

## ДИПЛОМНЫЙ ПРОЕКТ

на тему

Марковские системы массового обслуживания с  
подвижными элементами

Научный руководитель: профессор кафедры "Высшая математика"  
Калинкин А. В.

Выполнила: студентка группы ФН2-Д1  
Лисицына М. В.

Москва, 2006 г.

# Оглавление

§ 0.1. Введение. Обзор литературы. . . . .	3
<b>1. Элементы теории. . . . .</b>	<b>8</b>
§ 1.1. Марковские процессы со счетным множеством состояний. . . . .	8
1.1.1. Первая и вторая системы дифференциальных уравнений Колмогорова. . . . .	8
1.1.2. Многомерные производящие функции. . . . .	10
1.1.3. Марковские процессы с взаимодействием. . . . .	11
1.1.4. Ветвящиеся процессы с взаимодействием. . . . .	13
1.1.5. Ветвящиеся процессы. . . . .	16
1.1.6. Моделирование на ЭВМ марковских процессов методом Монте- Карло. . . . .	16
§ 1.2. Системы линейных дифференциальных уравнений. . . . .	18
1.2.1. Определения и основные свойства решений. . . . .	18
1.2.2. Определитель Вронского. Фундаментальная система решений. Формула Остроградского — Лиувилля. . . . .	19
1.2.3. Теоремы о структуре общего решения однородной и неоднородной систем. . . . .	22
1.2.4. Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение системы. . . . .	23
§ 1.3. Дифференциальные уравнения первого порядка в частных производных. . .	25
1.3.1. Линейное дифференциальное уравнение. Уравнения характеристик. Задача Коши. . . . .	25
1.3.2. Квазилинейное дифференциальное уравнение. . . . .	27
<b>2. Система массового обслуживания с подвижными заявками. Аналитический метод. . . . .</b>	<b>28</b>
§ 2.1. Постановка задачи . . . . .	28
§ 2.2. Явные решения уравнений Колмогорова для схем с тремя типами элементов. .	29
2.2.1. Схема $0 \rightarrow T_1, T_2; T_1 \rightarrow T_2, T_3; T_2 \rightarrow T_1, T_3$ . . . . .	29
2.2.2. Математические ожидания и дисперсии. . . . .	33
2.2.3. Стационарные вероятности. . . . .	39
§ 2.3. Явные решения уравнений Колмогорова для схем с $n$ типами элементов. . .	40
2.3.1. Явные решения . . . . .	40
2.3.2. Математические ожидания и дисперсии. . . . .	44
2.3.3. Стационарное распределение. . . . .	47

<b>3. Система массового обслуживания с подвижными приборами. Метод статистического моделирования.</b>	<b>48</b>
§ 3.1. Постановка задачи. . . . .	48
§ 3.2. Исследование нестационарной задачи . . . . .	50
§ 3.3. Исследование стационарного распределения. . . . .	54
<b>4. Организация и планирование научно–исследовательской работы</b>	<b>61</b>
§ 1. Расчет трудоемкости НИР . . . . .	62
§ 2. Расчет себестоимости НИР . . . . .	63
<b>5. Промышленная экология и безопасность</b>	<b>67</b>
§ 1. Анализ вредных факторов на рабочем месте инженера–расчетчика . . . . .	67
§ 2. Требования к организации рабочего места . . . . .	71
<b>Приложение</b>	<b>76</b>

## § 0.1. Введение. Обзор литературы.

При исследовании операций часто приходится сталкиваться с работой систем, называемых системами массового обслуживания (СМО). Примерами таких систем могут служить: телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, справочные бюро, магазины, парикмахерские и т.п.

Каждая СМО состоит из какого-то числа обслуживающих единиц (или "приборов"), которые называются каналами обслуживания. Каналами могут быть: линии связи, рабочие точки, кассиры, продавцы, лифты, автомашины и др. СМО могут быть одноканальными и многоканальными.

Всякая СМО предназначена для обслуживания какого-то потока заявок (или "требований"), поступающих в какие-то случайные моменты времени. Обслуживание заявки продолжается какое-то, вообще говоря, случайное время  $t_{об}$ , после чего канал освобождается и готов к приему следующей заявки. Случайный характер потока заявок и времен обслуживания приводит к тому, что в некоторые периоды времени на входе СМО скапливается излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными); в другие же периоды СМО будет работать с недогрузкой или вообще простаивать.

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем; состояние СМО меняется скачком в моменты появления каких-то событий (или прихода новой заявки, или окончания обслуживания, или момента, когда заявка, например, покидает очередь).

Предмет теории массового обслуживания — построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, правила работы, характер потока заявок) с интересующими нас характеристиками — показателями эффективности СМО, описывающими, с той или другой точки зрения, её способность справляться с потоком заявок. В качестве таких показателей (в зависимости от обстановки и целей исследования) могут применяться разные величины, например: среднее число заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени; среднее число занятых каналов; среднее число заявок в очереди и среднее время ожидания обслуживания; вероятность того, что число заявок в очереди превысит какое-то значение, и т.д.

