

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА



А.В. Калинкин, А.В. Неклюдов

МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ



Издательство
БАУМАНПРЕСС
МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

УДК 517.95
ББК 22.161
К17

Издание доступно в электронном виде по адресу
<https://bmstu.press/catalog/itep/729/>

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Высшая математика»

*Рекомендовано Научно-методическим советом
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебно-методического пособия*

К17

Калинкин, А. В.
Метод разделения переменных для уравнений гиперболического и параболического типов : учебно-методическое пособие /
А. В. Калинкин, А. В. Неклодов. — Москва : Издательство
МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2021. — 50, [2] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-5730-4

Представлены необходимые теоретические сведения и методические указания к решению линейных уравнений в частных производных гиперболического и параболического типов. Приведены соответствующие примеры, даны условия вариантов типового расчета.

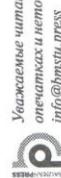
Для студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана, изучающих дисциплину «Уравнения математической физики».

УДК 517.95
ББК 22.161

Методические указания соответствуют разделу курса «Уравнения математической физики», в котором рассматриваются темы, связанные с теорией колебаний и теорией теплопроводности и имеющие многие приложения в технических дисциплинах. Курс определяется программами подготовки специалистов по специальному «Прикладной механике», «Наземные транспортно-технологические средства» и «Подземно-транспортные, строительные и дорожные средства и оборудование» факультета «Робототехника и комплексная автоматизация».

Цель методических указаний — способствовать достижению студентами и аспирантами ряда компетенций, необходимых для расчета и исследования показателей технических систем, подверженных различным колебаниям и процессы переноса тепла.

Критериями достижения указанной цели являются усвоение учащимися определяемых в данном курсе базовых понятий теории уравнений математической физики [1, 8, 10] и решение предлагаемых в пособии задач типового расчета как аналитическими методами, так и с применением вычислительных компьютерных технологий.



Уважаемые читатели! Пожалуйста, предложите, а также сообщите о замечаниях
ошибках и неточностях. Издательство Издательство
info@bmstu.press

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021
© Оформление. Издательство
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021

ISBN 978-5-7038-5730-4

Задано начальное положение струны в момент времени $t = 0$:

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, l],$$

и заданы начальные скорости точек струны в момент времени $t = 0$:

$$\frac{\partial u(0; x)}{\partial t} = \psi(x), \quad x \in [0, l].$$

Левый и правый концы струны двигаются по заданным законам

$$u(t; 0) = \varkappa_1(t), \quad u(t; l) = \varkappa_2(t), \quad t \in [0, \infty).$$

Функция $f(t; x)$ интерпретируется как плотность внешней силы, действующей на струну в момент времени t в точке с координатой x .

Далее для функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varkappa_1(t)$, $\varkappa_2(t)$, $f(t; x)$ предполагается выполнимыми условия, при которых решение смешанной задачи (1.1) существует и единственно, т. е. функции имеют необходимое число непрерывных производных. Считаем, что постоянные ряды Фурье для функции $u(t; x)$ сходятся. Отметим также, что в ряде случаев такие ряды сходятся и представляют собой решение задачи (1.1), если указанные выше функции или их производные имеют точки разрыва первого рода [4, 6, 10]. Например, если начальное положение струны имеет угловую форму [2].

Излагаемый метод разделения переменных применим к другим постановкам задач о колебаниях, например к неоднородной струне или колебаниям струны в среде с сопротивлением (трением) [2, 10]. Метод используется для линейных уравнений в частных производных высших порядков, например в [7] рассматривается неоднородное уравнение четвертого порядка.

В литературе описаны способы решения задач о колебаниях в виде рядов Фурье к различным техническим вопросам [1, 8]. Численные способы приближенных расчетов на ЭВМ колебательных систем также опираются на классические методы решения уравнений математической физики [3].

1. Метод разделения переменных для уравнений гиперболического типа

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения колебаний струны:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t; x), \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \\ u|_{x=0} = \varkappa_1(t), \\ u|_{x=l} = \varkappa_2(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

Для уравнения в частных производных гиперболического типа $u(t; x)$ — искомая функция, t и x — независимые переменные, $t \in [0, \infty)$ — время, $x \in [0, l]$ — координата точки. Линейное уравнение второго порядка (1.1) называется неоднородным, если $f(t; x) \neq 0$, и однородным в противном случае. Условия $u(0; x) = \varphi(x)$, $u_t(0; x) = \psi(x)$ называются начальными условиями, условия $u(t; 0) = \varkappa_1(t)$, $u(t; l) = \varkappa_2(t)$ — граничными (краевыми) условиями.

Уравнение (1.1) называют уравнением малых поперечных колебаний струны длины l . Струна предполагается бесконечно тонкой. Уравнение (1.1) выводится из закона Гука, линейно связывающего малые расстояния и силу сопротивления растяжению [1, 8].

$a(t; x)$ — величина отклонения точки x струны от нулевого положения в момент времени t . $a^2 = a^2(x) > 0$ — функция, характеризующая свойства струны в точке с координатой (далее всегда a^2 — константа, т. е. струна однородная). Уравнение (1.1) описывает также малые продольные колебания упругого однородного стержня.

1.1. Свободные колебания закрепленной струны

Задача сводится к решению уравнения

$$(1.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=l} = 0, \end{cases}$$

т. е. при нулевых граничных условиях $u(t; 0) = 0$, $u(t; l) = 0$. Предположим, что выполнены условия согласования начальных и граничных условий $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l) = 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(l) = 0$, $\varphi''(0) = 0$.

Эти равенства для функций φ , ψ , ψ'' выражают совпадение значений координат концов струны, их скоростей и ускорений, определяемых с точностью до множителя C_2 . Далее каждому λ_k соответствует функция $T_k(t)$, определяемая как решение уравнения $T''(t) + a^2 \lambda_k T(t) = 0$. Общее решение имеется вид

$$u(t; x) = T_k(t)X_k(x).$$

После подстановки последнего выражения в уравнение (1.2) получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda,$$

где λ — константа, так как левая часть равенства зависит только от x , а правая — только от t . Следовательно, функции $X(x)$ и $T(t)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \\ T''(t) + a^2 \lambda T(t) &= 0. \end{aligned}$$

Границные условия дают

$$\begin{aligned} u(t; 0) &= T(t)X(0) = 0, \\ u(t; l) &= T(t)X(l) = 0, \end{aligned}$$

и так как ищутся решения, не равные тождественно нулю, то

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Получили простейшую задачу о собственных значениях (задача Штурма—Лиувилля): найти решения уравнения $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, удовлетворяющие краевым условиям $X(0) = 0$, $X(l) = 0$. Общее решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами строится методом характеристического уравнения [6]. При $\lambda \leq 0$ получаем $X(x) \equiv 0$. При $\lambda > 0$ имеем

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x,$$

где C_1 , C_2 — произвольные константы и, используя нулевые граничные условия, получим, что нетривиальное решение уравнения имеется при $\lambda_k = (k\pi/l)^2$, $k = 1, 2, \dots$. Этим собственным значениям соответствуют собственные функции $X_k(t) = \sin(k\pi x/l)$, определяемые с точностью до множителя C_2 .

