Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Интегральное представление переходных вероятностей марковского процесса эпидемии Вейса и предельная теорема

Александр В. Калинкин, Антон В. Мастихин[1]

В докладе обсуждаются результаты авторов о марковских процессах эпидемии.

1 Определение марковского процесса эпидемии

На множестве состояний $N^2 = \{(\alpha_1, \alpha_2),\ \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \ldots\}$ рассматривается однородный во времени марковский процесс $(\xi_1(t), \xi_2(t))$, $t \in [0, \infty)$, с переходными вероятностями $P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\beta_1,\beta_2)}(t) = \mathbf{P}\left\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2)\right\}$. При $t \to 0+$ положим [1, 6] ($\mu > 0$)

$$P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1,\alpha_2-1)}(t) = \alpha_1\alpha_2 t + o\,(t),\ P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1-1,\alpha_2)}(t) = \mu\alpha_1 t + o\,(t),\ P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = 1 - (\alpha_1\alpha_2 + \mu\alpha_1)t + o\,(t).$$

Введем производящие функции, $(\alpha_1, \alpha_2) \in N^2$ ($|s_1| \leqslant 1,\ |s_2| \leqslant 1$),

$$F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty} P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\beta_1,\beta_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2},\ \mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1!\alpha_2!} F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2).$$

Первая (обратная) и вторая (прямая) системы дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей записываются в виде уравнений [3]

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = z_1 z_2\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_2}\right) + \mu z_1\left(\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1}\right), \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = (s_1 - s_1 s_2)\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_1 \partial s_2} + \mu(1 - s_1)\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_1}, \quad (1)$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z_1, z_2; s_1, s_2) = e^{z_1 s_1 + z_2 s_2}$.

2 Замкнутое решение уравнений Колмогорова

Введем функцию $H(x, y) = \int_0^\infty\!\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ux}) J_0(2\sqrt{vy})\, {}_0F_2(1, 1; -uv)\, du dv$ ($x > 0$, $y > 0$), где $J_0(z)$ — бесселева функция, ${}_0F_2(1, 1; z)$ — обобщенная гипергеометрическая функция.

Теорема 1. *Производящая функция переходных вероятностей равна*

$$F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \Bigg((s_1 e^{-(x+\mu)t})^{\alpha_1} (1 - e^{-y} + s_2 e^{-y})^{\alpha_2} + \int_0^\infty \Bigg(\frac{1}{2\pi i} \oint_{0+} \Big(\frac{\mu(1 - e^{-(x+\mu)t})}{u}$$
$$+ s_1 e^{-(x+\mu)t} \Big)^{\alpha_1} (1 - e^{-y-v} + s_2 e^{-y-v})^{\alpha_2} e^{(u-\mu)v} du \Bigg) dv \Bigg) H(x, y)\, dx dy. \quad (2)$$

[1] Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, кафедра высшей математики. E-mail: `kalinkin@mx.bmstu.ru, mastihin@yandex.ru`

Доказательство состоит в применении к линейным уравнениям в частных производных второго порядка (1) метода разделения переменных и суммировании полученного ряда [4].

Важен случай, когда в процессе эпидемии при $t = 0$ число α_1 инфицированных особей мало, а число α_2 восприимчивых особей велико. Метод характеристических функций [2] при интегральном представлении (2) для производящей функции случайного числа особей сводится, в силу биномиального характера выражения, к простому применению второго замечательного предела, и дает «пороговую» предельную теорему ([4], ср. [5]; [6]).

Теорема 2. *При фиксированном* $t > 0$ $\lim_{\alpha_2\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_2(t)/\alpha_2 \leqslant x\} = F_{\alpha_1}(t;x)$, *где* $F_{\alpha_1}(t;x)$ — *функция распределения, характеристическая функция для которого равна* $(\alpha_1 = 1, 2, \ldots)$

$$\varphi_{\alpha_1}(t;\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dF_{\alpha_1}(t;x) = e^{-\alpha_1\mu t} e^{i\lambda e^{-\alpha_1 t}}$$
$$+ \sum_{k=1}^{\alpha_1} C_{\alpha_1}^k \frac{\mu^k}{(k-1)!} \sum_{l=0}^{k} C_k^l (-1)^l \int_0^{e^{-(\alpha_1-k+l)t}} e^{i\lambda x} x^{\mu-1} (-\ln x - (\alpha_1 - k + l)t)^{k-1}\, dx. \tag{3}$$

Из (3) находится явное выражение для функции распределения

$$F_{\alpha_1}(t;x) = \begin{cases} 0, & x < e^{-\alpha_1 t}; \\ e^{-\alpha_1\mu t} + \int_{e^{-\alpha_1 t}}^{x} f_{\alpha_1}(t;y)\, dy, & e^{-\alpha_1 t} \leqslant x < 1; \\ 1, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

где кусочно-непрерывная функция $f_{\alpha_1}(t;x)$ задана на каждом из интервалов $(e^{-(\alpha_1-n)t}, e^{-(\alpha_1-n-1)t})$, $n = 0, \ldots, \alpha_1 - 1$, равенством

$$f_{\alpha_1}(t;x) = x^{\mu-1} \sum_{k=n+1}^{\alpha_1} C_{\alpha_1}^k \frac{\mu^k}{(k-1)!} \sum_{l=0}^{k-n-1} C_k^l (-1)^l (-\ln x - (\alpha_1 - k + l)t)^{k-1}.$$

$$F_1(t;x) = \begin{cases} 0, & x < e^{-t}; \\ x^\mu, & e^{-t} \leqslant x < 1; \\ 1, & x \geqslant 1, \end{cases} \quad F_2(t;x) = \begin{cases} 0, & x < e^{-2t}; \\ x^\mu(1 + \mu\ln x + 2\mu t), & e^{-2t} \leqslant x < e^{-t}; \\ x^\mu(1 - \mu\ln x), & e^{-t} \leqslant x < 1; \\ 1, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

Список литературы

[1] *Weiss G.* On the spread of epidemics by carries. Biometrics, 1965, v. 21, N 2, p. 481–490.

[2] *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. Изд. 5-е. М.: Наука, 1969. — 400 с.

[3] *Калинкин А.В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. Успехи математических наук, 2002, т. 57, N 2, с. 23–84.

[4] *Калинкин А.В., Мастихин А.В.* Марковский процесс эпидемии Вейса и ветвящиеся процессы. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия "Естественные науки". 2006, N 2(21), с. 3–17.

[5] *Мастихин А.В.* Финальные вероятности марковского процесса эпидемии Беккера. Теория вероятностей и ее применения, 2011, т. 56, N 3, с. 606–614.

[6] *Крючкова Е.В.* Модель развития эпидемии, учитывающая иммунный порог индивидуумов. Конференция "Ломоносов 2012". Секция "Математика и механика". М.: МГУ, 2012.