Математический анализ работы СМО облегчается, если моделью работы СМО является марковский процесс. Для этого достаточно, чтобы все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние (потоки заявок, потоки "обслуживаний"), были простейшими. Если это свойство нарушается, то математическое описание процесса обслуживания становится гораздо сложнее и довести его до явных, аналитических формул удастся лишь в редких случаях. Однако аппарат марковской теории массового обслуживания годен для приближенного описания работы СМО даже в тех случаях, когда потоки событий — не простейшие. Во многих случаях для принятия разумного решения по организации работы СМО вовсе и не требуется точного знания всех ее характеристик — зачастую достаточно знать их приближенно.

Системы массового обслуживания делятся на типы по ряду признаков. Первое деление: СМО с отказами и СМО с очередью. В СМО с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует. Примеры СМО с отказами встречаются в телефонии: заявка на разговор, пришедшая в момент, когда все каналы связи заняты, получает отказ и покидает СМО необслуженной. В СМО с очередью заявка, пришедшая в момент,

когда все каналы заняты, не уходит, а становится в очередь и ожидает возможности быть обслуженной. На практике чаще встречаются СМО с очередью; теория массового обслуживания имеет второе название: "теория очередей".

СМО с очередью подразделяются на разные виды, в зависимости от того, как организована очередь — ограничена она или не ограничена. Ограничения могут касаться как длины очереди, так и времени ожидания (так называемые "СМО с нетерпеливыми заявками"). При анализе СМО должна учитываться также и "дисциплина обслуживания"— заявки могут обслуживаться либо в случайном порядке. Встречается так называемое обслуживание с приоритетом — некоторые заявки обслуживаются вне очереди. Приоритет может быть абсолютным — когда заявка с более высоким приоритетом "вытесняет" из-под обслуживания заявку с низшим, так и относительным — когда начатое обслуживание доводится до конца, а заявка с более высоким приоритетом имеет лишь право на лучшее место в очереди.

Существуют СМО с так называемым многократным обслуживанием, состоящим из нескольких последовательных этапов или "фаз" (например, покупатель, пришедший в магазин, должен сначала выбрать товар, затем оплатить его в кассе, затем получить на контроле).

Кроме этих признаков, СМО делятся на два класса: "открытые" и "замкнутые". В открытой СМО характеристики потока заявок не зависят от того в каком состоянии сама СМО (сколько занято каналов). В замкнутой СМО — зависят. Например, если один рабочий обслуживает группу станков, время от времени требующих наладки, то интенсивность потока "требований" со стороны станков зависит от того, сколько их уже неисправно и ждет наладки. Это — пример замкнутой СМО. Классификация СМО далеко не ограничивается их разновидностями, но мы ограничимся данными примерами.

Оптимизация работы СМО может производиться под разными углами зрения: с точки зрения организаторов (или владельцев) СМО или с точки зрения обслуживаемых клиентов. С первой точки зрения желательно "выжать все, что возможно" из СМО и добиться того, чтобы ее каналы были предельно загружены. С точки зрения клиентов желательно всемерное уменьшение очередей, приводящих к трате сил и времени и, в конечном итоге, к понижению производительности труда. При решении задач оптимизации в теории массового обслуживания необходимо полное и комплексное рассмотрение всех последствий каждого решения. Например, с точки зрения клиентов СМО желательно увеличение числа каналов обслуживания; но ведь работу каждого канала надо оплачивать, что удорожает обслуживание. Построение математической модели позволяет решить оптимизационную задачу о разумном числе каналов с учетом всех "за" и "против". Поэтому мы не выделяем в задачах массового обслуживания какого-либо одного показателя эффективности, а сразу ставим эти задачи как многокритериальные.

## **Простейшие системы массового обслуживания и их характеристики.**

Все потоки событий, переводящие СМО из состояния в состояние, будем считать простейшими (не оговаривая это каждый раз специально). В их числе будет и так называемый "поток обслуживаний". Под ним разумеется поток заявок, обслуживаемых одним непрерывно занятым каналом. В этом потоке интервал между событиями, как и всегда в простейшем потоке, имеет показательное распределение (иногда говорят: "время

обслуживания — показательное").

### Одноканальная СМО с неограниченной очередью.

На практике довольно часто встречаются одноканальные СМО с очередью (врач, обслуживающий пациентов; телефон-автомат с одной будкой; ЭВМ, выполняющий заказы пользователей). В теории массового обслуживания одноканальные СМО с очередью также занимают особое место (именно к таким относится большинство полученных до сих пор аналитических формул для немарковских моделей СМО). Поэтому мы опишем одноканальную СМО с очередью.