Далее каждому λ_k соответствует функция $T_k(t)$, определяемая как решение уравнения $T''(t) + a^2 \lambda_k T(t) = 0$. Общее решение имеется вид

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{ak\pi t}{l} + b_k \sin \frac{ak\pi t}{l},$$

где a_k , b_k — произвольные константы. Таким образом, функции

$$u_k(t; x) = T_k(t)X_k(x) = \left(a_k \cos \frac{k\pi t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi t}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

удовлетворяют уравнению (1.2) и нулевым граничным условиям. В силу линейности и однородности уравнения (1.2) сумма решений ряд

$$u(t; x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi t}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (1.3)$$

также удовлетворяет уравнению (1.2) при условии возможности инфинитного полулинейного дифференцирования ряда (1.3) по t и по x , и также нулевым граничным условиям.

Найдем частное решение, т. е. определим константы a_k и b_k так, чтобы ряд (1.3) удовлетворил начальным условиям. Подставим в уравнение (1.3) и производную по t выражения (1.3) значение $t = 0$, тогда

$$u(0; x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} = \psi(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{k\pi a}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} = \psi'(x).$$

Последние формулы представляют собой разложение функций $\psi(x)$ и $\psi'(x)$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0, l]$. Коэффициенты разложения вычисляются по известным формулам [4–6]:

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \psi'(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

После постановки найденных значений в ряд (1.3) получаем решение поставленной задачи (1.2).

В физических приложениях найденный набор значений $\lambda_k = (k\pi/l)^2$, $k = 1, 2, \dots$, называется дискретным спектром, а функции $X_k(t) = \sin(k\pi x/l)$, $k = 1, 2, \dots$ — гармониками. При соответствующем функционировании соотвествующих технических объектов возбуждают низкие гармоники, когда k принимает начальные значения, и высокие гармоники, когда k велико. В зависимости от конкретных условий функции низкие или высокие гармоники могут привести к разрушению объекта [1, 7, 8]. В частности, раскачивание в приложении явления резонанса, когда объект разрушается при близости частоты вынуждающих внешних колебаний к собственной внутренней частоте, также интерпретируется в рамках получаемых рядов Фурье [1, 2, 9].

Пример 1. Решить задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(t; x), \\ v|_{t=0} = \phi(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \\ v|_{x=0} = 0, \\ v|_{x=\pi} = 0, \\ v|_{x=\pi} = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Решение. Формула общего решения (1.3) получает вид

$$u(t; x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \sin kx.$$

Подставляя $t = 0$, из начального условия получаем равенство

$$u(0; x) = 3 \sin 2x + 5 \sin 4x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx.$$

Очевидно видеть, что $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, $a_4 = 5$ и $a_k = 0$ при $k = 5, 6, \dots$. Вычисляем пронизодную

$$u'(t; x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k k \sin kt + b_k k \cos kt) \sin kx.$$

Подставляя $t = 0$, из начального условия получаем $u'(0; x) = 0 =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k k \sin kx,$$

Очевидно, что $b_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Частное решение имеет вид

$$u(t; x) = a_2 \cos 2t \sin 2x + a_4 \cos 4t \sin 4x =$$

$$= 3 \cos 2t \sin 2x + 5 \cos 4t \sin 4x.$$

Полученное решение имеет интерпретацию, наблюдаемую в реальности: стоячая волна сложной формы с неподвижными узлами $x = 0$, $x = \pi/2$, $x = \pi$. Струна совершают незатухающие колебания, так как в исходное уравнение не заложено сопротивление вещественной среды [2].

1.2. Вынужденные колебания закрепленной струны

Задача ставится следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(t; x), \\ v|_{t=0} = \phi(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \\ v|_{x=0} = 0, \\ v|_{x=\pi} = 0, \\ v|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

Ищем решение в виде суммы двух функций

$$v(t; x) = v_{\text{одн}}(t; x) + v_{\text{неодн}}(t; x).$$

Подставив это выражение в уравнение (1.4), разбиваем исходную задачу на две подзадачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ v|_{t=0} = \varphi(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \\ v|_{x=0} = 0, \\ v|_{x=l} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(t; x), \\ v|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = 0, \\ v|_{x=0} = 0, \\ v|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

Первая задача решена в п. 1.1.

Решение второй задачи о вынужденных колебаниях струны ищем в виде ряда по собственным функциям задачи о свободных колебаниях.

Разложим $f(t; x)$ на отрезке $[0, l]$ в ряд по синусам по аргументу x :

$$f(t; x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

где

10

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(t; x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Подставляя формулы (1.6) и (1.7) в уравнение (1.5), имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) \sin \frac{k\pi x}{l} = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi a}{l} \right)^2 T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Приравнивая коэффициенты при функциях $\sin(k\pi x/l)$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$T_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l} \right)^2 T_k(t) = f_k(t), \quad k = 1, 2, \dots$$

с начальными условиями $T_k(0) = 0, T'_k(0) = 0$.

Решение линейного неоднородного уравнения можно найти с помощью теоремы о структуре решения [6] в виде

$$\begin{aligned} T_k(t) &= T_k^{\text{одн}}(t) + T_k^{\text{неодн}}(t) = \\ &= C_1 \cos \frac{k\pi a}{l} t + C_2 \sin \frac{k\pi a}{l} t + T_k^{\text{неодн}}(t), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где константы C_1 и C_2 определяются из начальных условий. Другим способом, пользуясь методом вариации произвольных параметров [6], решение можно получить в виде

$$v_{\text{неодн}}(t; x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

где $T_k(t), k = 1, 2, \dots$ — функции, подлежащие определению.

При полустановки выражений для функций $T_k(t)$ в ряд (1.6) получим решение второй задачи (1.5).

