компьютерная графика *Н.В. Таран*

Компьютерная верстка *Ю.В. Калиничевой*

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

В оформлении использованы шрифты
Студии Артемия Лебедева.

Подписано в печать 21.03.2017 Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 2,75. Тираж 100 экз. Изд. № 078-2016. Заказ 340

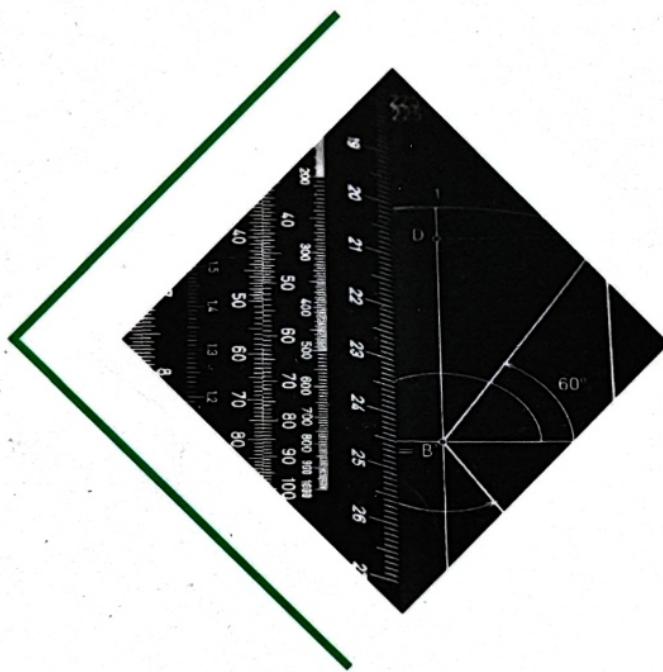
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5, стр. 1.
press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5, стр. 1.
baumanprint@gmail.com

**Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана**

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Высшая математика»

Представлены необходимые теоретические сведения и методические
указания по применению метода статистических испытаний при моделиро-
вании стохастических систем с взаимодействием при дискретном фазовом
пространстве. Приведены соответствующие примеры, даны варианты
типового расчета.



www.baumanpress.ru
ISBN 978-5-7038-4655-1



9 785 703 846 551