Пусть имеется одноканальная СМО с очередью, на которую не наложено никаких ограничений (ни по длине очереди, ни по времени ожидания). На эту СМО поступает поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ ; поток обслуживающий имеет интенсивность  $\mu$ , обратную среднему времени обслуживания заявки  $\bar{t}_{ob}$ .

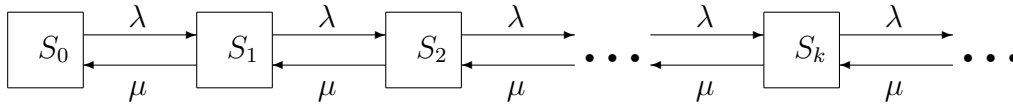


Рис. 0.1

Состояния системы будем нумеровать по числу заявок, находящихся в СМО:

$S_0$  — канал свободен,

$S_1$  — канал занят, очереди нет,

$S_2$  — канал занят, одна заявка в очереди,

.....

$S_k$  — занят один канал,  $k - 1$  заявка стоят в очереди,

.....

Теоретически число состояний ничем не ограничено (бесконечно). Граф состояний имеет вид, показанный на рис. 0.1. Это — схема процесса гибели и размножения [1, 3], но с бесконечным числом состояний. По всем стрелкам поток заявок с интенсивностью  $\lambda$  переводит систему слева направо, а справа налево — поток обслуживаний с интенсивностью  $\mu$ .

Стационарные вероятности для такой СМО существуют не всегда, а только когда система не перегружена. Можно показать, что если  $\rho = \lambda/\mu < 1$ , то стационарные вероятности существуют, а при  $\rho \geq 1$  очередь при  $t \rightarrow \infty$  растет неограниченно. Вывод формул стационарных вероятностей одноканальной СМО можно найти в [1, 3]:

$$p_0 = 1 - \rho, \quad p_k = \rho^k p_0, \quad k = \overline{1, \infty} \quad (0.1.1)$$

основные характеристики системы имеют вид (для их вычисления используются формулы Литтла [1]):

$$\text{среднее число заявок в системе } L_{sys} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \rho(1 - \rho);$$

среднее время пребывания  $W_{sys} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$ .

Найдем среднее число заявок в очереди  $L_{ord}$ . будем рассуждать так: число заявок в очереди равно числу заявок в системе минус число заявок, находящихся под обслуживанием. Значит (по правилу сложения математических ожиданий), среднее число заявок в очереди  $L_{ord}$  равно среднему числу заявок в системе  $L_{sys}$  минус среднее число заявок под обслуживанием. Число заявок под обслуживанием может быть либо нулем (если канал свободен), либо единицей (если он занят). Математическое ожидание такой случайной величины равно вероятности того, что канал занят (обозначим ее  $P_b$ ). Очевидно,  $P_b$  равно единице минус вероятность  $p_0$  того, что канал свободен:

$$P_b = 1 - p_0 = \rho.$$

Следовательно среднее число заявок под обслуживанием равно  $\rho$  и отсюда

$$L_{ord} = L_{sys} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

По формуле Литтла среднее время пребывания заявки в очереди:

$$W_{ord} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}.$$

#### **n-канальная СМО с неограниченной очередью.**

Аналогично предыдущей задаче решается задача об  $n$ -канальной СМО с неограниченной очередью. Нумерация состояний — по числу заявок, находящихся в системе:

$S_0$  — в СМО заявок нет (все каналы свободны),

$S_1$  — занят один канал, остальные свободны,

.....

$S_n$  — заняты все  $n$  каналов (очереди нет),

.....

$S_{n+k}$  — заняты все  $n$  каналов,  $k$  заявок стоит в очереди.

Граф состояний показан на рис. 0.2.

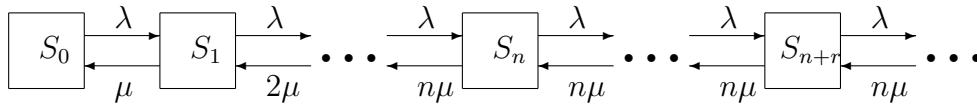


Рис. 0.2

есть схема гибели и размножения с бесконечным числом состояний. Условие существования финальных вероятностей также аналогично предыдущей задаче:  $\rho/n < 1$ . Если  $\rho/n \geq 1$ , очередь растет до бесконечности.

Предположим, что условие  $\rho/n < 1$  выполнено, и стационарные вероятности существуют. Применяя известные формулы для схемы гибели и размножения [1], запишем эти стационарные вероятности.