Пример 2. Решить линейное неоднородное уравнение с нулевыми начальными и граничными условиями

11

1.3. Колебания струны с подвижными концами

Рассмотрим общую первую краевую задачу для уравнения колебаний струны:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(t; x), \\ v|_{x=0} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = 0, \\ v|_{x=\pi} = 0, \\ v|_{x=\pi} = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Решение. Следуя методу разделения переменных, ищем решение

$$v(t; x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin kx,$$

где $T_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$ — некоторые функции. Подставляя последнее выражение в уравнение, получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) \sin kx = - \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) k^2 \sin kx + 5 \sin 3x.$$

Равенство выполнено, если равны коэффициенты при всех $\sin kx$, $k = 1, 2, \dots$, следовательно

$$T_3'' + 9T_3(t) = 5$$

с начальными условиями $T_3(0) = 0$, $T_3'(0) = 0$ и

$$T_k(t) + k^2 T_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, 4, 5, \dots$$

с начальными условиями $T_k(0) = 0$, $T_k'(0) = 0$. Решения второго уравнения очевидны $T_k(t) = 0$ при $k = 1, 2, 4, 5, \dots$

Решение первого дифференциального уравнения находим по формуле метода вариации постоянных:

$$T_3(t) = \frac{1}{3} \int_0^t 5 \sin 3(t-\tau) d\tau = \frac{5}{9} \cos 3(t-\tau)|_0^t = \frac{5}{9} (1 - \cos 3t).$$

Решение имеет вид

$$v(t; x) = T_3(t) \sin 3x = \frac{5}{9} (1 - \cos 3t) \sin 3x.$$

Полученное решение интерпретируется как три стоячие полуволны при узлах $x = 0$, $x = \pi/3$, $x = 2\pi/3$, $x = \pi$.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = 0; \\ u|_{x=\pi} = \pi \sin \omega t, \end{cases}$$

где $\omega > 0$.

Решение. Вычисляем вспомогательную функцию

$$w(t; x) = \varkappa_1(t) + \frac{x}{t} (\varkappa_2(t) - \varkappa_1(t)) = 0 + \frac{x}{\pi} (\pi \sin \omega t - 0) = x \sin \omega t$$

и делаем замену неизвестной функции

$$u = v + w = v + x \sin \omega t.$$

Подставим $v + x \sin \omega t$ вместо u в условия задачи, получаем

$$\begin{aligned} (v + x \sin \omega t)''_t &= (v + x \sin \omega t)''_{xx}, & v''_t &= v''_{xx} + x \omega^2 \sin \omega t, \\ v|_{t=0} &= (u - x \sin \omega t)|_{t=0} = u|_{t=0} - x \sin \omega t|_{t=0} = 0 - 0 = 0, \\ v'_t|_{t=0} &= (u - x \sin \omega t)'|_{t=0} = u'_t|_{t=0} - x \omega \cos \omega t|_{t=0} = 0 - x \omega = -x \omega, \\ v|_{x=0} &= (u - x \sin \omega t)|_{x=0} = u|_{x=0} - x \sin \omega t|_{x=0} = 0 - 0 = 0, \\ v|_{x=\pi} &= (u - x \sin \omega t)|_{x=\pi} = u|_{x=\pi} - x \sin \omega t|_{x=\pi} = \pi \sin \omega t - \pi \sin \omega t = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, переходим к задаче для функции $v(t; x)$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \omega^2 x \sin \omega t, \\ v|_{t=0} = 0; \\ \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = -x \omega; \\ v|_{x=0} = 0; \\ v|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

Для первой задачи используем ряд Фурье общего решения:

$$v_{\text{общ}}(t; x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \sin kx.$$

Приставив $t = 0$, из начального условия получаем равенство

$$v(0; x) = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx,$$

или $v(0; x) = 0$ для всех $a_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Вычисляем производную

$$v'_t(t; x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k \sin kt + b_k k \cos kt) \sin kx.$$

Подставляя $t = 0$, из начального условия получаем

$$v'_t(0; x) = -x \omega = \sum_{k=1}^{\infty} b_k k \sin kx.$$

Следя изложенному в п. 1.2, вводим сумму $v(t; x) = v_{\text{общ}}(t; x) + v_{\text{общ}}(t; x)$ и переходим к двум подзадачам

$$kb_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (-\omega x) \sin kx dx = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^\pi x d \frac{\cos kx}{k} =$$

$$= \frac{2\omega}{\pi} \left(x \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^\pi - \frac{1}{k} \int_0^\pi \cos kx dx \right) =$$

$$= \frac{2\omega}{\pi} \left(\frac{\pi}{k} (-1)^k - \frac{1}{k^2} \sin kx \Big|_0^\pi \right) = \frac{2\omega}{k} (-1)^k.$$

Решение первой задачи имеет вид

$$v_{\text{одн}}(t; x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2\omega}{k^2} \sin kt \sin kx.$$

Решение второй задачи ищем в виде

$$v_{\text{неодн}}(t; x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin kx, \quad (1.9)$$

где функции $T_k(t)$, $k=1, 2, \dots$, подлежат определению. Подставляя этот ряд в уравнение, получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) \sin kx = - \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) k^2 \sin kx + \omega^2 x \sin kx. \quad (1.10)$$

Разложим последнее слагаемое в ряд по синусам на отрезке $[0, \pi]$:

$$\omega^2 x \sin \omega t = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin kx, \quad (1.11)$$

вычислим коэффициенты

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \omega^2 x \sin \omega t \sin kx dx = \\ &= \frac{2\omega^2 \sin \omega t}{\pi} \int_0^\pi x \sin kx dx = \frac{2\omega^2 \sin \omega t}{k} (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Подставляя выражение (1.11) в равенство (1.10) и приравнивая затем коэффициенты при функциях $\sin kx$, получим дифференциальные уравнения

$$T_k''(t) + k^2 T_k(t) = \frac{(-1)^{k+1} 2\omega^2}{k} \sin \omega t, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

с начальными условиями $T_k(0) = 0$, $T_k'(0) = 0$.

Решение уравнения второго порядка ищем, следуя теореме о структуре решения линейного неоднородного уравнения [6] в виде

$$T_k(t) = T_k^{\text{одн}}(t) + T_k^{\text{неодн}}(t).$$

Следимо $T_k^{\text{одн}}(t)$ является решением соответствующего однородного уравнения

$$T_k''(t) + k^2 T_k(t) = 0$$

и имеет вид

$$T_k^{\text{одн}}(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

где C_1 , C_2 — произвольные константы.

Функцию $T_k^{\text{неодн}}(t)$ ищем методом неопределенных коэффициентов [6] предполагаем, что $\omega \neq n$, n — целое положительное число в виде

$$T_k^{\text{неодн}}(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Для определения констант A и B подставляем последнее выражение в неоднородное уравнение (1.12), тогда

$$= A\omega^2 \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t + k^2 A \cos \omega t + k^2 B \sin \omega t = \frac{(-1)^{k+1} 2\omega^2}{k} \sin \omega t.$$

Приравнивая коэффициенты при косинусах и синусах, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} -A\omega^2 + k^2 A &= 0, \\ -\omega^2 B + k^2 B - \frac{(-1)^{k+1} 2\omega^2}{k} &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно

$$A = 0, \quad B = \frac{(-1)^{k+1} 2\omega^2}{k(k^2 - \omega^2)}$$

и, соответственно

$$T_k^{\text{некон}}(t) = \frac{(-1)^{k+1} 2\omega^2}{k(k^2 - \omega^2)} \sin \omega t.$$

Общее решение уравнения (1.12) имеет вид

$$T_k(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{(-1)^{k+1} 2\omega^2}{k(k^2 - \omega^2)} \sin \omega t.$$

Частное решение уравнения (1.12) определяется подстановкой в последнее выражение и производную от него нулевых начальных условий. В результате получаем систему уравнений для констант

$$0 = C_1,$$

$$0 = C_2 + \frac{(-1)^{k+1} 2\omega^3}{k(k^2 - \omega^2)}.$$

Следовательно, $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{(-1)^{k+1} 2\omega^3}{k(k^2 - \omega^2)}$, и имеем частное решение

$$T_k(t) = -\frac{(-1)^{k+1} 2\omega^3}{k^2(k^2 - \omega^2)} \sin kt + \frac{(-1)^{k+1} 2\omega^2}{k(k^2 - \omega^2)} \sin \omega t.$$

Вторая задача, по формуле (1.9), получила решение

$$v_{\text{некон}}(t; x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{(-1)^{k+1} 2\omega^3}{k^2(k^2 - \omega^2)} \sin kt + \frac{(-1)^{k+1} 2\omega^2}{k(k^2 - \omega^2)} \sin \omega t \right) \sin kx.$$

Для задачи из примера 3 решением является сумма

$$\begin{aligned} u(t; x) &= w(t; x) + v_{\text{онн}}(t; x) + v_{\text{некон}}(t; x) = \\ &= x \sin \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2\omega}{k^2} \sin kt \sin kx + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{(-1)^{k+1} 2\omega^3}{k^2(k^2 - \omega^2)} \sin kt + \frac{(-1)^{k+1} 2\omega^2}{k(k^2 - \omega^2)} \sin \omega t \right) \sin kx. \end{aligned}$$

Последняя формула показывает, что если частота ω возмущающего движения правого конца струны приближается к одной из частот k ($k = 1, 2, \dots$) собственных колебаний струны, то в результате появляется слагаемое с большой амплитудой, вследствие чего возникает явление резонанса [1, 7, 8]. Тогда формула теряет смысл и заменяется другой.

При построении решения задачи в случае резонанса, когда $\omega = n$ (n — целое положительное число), коэффициенты $f_i(t)$ будут другие и, соответственно, решения уравнений для функций $T_i(t)$. Используя метод стационарных неоднородностей, примененный к аналогам выше

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = a^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + f(x), \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = A, \\ u|_{x=0} = A, \\ u|_{x=l} = B, \end{cases}$$

где A и B — константы.

Запишем обыкновенное дифференциальное уравнение с граничными условиями (так называемое стационарное уравнение [1, 8])

$$\begin{cases} a^2 \ddot{u}'' + f(x) = 0, \\ \ddot{u}(0) = A, \\ \ddot{u}(l) = B. \end{cases}$$

Преобразуем уравнение (1.13), введя новую неизвестную функцию $v(t; x)$ через сумму

$$u(t; x) = v(t; x) + \tilde{u}(x),$$

то $\ddot{u}(x)$ — решение задачи (1.14). Подставив выражение $v + \tilde{u}(x)$ в уравнение и условия (1.13) вместо u , получаем краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - \tilde{u}(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \\ v|_{x=0} = 0, \\ v|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

Метод решения такой задачи изложен в п. 1.1.

Вопросы и задания для самоконтроля

- Выпишите уравнение колебаний с течением времени $t \in [0, \infty)$ плоской однородной пластины $(x, y) \in D$, где D — конечная область, $D \subset \mathbb{R}^2$. Границы пластины закреплены. Рассмотрите случай отсутствия действия внешней силы на пластину и случай воздействия внешней силы $f(x, y)$.
- Выпишите уравнение колебаний с течением времени $t \in [0, \infty)$ объемного однородного тела $(x, y, z) \in V$, где V — конечная область, $V \subset \mathbb{R}^3$. Границы тела закреплены. Рассмотрите случай отсутствия действия внешней силы на тело и воздействия внешней силы $f(x, y, z)$.
- Применим метод разделения переменных к указанным выше уравнениям в частных производных?
- Выпишите пример уравнения в частных производных, к которому не применим метод разделения переменных.

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t; x), \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u|_{x=0} = \varkappa_1(t), \\ u|_{x=l} = \varkappa_2(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

Для уравнения в частных производных параболического типа $u(t; x)$ — искомая функция, t и x — независимые переменные, $t \in [0, \infty)$ — время, $x \in [0, l]$ — координата точки. Линейное уравнение второго порядка (2.1) называется неоднородным, если $f(t; x) \not\equiv 0$, и однородным в противном случае. Условие $u(0; x) = \varphi(x)$ называют начальным условием, условия $u(0; 0) = \varkappa_1(l)$, $u(t; l) = \varkappa_2(l)$ — граничными (краевыми) условиями.

Уравнение (2.1) называет распространением тепла по стержню длины l с теплонизолированной поверхностью, температура которой постоянна на любом сечении, перпендикулярным плоскости стержня (обычно эти условия предполагаются выполнеными из условия теплопереноса). Уравнение (2.1) выводится из закона теплопереноса: количество переданного тепла для соприкасающихся тел за единицу времени линейно пропорционально разности температур этих тел [1, 8]. Здесь $u(t; x)$, $x \in [0, l]$ — распределение тепла в стержне в момент времени t ; $a^2 = a^2(x) > 0$ — функция, характеризующая свойства теплопроводности стержня в точке с координатой x , далее всегда a^2 — константа, т. е. стержень однородный. Изначально начальное распределение тепла в момент времени $t = 0$

$$u(0; x) = \varphi(x), \quad x \in [0, l].$$

На левом и правом концах стержня в момент времени t поддерживается заданные температуры

$$u(t; 0) = \varphi_1(t), \quad u(t; l) = \varphi_2(t), \quad t \in [0, \infty).$$

Выполнены условия согласования, если выполнены равенства

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(0), \quad \varphi_1(l) = \varphi_2(0).$$

Функция $f(t; x)$ интерпретируется как плотность теплоисточника в момент времени t в точке стержня с координатой x .

Далее предполагаются выполненные для функций $\varphi(x)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $f(t; x)$ условия, при которых решение смешанной задачи (2.1) существует и единствено, т. е. функции имеют необходимое число непрерывных производных.

Излагаемый метод разделяния переменных применим к другим постановкам задач о теплопереносе в тонком стержне, например, к неоднородному стержню, а также к задаче с поступлением через границы $x = 0$ и $x = l$, заданным тепловых потоков или к задаче с конвективным теплообменом с внешней средой через боковую поверхность стержня [2]. Способы применения решений задач о теплопроводности в виде рядов Фурье к различным техническим вопросам описаны в литературе [1, 8].