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \left( 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1}, \\ p_1 &= \frac{\rho}{1!} p_0, \dots, p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \dots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \\ p_{n+1} &= \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \dots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r n!} p_0, \dots \end{aligned} \right\} \quad (0.1.2)$$

Найдем характеристики эффективности СМО. Легко находится среднее число занятых каналов  $\bar{k} = \lambda/\mu\rho$  (это вообще справедливо для любой СМО с неограниченной очередью). Найдем среднее число заявок в системе  $L_{sys}$  и среднее число заявок в очереди  $L_{ord}$ . Из них легче найти второе, по формуле  $L_{ord} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r}$ ; и в результате получим

$$L_{ord} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! (1 - \rho/n)^2}.$$

Прибавляя к нему среднее число заявок под обслуживанием (оно же — среднее число занятых каналов)  $\bar{k} = \rho$ , получим:

$$L_{sys} = L_{ord} + \rho.$$

Деля выражения для  $L_{ord}$  и  $L_{sys}$  на  $\lambda$ , по формуле Литтла получим средние времена пребывания заявки в очереди и в системе:

$$W_{ord} = \frac{1}{\lambda} L_{ord}, \quad W_{sys} = \frac{1}{\lambda} L_{sys}.$$



# Глава 1

## Элементы теории.

### § 1.1. Марковские процессы со счетным множеством состояний.

#### 1.1.1. Первая и вторая системы дифференциальных уравнений Колмогорова.

Пусть  $\xi(t), t \in [0, \infty)$ , — однородный во времени марковский случайный процесс со счетным числом состояний  $N = \{0, 1, 2, \dots\}$  [9]. Обозначим переходные вероятности

$$P_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j | \xi(0) = i\}, \quad i, j \in N$$

Переходные вероятности марковского процесса удовлетворяют следующим условиям:

$$P_{ij}(t) \geq 0$$

при всех  $i, j \in N, \quad t \in [0, \infty)$  (условие неотрицательности);

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) = 1$$

при любом  $i \in N, \quad t \in [0, \infty)$  (условие нормированности);

$$P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(u) P_{kj}(t-u)$$

для всех  $i, j \in N$  и  $0 \leq u \leq t, \quad u, t \in [0, \infty)$  (марковское свойство);

$$P_{ii}(0) = 1, \quad P_{ij}(0) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j$$

(начальное условие).

Предполагается, что процесс  $\xi(t)$  стохастически непрерывен, т.е. выполнены условия

$$\lim_{t \rightarrow 0+} P_{ii}(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} P_{ij}(t) = 0, \quad i \neq j.$$

Основные результаты теории однородных марковских процессов со счетным числом состояний состоят в следующем.

Всегда существуют конечные или бесконечные пределы

$$a_{ii} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{P_{ii}(t) - 1}{t}, \quad a_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{P_{ij}(t)}{t}.$$

Эти пределы называются интенсивностями переходов вероятностей (инфинитезимальными характеристиками) и далее записываются как

$$a_{ij} = \frac{dP_{ij}(t)}{dt}, \quad i, j \in N.$$

Если  $i \neq j$ , то  $a_{ij}$  конечно;  $a_{ii}$  — либо конечно, либо  $a_{ii} = -\infty$ ; во всех случаях  $\sum_{j \neq i} a_{ij} \leq -a_{ii}$ .

С помощью величин  $a_{ij}$  производится классификация состояний процесса. Состояние  $i$  называется мгновенным, если  $a_{ii} = -\infty$ . Состояние, не являющееся мгновенным, называется регулярным, если  $\sum_{j \neq i} a_{ij} = -a_{ii}$ . В противном случае это состояние называется нерегулярным. Если все состояния процесса регулярны, то переходные вероятности  $P_{ij}(t)$  удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} P_{kj}(t), \quad i \in N, \quad (1.1.1)$$

носящей название первой (обратной) системы дифференциальных уравнений Колмогорова.

Пусть все состояния процесса регулярны, и при заданном  $i$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) a_{kk} > -\infty.$$

Тогда при заданном  $i$  для всех  $j$  выполнена вторая (прямая) система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей  $P_{ij}(t)$ ,

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) a_{kj}, \quad i \in N, \quad (1.1.2)$$

Системы уравнений (1.1.1) и (1.1.2) являются линейными.

Вероятностный смысл инфинитезимальных характеристик  $\{a_{ij}, \quad i, j \in N\}$  следующий. В начальном состоянии  $i$  марковский процесс  $\xi(t)$  пребывает случайное время  $\tau_i$ , с распределением

$$P\{\tau_i < t\} = 1 - e^{a_{ii}t}.$$

Если  $a_{ii} = 0$ , то процесс не выходит из состояния  $i$  (такое состояние называется поглощающим). Если  $a_{ii} < 0$ , то в момент  $\tau_i$  с распределением вероятностей

$$\left\{ p_j^i = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad j \neq i; \quad p_i^i = 0 \right\} \quad (1.1.3)$$

процесс переходит в состояние  $j$ ; в состоянии  $j$  процесс находится случайное время  $\tau_j$ , далее аналогичная эволюция.