2.1. Задача теплопроводности при отсутствии источников и нулевых граничных условиях

Рассмотрим первую простейшую краевую задачу, которая состоит в отыскании решения уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=l} = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

т. е. при нулевых граничных условиях $u(t; 0) = 0$, $u(t; l) = 0$.

Ищем частные решения уравнения (2.2), удовлетворяющие граничным условиям, в виде с разделенными переменными

$$u(t; x) = T(t)X(x).$$

После подстановки последнего выражения в уравнение (2.2) получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda,$$

где λ — константа, т. е. функции $X(x)$ и $T(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \\ T''(t) + a^2 \lambda T(t) &= 0. \end{aligned}$$

При этом $X(0) = 0$, $X(l) = 0$.

Данная о собственных значениях, найти решения уравнения $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, удовлетворяющие краевым условиям $X(0) = 0$, $X(l) = 0$ — имеет искушение решение только при $\lambda > 0$ (см. подраздел 1.1). Собственным значениям $\lambda_k = (k\pi/l)^2$, $k = 1, 2, \dots$, соответствуют собственные функции $X_k(x) = \sin(k\pi x/l)$, определяемые с точностью до произвольного множителя.

Далее каждому λ_k соответствует функция $T_k(t)$, определяемая как решение уравнения $T''(t) + a^2 \lambda_k T(t) = 0$. Общее решение имеет вид

$$T_k(t) = a_k e^{-a^2 \lambda_k t} = a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t},$$

где a_k — произвольная константа. Функции

$$u_k(t; x) = T_k(t)X_k(x) = a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

и их сумма

$$u(t; x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (2.3)$$

удовлетворяют уравнению (2.2) при условии возможности почлененного дифференцирования ряда (2.3) по t и дважды по x , а также нулем гранитным условиям.

Найдем частное решение, т. е. определим a_k так, чтобы ряд (2.3) удовлетворял начальным условиям. Подставим в формулу (2.3) значение $t = 0$, тогда

$$u(0; x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} = \varphi(x).$$

Коэффициенты разложения функции по синусам на $[0, l]$ вычисляются по формуле теории рядов Фурье [5, 6]

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

После постановки найденных значений в ряд (2.3), получаем решение исходной задачи (2.2).

Пример 4. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = 4 \cos x, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

Формула общего решения (2.3) получает вид

$$u(t; x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 t} \sin kx.$$

Подставляя $t = 0$, из начального условия получаем равенство

$$u(0; x) = 4 \cos x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx.$$

Вычисляем значения коэффициентов

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 4 \cos x \sin x dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x dx = -\frac{2}{\pi} \cos 2x \Big|_0^{\pi} = 0, \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 4 \cos x \sin kx dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(k+1)x + \sin(k-1)x) dx = \\ &= \left(-\frac{4}{\pi} \frac{\cos(k+1)x}{k+1} - \frac{4}{\pi} \frac{\cos(k-1)x}{k-1} \right) \Big|_0^{\pi} = \\ &= -\frac{4}{\pi(k+1)} (\cos(k+1)\pi - 1) - \frac{4}{\pi(k-1)} (\cos(k-1)\pi - 1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{\pi(k+1)} ((-1)^{k+1} - 1) - \frac{4}{\pi(k-1)} ((-1)^{k-1} - 1) = \\ &= -\frac{8k}{\pi(k^2 - 1)} ((-1)^{k+1} - 1), \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Частное решение имеет вид

$$\begin{aligned} u(t; x) &= -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{8k}{\pi(k^2 - 1)} ((-1)^{k+1} - 1) e^{-k^2 t} \sin kx = \\ &= \frac{32}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} e^{-4n^2 t} \sin 2nx. \end{aligned} \tag{2.4}$$

В условии задачи начальное и граничные условия не согласованы: в начальный момент времени имеем функцию $u(0; x)$ с разрывами первого рода при $x = 0$ и $x = \pi$. Однако при сколь угодно малом $t > 0$ сумма ряда (2.4) дает непрерывную на отрезке $[0, \pi]$ функцию. Нетрудно показать, что $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t; x) = 0$, $x \in [0, \pi]$.

2.2. Задача теплопроводности при наличии тепловых источников

Постановка задачи определяется как

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(t; x), \\ v|_{t=0} = \varphi(x), \\ v|_{x=0} = 0, \\ v|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

Прием решение в виде суммы двух функций

$$v(t; x) = v_{\text{онн}}(t; x) + v_{\text{неконн}}(t; x),$$

(iii) исходная задача разбивается на две подзадачи

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ v|_{t=0} = \phi(x), \\ v|_{x=0} = 0, \\ v|_{x=l} = 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(t; x),$$

$$\begin{cases} v|_{t=0} = 0, \\ v|_{x=0} = 0, \\ v|_{x=l} = 0, \end{cases}$$

Первая задача решена в п. 2.1.

Решение второй задачи будем искать в форме ряда Фурье по собственным функциям, полученным при решении первой задачи:

$$v_{\text{некон}}(t; x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (2.5)$$

Представим функцию $f(t; x)$ в виде ряда Фурье на отрезке $[0, l]$

$$f(t; x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (2.6)$$

причем коэффициенты ряда находятся по формуле

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(t; x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

В результате подстановки рядов (2.5) и (2.6) в неоднородное уравнение получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} T'_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi a}{l} \right)^2 T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Приравнивая коэффициенты при функциях $\sin(k\pi x/l)$, получим уравнение первого порядка $T'_k(t) + \left(\frac{k\pi a}{l} \right)^2 T_k(t) = f_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$ с начальным условием $T_k(0) = 0$.

Решение линейного неоднородного уравнения находится, следуя теореме о структуре решения [6], в виде

$$T_k(t) = T_k^{\text{кон}}(t) + T_k^{\text{некон}}(t) = Ce^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)t} + T_k^{\text{некон}}(t), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где C — константа, определяемая из начального условия.

Но другим способом, пользуясь методом вариации постоянной [6], получим

$$T_k(t) = \int_0^t f_k(t') e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)(t-t')} dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

Подстановка найденных функций $T_k(t)$ в ряд (2.5) дает решение для неоднородной задачи $v_{\text{некон}}(t; x)$.

Пример 5. Решить задачу о стержне с нагревом

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3t, \\ \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = 0, \\ v|_{x=0} = 0, \\ v|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

Постановка найденных функций $T_k(t)$ в ряд (2.5) дает решение для неоднородной задачи $v_{\text{некон}}(t; x)$.

Пример 5. Решить задачу о стержне с нагревом

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3t, \\ \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = 0, \\ v|_{x=0} = 0, \\ v|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

Постановка найденных функций $T_k(t)$ в ряд (2.5) дает решение для неоднородной задачи $v_{\text{некон}}(t; x)$.

При этом получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} T'_k(t) \sin kx = - \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) k^2 \sin kx + 3t.$$

Разложим последнее слагаемое в ряд по синусам на отрезке $[0, \pi]$

$$3t = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin kx,$$

Вычислим коэффициенты

$$f_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin kx dx = \frac{6t}{\pi} \int_0^\pi \sin kx dx = -\frac{6t}{k\pi} ((-1)^k - 1).$$

Также, подставляя полученный ряд

$$3t = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6t}{k\pi} ((-1)^k - 1) \sin kx$$

в исходное уравнение и приравнивая затем коэффициенты при функциях $\sin kx$, получим дифференциальное уравнение

$$T'_k(t) + k^2 T_k(t) = \frac{6(1 - (-1)^k)}{k\pi}$$

с начальным условием $T_k(0) = 0$, где $k = 1, 2, \dots$

Решение уравнения первого порядка находим по формуле метода вариации постоянной, применив интегрирование по частям, тогда

$$T_k(t) = \int_0^t \frac{6(1 - (-1)^k)}{k\pi} \tau e^{-k^2(\tau-t)} d\tau = \frac{6(1 - (-1)^k)}{k^3\pi} \int_0^t \tau e^{-k^2(\tau-t)} d\tau =$$

$$= \frac{6(1 - (-1)^k)}{k^3\pi} \left(\tau e^{-k^2(\tau-t)} \Big|_0^t - \int_0^t e^{-k^2(\tau-t)} d\tau \right)$$

$$= \frac{6(1 - (-1)^k)}{k^3\pi} \left(t - \frac{1}{k^2} e^{-k^2(t-t)} \Big|_0^t \right) = \frac{6(1 - (-1)^k)}{k^3\pi} \left(t - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} e^{-k^2t} \right).$$

Получаем решение

$$\begin{aligned} v(t; x) &= \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6(1 - (-1)^k)}{k^3\pi} \left(t - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} e^{-k^2t} \right) \sin(kx) = \\ &= \frac{12}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \left(t - \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-(2n+1)^2 t} \right) \sin((2n+1)x). \end{aligned}$$

В условиях задачи слагаемое $3t$ интерпретируется как равномерный по всем точкам нагрев стержня, усиливающийся с течением времени. В полученном решении содержится слагаемое t , что означает бесконечное увеличение температуры стержня при $t \rightarrow \infty$.

2.3. Задача теплопроводности при заданной температуре концов стержня

Получим решение общей первой краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t; x), \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u|_{x=0} = z_1(t), \\ u|_{x=\ell} = z_2(t). \end{cases} \quad (2.7)$$

Ищем решение в виде

$$u(t; x) = v(t; x) + w(t; x),$$

где $v(t; x)$ — новая неизвестная функция, а вспомогательная функция

$$w(t; x) = z_1(t) + \frac{x}{\ell} (z_2(t) - z_1(t)).$$

После подстановки в уравнение $v + w$ и условия (2.7) получаем равносильную краевую задачу для функции v :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \tilde{f}(t; x), \\ v|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x), \\ v|_{x=0} = 0, \\ v|_{x=\ell} = 0, \end{cases}$$

Метод решения этой задачи изложен в п. 2.2.

Пример 6. Решить задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = \pi, \\ u|_{x=0} = \pi, \\ u|_{x=\ell} = 3\pi. \end{cases}$$

Решение. Вычисляем вспомогательную функцию сдвигта

$$w(t; x) = \varphi_1(t) + \frac{x}{l} (\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) = \pi + \frac{x}{\pi} (3\pi - \pi) = \pi + 2x$$

и делаем замену неизвестной функции $u = v + w = v + 2x + \pi$.

Подставим $v + 2x$ вместо u в условия задачи, получаем

$$\begin{cases} (v + 2x + \pi)' = (v + 2x + \pi)''_{xx}, & v'_t = v''_{xx}, \\ v|_{l=0} = (u - 2x - \pi)|_{l=0} = u|_{l=0} - 2x - \pi = \pi - 2x - \pi = -2x, \\ v|_{x=0} = (u - 2x - \pi)|_{x=0} = u|_{x=0} - 2x|_{x=0} - \pi = \pi - \pi = 0, \\ v|_{x=\pi} = (u - 2x - \pi)|_{x=\pi} = u|_{x=\pi} - 2x|_{x=\pi} - \pi = 3\pi - 2\pi - \pi = 0. \end{cases}$$

То есть имеем для функции v задачу с нулевыми граничными условиями

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ v|_{l=0} = -2x, \\ v|_{x=0} = 0, \\ v|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

Формула общего решения для последнего уравнения имеет вид

$$v(t; x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 t} \sin kx.$$

Подставляя $t = 0$ из начального условия, имеем равенство

$$v(0; x) = -2x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx.$$

Вычисляем значение a_k , применив формулу интегрирования по частям,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (-2x) \sin kx dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} x d \frac{\cos kx}{k} = \\ &= \frac{4}{\pi} \left(x \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos kx dx \right) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\pi}{k} (-1)^k - \frac{1}{k^2} \sin kx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{4}{k} (-1)^k. \end{aligned}$$

Чистное решение имеет вид

$$v(t; x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k} (-1)^k e^{-k^2 t} \sin kx.$$

Получаем ответ

$$u(t; x) = w(t; x) + v(t; x) = 2x + \pi + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2 t} \sin kx.$$

Нетрудно показать, что $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t; x) = 2x + \pi$, $x \in [0, \pi]$ т. е. в оторжене при $t \rightarrow \infty$ устанавливается стационарное распределение тепла. С физической точки зрения возникновение линейного при x закона распределения темпа очевидно, так как левый конец стержня поддерживается при постоянной температуре π , а правый конец стержня — при постоянной температуре 3π . Метод стационарных неоднородностей применяется к задачам

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x), \\ u|_{l=0} = \varphi(x), \\ u|_{x=0} = A, \\ u|_{x=\pi} = B, \end{cases}$$

где A и B — константы. Соответствующая краевая задача для стационарного уравнения имеет вид

$$\begin{cases} a^2 \tilde{u}'' + f(x) = 0, \\ \tilde{u}|_{l=0} = \varphi(x), \\ \tilde{u}(0) = A, \\ \tilde{u}(\pi) = B. \end{cases}$$

Преобразуем уравнение (2.8), введя неизвестную функцию $u(t; x)$ через сумму

$$u(t; x) = v(t; x) + \tilde{u}(x),$$

то $\tilde{u}(x)$ — решение задачи (2.9). Подставим выражение $v + \tilde{u}(x)$ в уравнение и условия (2.8) вместо u , получаем равносильную задачу для функции v

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - \tilde{u}(x), \\ v|_{k=0} = 0, \\ v|_{k=l} = 0. \end{cases}$$

Метод решения последней задачи изложен в п. 2.1.