### 1.1.2. Многомерные производящие функции.

Обозначим

$$N^n = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_i = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

— множество всех  $n$ -мерных векторов с неотрицательными целочисленными компонентами. Далее для векторов  $\alpha, \beta, \gamma \in N^n$  приняты обозначения :  $\gamma = \alpha - \beta$ , если  $\gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1, \dots, \gamma_n = \alpha_n - \beta_n$  :  $\alpha \geq \beta$ , если  $\alpha_1 \geq \beta_1, \dots, \alpha_n \geq \beta_n$  и т. п.;  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_n$

Обозначим  $g_\alpha$  значение в точке  $\alpha$  числовой функции, определенной на  $N^n$ . Многомерной производящей функцией  $F(s_1, \dots, s_n)$ , соответствующей  $g_\alpha$ , называются сумма ряда

$$F(s_1, \dots, s_n) = \sum_{\alpha \in N^n} g_\alpha s_1^{\alpha_1} \dots s_n^{\alpha_n}. \quad (1.1.4)$$

Экспоненциальной производящей функцией  $G(z_1, \dots, z_n)$ , соответствующей  $\{g_\alpha\}$ , называется сумма ряда

$$G(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\alpha \in N^n} \frac{z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} g_\alpha. \quad (1.1.5)$$

Далее применяется сокращенная запись  $s = (s_1, \dots, s_n)$ ,  $s^\alpha = s_1^{\alpha_1} \dots s_n^{\alpha_n}$ ,  $z = (z_1, \dots, z_n)$ ,  $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$ ,  $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$ , а суммирование  $\sum_{\alpha \in N^n}$  обозначается  $\sum_\alpha$ . Тогда (1.1.4) и (1.1.5) записываются в виде:

$$F(s) = \sum_\alpha g_\alpha s^\alpha; \quad G(z) = \sum_\alpha \frac{z^\alpha}{\alpha!} g_\alpha$$

Для вектора  $s = (s_1, \dots, s_n)$  употребляется обозначение 0, если все его компоненты равны нулю, и обозначение 1, если все его компоненты равны единице. Через  $|s|$  обозначаем вектор с компонентами  $|s_i|$ . Аналогичные обозначения и для  $z = (z_1, \dots, z_n)$ .

Пусть  $\alpha, \beta \in N^n$ ,  $F(s)$  — многомерная производящая функция. Вводим обозначения:

$$\frac{\partial^\alpha F(s)}{\partial s^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} F(s)}{\partial s_1^{\alpha_1} \dots \partial s_n^{\alpha_n}};$$

$\alpha^{[\beta]} = \alpha_1^{[\beta_1]} \dots \alpha_n^{[\beta_n]}$ , где  $\alpha_i^{[\beta_i]} = \alpha_i(\alpha_i - 1) \dots (\alpha_i - \beta_i + 1)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Если  $F(s)$  есть производящая функция для  $\{g_\alpha\}$ , то  $\frac{\partial^\beta F(s)}{\partial s^\beta}$  есть производящая функция для  $\{\alpha^{[\beta]} g_\alpha, \quad \alpha \in N^n\}$ .

Пусть производящие функции  $F(s)$ ,  $G(z)$  имеют некоторые области сходимости. Тогда между  $\{g_\alpha\}$  и  $F(s)$ ,  $G(z)$  устанавливается взаимнооднозначное соответствие,

$$g_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha F(0)}{\partial s^\alpha}, \quad g_\alpha = \frac{\partial^\alpha G(0)}{\partial z^\alpha}.$$

Производящая функция называется положительной, если  $g_\alpha \geq 0$  при  $\alpha \in N^n$ . Положительная производящая функция  $F(s)$  называется вероятностной, если  $F(1) = 1$

Вероятностная производящая функция  $F(s)$  соответствует  $n$ -мерному распределению вероятностей  $\{g_\alpha\}$  на  $N^n$ . Можно соотносить вероятностную производящую функцию не к распределению  $\{g_\alpha\}$ , а к какому-либо случайному вектору  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ , имеющему

$\{g_\alpha\}$  своим распределением вероятностей. С помощью вектора  $\xi$  дается эквивалентное определение вероятностной производящей функции,

$$F_\xi(s) = Ms^\xi.$$

Математическое ожидание  $M\xi^{[\beta]}$  называется факториальным моментом порядка  $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$ . Можно показать, что

$$M\xi^{[\beta]} = \frac{\partial^\beta F_\xi(1)}{\partial s^\beta}, \quad (1.1.6)$$

где производная в точке  $s = 1$  понимается как производная слева по всем координатам  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . В частности, для математических ожиданий компонент случайного вектора  $\xi$  имеем

$$M\xi_i = \frac{\partial F_\xi(1)}{\partial s_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1.7)$$