Вопросы для самоконтроля

1. Выпишите уравнение перераспределения тепла с течением времени $t \in [0, \infty)$ в плоской однородной пластине $(x, y) \in D$, где D — конечная область, $D \subset \mathbb{R}^2$. Границы пластины поддерживаются при нулевой температуре. Рассмотрите случай добавления извне тепла $f(t, x, y)$.
2. Выпишите уравнение перераспределения тепла с течением времени $t \in [0, \infty)$ в объемном однородном теле $(x, y, z) \in V$, где V — конечная область, $V \subset \mathbb{R}^3$. Границы тела поддерживаются при нулевой температуре. Рассмотрите случай добавления извне тепла $f(t, x, y, z)$.
3. Применим метод разделения переменных к указанным выше уравнениям в частных производных?
4. Выпишите пример уравнения в частных производных четвертого порядка, к которому применим метод разделения переменных.

Изложенные методы приводят к представлению ниже последовательности решения смешанных задач (1.2) и (2.1).

1. Заменяется неизвестная функция

$$u = v + w,$$

где w — данная функция сдвига. Получаем задачу для функции v с нулевыми граничными условиями.

2. Учитывая линейность полученного дифференциального уравнения для функции v , вводим разложение

$$v = v_{\text{одн}} + v_{\text{недн}}$$

и получаем подзадачу для функции $v_{\text{одн}}$ и подзадачу для функции $v_{\text{недн}}$.

3. Методом разделения переменных строится ряд Фурье для $v_{\text{одн}}$ и находит частное решение.

4. Методом неопределенных коэффициентов находится ряд Фурье для $v_{\text{недн}}$.

5. Выписывается решение исходной задачи, которое имеет вид

$$u = w + v_{\text{одн}} + v_{\text{недн}}.$$

6. Проводится проверка решения, которая состоит из двух частей. Сначала проверяется выполнение начальных и граничных условий для найденного выражения. Затем выражение для u представляется в исходное дифференциальное уравнение в частных производных и получается тождество.

Заключение

Приложение

Типовой расчет

Ниже представлены задачи типового расчета, для каждой заданы 30 вариантов условий.

Задача. Найти решение смешанной задачи:

- а) для уравнения гиперболического типа;
- б) для уравнения параболического типа.

Требуется графически проиллюстрировать первоначальную постановку задачи для u и постановку промежуточных задач для функций v , $v_{\text{одн}}$, $v_{\text{несин}}$. При малых значениях времени $t > 0$ — проиллюстрировать решение; построить график приближенного решения, взяв в качестве приближения первые слагаемые найденного ряда Фурье, содержащие $\sin x$.

1. а)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = \sin 2x, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=\pi} = \pi e^{-2t} - \pi. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t^2, \\ u|_{t=0} = -\frac{x}{\pi}, \\ u|_{x=0} = 1, \\ u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

34

2. а)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = -\frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{2}, \\ u|_{k=0} = \pi \sin \frac{t}{2}, \\ u|_{k=\pi} = 0. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = \frac{x}{\pi}, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=\pi} = e^{-t}. \end{cases}$$

3. а)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin 3x, \\ u|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x, \\ u|_{x=0} = \pi t, \\ u|_{x=\pi} = 2\pi t. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{x}{\pi} + \sin x, \\ u|_{t=0} = x, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=\pi} = t. \end{cases}$$

35

4. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t, \\ u|_{t=0} = x, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=\pi} = \pi. \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 1, \\ u|_{x=0} = \cos 2t, \\ u|_{x=\pi} = \cos 2t. \end{cases}$$

5. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \pi, \\ u|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = -x, \\ u|_{x=0} = \frac{1}{2}\pi t^2 + \pi t, \\ u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{x}{\pi} + e^{-4t} \sin 2x + 1, \\ u|_{t=0} = -2x + 2\pi, \\ u|_{x=0} = t, \\ u|_{x=\pi} = 2t. \end{cases}$$

6. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = \pi, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x, \\ u|_{x=0} = \pi, \\ u|_{x=\pi} = \pi t^4 + \pi. \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin t, \\ u|_{t=0} = 1, \\ u|_{x=0} = \cos t + \sin t, \\ u|_{x=\pi} = \cos t. \end{cases}$$

7. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x + 1, \\ u|_{t=0} = \frac{x^2}{\pi}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=\pi} = \pi t^2 + \pi. \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = e^t \sin 2t, \\ u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

8. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=\pi} = t^5. \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x, \\ u|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = 2, \\ u|_{x=\pi} = 1. \end{cases}$$

9. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = \sin 5x, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = t^3 + t, \\ u|_{x=\pi} = t^3 + t. \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=\pi} = t^6. \end{cases}$$

10. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = -\frac{x}{\pi} + \sin x + 1, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = -\frac{x}{10\pi} + \frac{1}{10}, \\ u|_{x=0} = e^{t/10}, \\ u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{e^{-9t}}{1+t^2} \sin 3x, \\ u|_{t=0} = -\frac{x}{\pi}, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=\pi} = 1. \end{cases}$$

11. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos \frac{x}{2}, \\ u|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = t, \\ u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x, \\ u|_{t=0} = \frac{12 + \pi^3}{6\pi} x + 2, \\ u|_{x=0} = 2, \\ u|_{x=\pi} = 4. \end{cases}$$

12. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = \sin 3x + 1, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 1, \\ u|_{x=0} = \cos \frac{t}{3}, \\ u|_{x=\pi} = \cos \frac{t}{3}. \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-4t} \sin 4x + 1, \\ u|_{t=0} = 1, \\ u|_{x=0} = 1, \\ u|_{x=\pi} = 1. \end{cases}$$

13. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=\pi} = \pi t^7. \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + \sin 3x + \pi, \\ u|_{t=0} = x, \\ u|_{x=0} = \pi t, \\ u|_{x=\pi} = 2\pi t. \end{cases}$$

40

14. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = \pi \cos \frac{3x}{2}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=\pi} = \pi e^{-2t}. \end{cases}$$

15. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sin 2x, \\ u|_{x=0} = 2\pi t^2, \\ u|_{x=\pi} = \pi t^2. \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = \sin 2x, \\ u|_{x=0} = \pi \sin \frac{t}{2}, \\ u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

41

16. a)

$$6) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = \sin x, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = t^2, \\ u|_{x=\pi} = t^3. \end{cases}$$

17. a)

$$6) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = 2x, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=\pi} = \pi. \end{cases}$$

18. a)

18. a)

$$6) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t^2, \\ u|_{t=0} = -\frac{x}{\pi}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{x}{\pi} - 1, \\ u|_{x=0} = 1, \\ u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

$$19. a) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t, \\ u|_{t=0} = 2x, \\ u|_{x=0} = \pi, \\ u|_{x=\pi} = \pi t^4 + \pi. \end{cases}$$

$$6) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = \pi, \\ u|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = \sin 2t, \\ u|_{x=\pi} = \sin 2t. \end{cases}$$

$$6) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin 2x, \\ u|_{t=0} = 1, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=\pi} = 3. \end{cases}$$

20. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + \sin x, \\ u|_{t=0} = x, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{x}{\pi}, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=\pi} = t. \end{cases}$$

6)

22. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-4t} \sin 2x + 1, \\ u|_{t=0} = -2x + 2\pi, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{x}{\pi} + 1, \\ u|_{x=0} = t, \\ u|_{x=\pi} = 2t. \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6(\frac{x}{\pi} - 1) \cos 3t, \\ u|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

21. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \cos t, \\ u|_{t=0} = 1, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = \cos t + \sin t, \\ u|_{x=\pi} = \cos t. \end{cases}$$

6)

23. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x, \\ u|_{t=0} = \sin x + 1, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 1, \\ u|_{x=0} = 2, \\ u|_{x=\pi} = 1. \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = x, \\ u|_{x=0} = 2, \\ u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

24. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = te', \\ u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = \sin x, \\ u|_{x=0} = t^3, \\ u|_{x=\pi} = t^2. \end{cases}$$

25. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^{t/4} \left(\frac{x^3}{\pi^3} - \frac{x}{\pi} \right), \\ u|_{t=0} = -\frac{x}{\pi} + 1, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = 1, \\ u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = e^t \sin 2t, \\ u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

46

26. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ +(t+2) \left(\frac{x^3}{12\pi^3} - \frac{x^2}{4\pi^2} + \frac{x}{6\pi} \right), \\ u|_{t=0} = \frac{2}{\pi}x + 1, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = 1, \\ u|_{x=\pi} = 3. \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x, \\ u|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = 2, \\ u|_{x=\pi} = 1. \end{cases}$$

27. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{tx^2}{\pi^2}, \\ u|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{x}{\pi} - \frac{x^2}{\pi^2}, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=\pi} = -\frac{t^3}{6}. \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = 3, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

47

28. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = x+1, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = t+1, \\ u|_{x=\pi} = t^3 + 2. \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6t, \\ u|_{t=0} = 5, \\ u|_{x=0} = 7, \\ u|_{x=\pi} = 4. \end{cases}$$

29. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5xe^{-t}, \\ u|_{t=0} = \sin 2x, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = -\frac{3x^2}{\pi^2} + \frac{3x}{\pi}, \\ u|_{x=0} = 2, \\ u|_{x=\pi} = 2. \end{cases}$$

Литература

Содержание

1. Адаманович И.Г., Лещин В.И. Уравнения математической физики. 2-е изд., стер. М.: Наука, 1969. 286 с.
2. Василевский К.К. Уравнения математической физики: методические указания к практическим занятиям. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1986. 42 с.
3. Власова Б.А., Зорубин В.С., Кубаркин Г.Н. Приближенные методы математической физики: учеб. для вузов / под ред. В.С. Зорубина, А.П. Крищенко. 2-е изд., стер. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 699 с.
4. Вуколов Э.А., Ефимов А.В., Зелков В.Н. Сборник задач по математике для вузов: учеб. пособие для вузов. В 4 ч. Ч. 4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1990. 302 с.
5. Дюров В.В., Неклодов А.В. Метод дифференциалов в приложенных определенных интегралах: методические указания к практическим занятиям. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 52 с.
6. Ефимов А.В., Каракулин А.Ф. Сборник задач по математике: учеб. пособие для вузов. В 4 ч. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа. 5-е изд., перераб. и доп. М.: Физматлит, 2009. 432 с.
7. Лобов Н.А. Динамика передвижения кранов по рельсовому пути: учеб. пособие для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 230 с.
8. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики: учеб. для вузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. 4-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 367 с.
9. Паршев Л.П., Калинин А.В. Уравнения в частных производных первого порядка: методические указания к выполнению типового расчета. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 28 с.
10. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. 6-е изд., доп. М.: Наука, 1975. 126 с.

| | |
|---|----|
| Предисловие | 3 |
| 1. Метод разделения переменных для уравнений гиперболического типа | 4 |
| 1.1. Свободные колебания закрепленной струны | 6 |
| 1.2. Вынужденные колебания закрепленной струны | 9 |
| 1.3. Колебания струны с подвижными концами | 13 |
| Вопросы и задания для самоконтроля | 20 |
| 2. Метод разделения переменных для уравнений параболического типа | 21 |
| 2.1. Задача теплопроводности при отсутствии источников и нулевых граничных условиях | 22 |
| 2.2. Задача теплопроводности при наличии тепловых источников | 25 |
| 2.3. Задача теплопроводности при заданной температуре концов стержня | 29 |
| Вопросы и задания для самоконтроля | 32 |
| Заключение | 33 |
| Приложение. Типовой расчет | 34 |
| Литература | 50 |

Учебное издание

Калинкин Александр Вячеславович
Неклодов Алексей Владимирович

**Метод разделения переменных
для уравнений гиперболического
и параболического типов**

Редактор Н.Л. Пахомова

Художник Я.М. Асинкристова

Корректор Е.А. Монсева

Компьютерная верстка Е.В. Жуковой

Оригинал-макет подготовлен

в Издательстве МИТУ им. Н.Э. Баумана.

В оформлении использованы шрифты
Студии Артемия Лебедева.

Подписано в печать 30.09.2021. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 3,25. Тираж 129 экз. Изд. № 937-2020.

Издательство МИТУ им. Н.Э. Баумана,
105005, г. Москва, улица 2-я Бауманская, д. 5, к. 1.
info@bmstu.ru
<https://bmstu.press>

Отпечатано в типографии МИТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, г. Москва, улица 2-я Бауманская, д. 5, к. 1
baumprint@gmail.com

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

А.В. Калинкин, А.В. Неклюдов

**Метод разделения переменных
для уравнений гиперболического
и параболического типов**

Учебно-методическое пособие


BAUMANNPRESS
Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н.Э. Баумана
2021

**Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»**

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Высшая математика»

Представлены необходимые теоретические сведения и методические указания к решению линейных уравнений в частных производных типерболического и параболического типов. Приведены соответствующие примеры, даны условия вариантов типового расчета.

«Политехнический молодежный журнал» МГТУ им. Н.Э. Баумана приглашает студентов, магистрантов, аспирантов и молодых преподавателей (специалистов) опубликовать свои статьи.

- Все публикации бесплатные
- Статьи индексируются в РИНЦ
- Каждой статье присваивается DOI

Полная информация о журнале, а также выпуски текущих номеров представлены на сайте www.ptsj.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана,
Главный учебный корпус,
ауд. 298

+7 (499) 265-37-97
vk.com/ptsjournal
ptsj@bmstu.ru

ISBN 978-5-7038-5730-4
9 785703 857304

bmstu.dress