Пользуясь равенством

$$D\xi_i(\xi_i - 1) = M\xi_i(\xi_i - 1) + M\xi_i - (M\xi_i)^2,$$

получаем выражение для дисперсии

$$D\xi_i(\xi_i - 1) = \frac{\partial^2 F_\xi(1)}{\partial s_i^2} + \frac{\partial F_\xi(1)}{\partial s_i} - \left( \frac{\partial F_\xi(1)}{\partial s_i} \right)^2, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1.8)$$

Следующие свойства производящих функций часто используются. Если  $\xi, \eta$  — независимые случайные векторы, то производящая функция их суммы  $\xi + \eta$  равна произведению производящих функций слагаемых, т.е.

$$F_{\xi+\eta}(s) = F_\xi(s)F_\eta(s). \quad (1.1.9)$$

Если  $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(i)}$  —  $i$  независимых одинаково распределенных случайных векторов, то

$$F_{\xi^{(1)}+\dots+\xi^{(i)}}(s) = F_{\xi^{(1)}}^i(s). \quad (1.1.10)$$

### 1.1.3. Марковские процессы с взаимодействием.

Множество марковских процессов составляют однородные во времени марковские процессы  $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t))$ ,  $t \in [0, \infty)$ , на фазовом пространстве  $N^n$  всех  $n$ -мерных векторов с неотрицательными целочисленными компонентами. Обозначим

$$P_{\alpha\beta}(t) = P\{\xi(t) = \beta | \xi(0) = \alpha\}, \quad \alpha, \beta \in N^n$$

— переходные вероятности и

$$a_{\alpha\beta} = \left. \frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt} \right|_{t=0+}$$

— плотности переходных вероятностей. Предполагаем, что выполняются условия, при которых переходные вероятности удовлетворяют первой (обратной)

$$\frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} P_{\gamma\beta}(t), \quad \alpha \in N^n, \quad (1.1.11)$$

и второй (прямой)

$$\frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \sum_{\gamma} P_{\alpha\gamma}(t) a_{\gamma\beta}, \quad \beta \in N^n, \quad (1.1.12)$$

системам дифференциальных уравнений Колмогорова; начальные условия  $P_{\alpha\alpha}(0) = 1$ ,  $P_{\alpha\beta}(0) = 0$  при  $\beta \neq \alpha$ .

Множество процессов  $M_1$ . Пусть фиксировано конечное множество векторов

$$A = \{\xi^i = (\xi_1^i, \dots, \xi_n^i) \in N^n, \quad i = 1, \dots, l\}.$$

Каждому вектору  $\xi^i \in A$  сопоставим распределение вероятностей на  $N^n$ :

$$\{p_{\beta}^i \geq 0, \quad \sum_{\beta} p_{\beta}^i = 1, \quad p_{\xi^i}^i = 0\}. \quad (1.1.13)$$

Даны также наборы чисел ( $i = 1, \dots, l$ ):

$$\{\varphi_{\alpha}^i \geq 0, \quad \alpha \in N^n; \quad \varphi_{\alpha}^i = 0, \text{ если при некотором } k \quad \alpha_k < \xi_k^i\}$$

Для процесса из множества  $M_1$  полагаем

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^l \varphi_{\alpha}^i p_{\beta-\alpha+\xi^i}^i, \quad \alpha \neq \beta, \quad a_{\alpha\beta} = -\sum_{i=1}^l \varphi_{\alpha}^i, \quad \alpha, \beta \in N^n \quad (1.1.14)$$

Таким образом, инфинитезимальные характеристики процесса из множества  $M_1$  определяются набором  $\xi^1, \{p_{\beta}^1\}, \{\varphi_{\alpha}^1\}, \dots, \xi^l, \{p_{\beta}^l\}, \{\varphi_{\alpha}^l\}$ .

Для процессов из  $M_1$  вторую систему уравнений (1.1.12) записывают в компактном виде, используя многомерные производящие функции

$$F_{\alpha}(t; s) = \sum_{\beta} P_{\alpha\beta}(t) s^{\beta}; \quad h_i(s) = \sum_{\beta} p_{\beta}^i s^{\beta}, \quad i = 1, \dots, l; \quad |s| \leq 1. \\ \frac{\partial F_{\alpha}(t; s)}{\partial t} = \sum_{i=1}^l (h_i(s) - s^{\xi^i}) D_i F_{\alpha}(t; s), \quad (1.1.15)$$

с начальным условием  $F_{\alpha}(0; s) = s^{\alpha}$ , где  $D_i$  — оператор Гельфонда-Леонтьева обобщенной производной, определенный на аналитических в окрестностях нуля функциях,

$$D_i \left( \sum_{\beta} a_{\beta} s^{\beta} \right) = \sum_{\beta \geq \xi^i} a_{\beta} \varphi_{\beta}^i s^{\beta - \xi^i}.$$

Отметим, что марковские процессы с конечным числом состояний принадлежат множеству  $M_1$ .

Интерпретация марковских процессов со взаимодействием.

Физическая трактовка марковского процесса  $\xi(t)$  из множества  $M_1$  следующая. Событие  $\{\xi(t) = \alpha\}$  можно интерпретировать как такое состояние некоторой физической

системы, в котором в момент времени  $t$  имеется совокупность  $S_\alpha$  частиц, состоящая из  $\alpha_1$  частиц типа  $T_1$ ,  $\alpha_2$  частиц типа  $T_2$ , ...,  $\alpha_n$  частиц типа  $T_n$ :

$$S_\alpha = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \dots + \alpha_n T_n.$$

Зададим  $l$  комплексов взаимодействия частиц  $S_{\varepsilon^i}$ , соответствующих векторам  $\varepsilon^i \in A$ . Через случайное время  $\tau_\alpha^i$ ,

$$P\{\tau_\alpha^i < t\} = 1 - e^{-\varphi_\alpha^i t}$$

может произойти взаимодействия комплекса частиц  $S_{\varepsilon^i}$ . В этот момент из  $\alpha_1$  частиц типа  $T_1$  выбирается  $\varepsilon_1^i$  частиц  $S_{\varepsilon^i}$  с распределением вероятностей  $\{p_\beta^i\}$  заменяется совокупностью  $S_\beta$  новых частиц. Система из состояния, соответствующему вектору  $\alpha$ , переходит в состояние, соответствующее вектору  $\alpha - \varepsilon^i + \beta$ .

Возможные взаимодействия представляют следующей схемой:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1^1 T_1 + \varepsilon_2^1 T_2 + \dots + \varepsilon_n^1 T_n \longrightarrow \beta_1^1 T_1 + \beta_2^1 T_2 + \dots + \beta_n^1 T_n; \\ \dots \\ \varepsilon_1^i T_1 + \varepsilon_2^i T_2 + \dots + \varepsilon_n^i T_n \longrightarrow \beta_1^i T_1 + \beta_2^i T_2 + \dots + \beta_n^i T_n; \\ \dots \\ \varepsilon_1^l T_1 + \varepsilon_2^l T_2 + \dots + \varepsilon_n^l T_n \longrightarrow \beta_1^l T_1 + \beta_2^l T_2 + \dots + \beta_n^l T_n; \end{array} \right.$$

где вектор  $(\beta_1^i, \beta_2^i, \dots, \beta_n^i)$  имеет распределение (1.1.8),  $i = 1, \dots, l$ .

В состоянии  $S_\alpha$  система находится случайное время  $\tau_\alpha$ , пока не произойдет какое-либо из  $l$  взаимодействий, т.е.  $\tau_\alpha = \min(\tau_\alpha^1, \dots, \tau_\alpha^l)$ . Предполагается, что случайные величины  $\tau_\alpha^1, \dots, \tau_\alpha^l$  независимы. Тогда

$$P\{\tau_\alpha^i < t\} = 1 - e^{-(\varphi_\alpha^1 + \dots + \varphi_\alpha^l)t},$$

и вероятность, что произошло взаимодействие  $i$ -го комплекса, при условии, что взаимодействие произошло, равна  $\varphi_\alpha^i (\sum_{i=1}^l \varphi_\alpha^i)^{-1}$ .

Для математического описания такой системы взаимодействующих частиц можно построить пространство элементарных событий, состоящее из описания эволюций каждой отдельной частицы, существовавшей в системе (пространство траекторий частиц), и соответствующую вероятностную меру на таком пространстве (меру на траекториях частиц).

#### 1.1.4. Ветвящиеся процессы с взаимодействием.

Специальный класс марковских процессов  $B_2$  выделяют из множества  $M_1$  дополнительными условиями на выборы  $\{\varphi_\alpha^1\}, \dots, \{\varphi_\alpha^l\}$ . Заданы множество комплексов взаимодействия  $A = \{\varepsilon^i = (\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_n^i) \in N^n, \quad i = 1, \dots, l\}$  и распределения вероятностей  $\{p_\beta^i\}$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Пусть процесс находится в состоянии  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Предполагаем, что за время  $\Delta t \rightarrow 0$  вероятность  $\varphi_\alpha^i \Delta t + o(\Delta t)$  взаимодействия комплекса частиц  $S_{\varepsilon^i}$ , пропорциональна числу  $C_{\alpha_1}^{\varepsilon_1^i}$  сочетаний  $\varepsilon_1^i$  частиц типа  $T_1$  из имеющихся  $\alpha_1$  частиц типа  $T_1$ , ...,  $T_n$  пропорциональна числу  $C_{\alpha_n}^{\varepsilon_n^i}$  сочетаний  $\varepsilon_n^i$  частиц типа  $T_n$  из имеющихся  $\alpha_n$  частиц типа  $T_n$ . Таким образом,

$$\varphi_\alpha^i = \lambda_i \prod_{j=1}^n \alpha_j (\alpha_j - 1) \dots (\alpha_j - \varepsilon_j^i + 1) = \lambda_i \alpha^{[\varepsilon^i]}, \quad \alpha \in N^n,$$

где  $\lambda_i > 0$  — коэффициенты пропорциональности ( $i = 1, \dots, n$ ). Инфинитезимальные характеристики  $\{a_{\alpha\beta}, \alpha, \beta \in N^n\}$  процесса из класса  $B_2$  определяются равенствами (1.1.14).

Выделение специального класса процессов  $B_2$  оправдывается с двух точек зрения. С одной стороны, такой класс марковских процессов на  $N^n$  описывает реальные явления в физике, химии, экологии. С другой стороны, оператор обобщенной производной в уравнении (1.2.15) совпадает с обычной производной, что позволяет использовать математический аппарат производящих и экспоненциальных производящих функций.

**Теорема 1.1.1.** Производящая функция переходных вероятностей  $F_\alpha(t; s)$  ветвящегося процесса с взаимодействием при любом  $\alpha$  удовлетворяет при  $|s| \leq 1$  линейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial t} = \sum_{i=1}^l \lambda_i (h_i(s) - s^{\varepsilon_i}) \frac{\partial^{\varepsilon_i} F_\alpha(t; s)}{\partial s^{\varepsilon_i}}, \quad (1.1.16)$$

с начальным условием  $F_\alpha(0; s) = s^\alpha$ .

Введем экспоненциальную производящую функцию переходных вероятностей

$$G_\beta(t; z) = \sum_{\alpha} \frac{z^\alpha}{\alpha!} P_{\alpha\beta}(t) \quad (1.1.17)$$

и линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами

$$h \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) = \sum_{\gamma} p_{\gamma}^i \frac{\partial^{\gamma}}{\partial z^{\gamma}}, \quad i = 1, \dots, l.$$

Отметим, что при любом  $\beta$ ,  $G_\beta(t; z)$  — функция аналитическая по переменным  $z_1, \dots, z_n$ , так как

$$G_\beta(t; z) \leq \sum_{\alpha} \frac{|z_1|^{\alpha_1} \dots |z_n|^{\alpha_n}}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} P_{\alpha\beta}(t) \leq e^{|z_1| + \dots + |z_n|} \quad (1.1.18)$$

**Теорема 1.1.2.** Экспоненциальная производящая функция переходных вероятностей  $G_\beta(t; z)$  ветвящегося процесса с взаимодействием при любом  $\beta$  удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial G_\beta(t; z)}{\partial t} = \sum_{i=1}^l \lambda_i z^{\varepsilon_i} \left( h_i \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{\partial^{\varepsilon_i}}{\partial z^{\varepsilon_i}} \right) G_\beta(t; z) \quad (1.1.19)$$

с начальным условием  $G_\beta(0; z) = \frac{z^\beta}{\beta!}$

Введем двойную производящую функцию переходных вероятностей

$$\mathcal{F}(t; z; s) = \sum_{\alpha} \frac{z^\alpha}{\alpha!} F_\alpha(t; s) = \sum_{\alpha, \beta} \frac{z^\alpha}{\alpha!} P_{\alpha\beta} s^\beta = \sum_{\alpha} G_\beta(t; z) s^\beta.$$

Следствие. Двойная производящая функция  $\mathcal{F}(t; z; s)$  удовлетворяет уравнениям ( $|s| \leq 1$ ):

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \sum_{i=1}^l \lambda_i (h_i(s) - s^{\varepsilon_i}) \frac{\partial^{\varepsilon_i} \mathcal{F}}{\partial s^{\varepsilon_i}}, \quad \mathcal{F}(0; z; s) = e^{zs}; \quad (1.1.20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \sum_{i=1}^l \lambda_i z^{\varepsilon_i} \left( h_i \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{\partial^{\varepsilon_i}}{\partial z^{\varepsilon_i}} \right) \mathcal{F}, \quad \mathcal{F}(0; z; s) = e^{zs}. \quad (1.1.21)$$

Стационарные уравнения для предельных вероятностей.

Пусть  $P_{\alpha\beta}(t)$ ,  $\alpha, \beta \in N^n$ , — переходные вероятности марковского процесса со счетным числом состояний. В общей теории марковских процессов показано, что существуют пределы

$$q_{\alpha\beta} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{\alpha\beta}(t), \quad \alpha, \beta \in N^n. \quad (1.1.22)$$

$q_{\alpha\beta}$  называют предельными вероятностями. Предельные вероятности не обязательно составляют распределение вероятностей,  $\sum_{\beta} q_{\alpha\beta} \leq 1$ .

Введем производящие функции предельных вероятностей

$$f_{\alpha}(s) = \sum_{\beta} q_{\alpha\beta} s^{\beta}, \quad g_{\beta}(z) = \sum_{\alpha} \frac{z^{\alpha}}{\alpha!} q_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in N^n.$$

Очевидно, что функция  $f_{\alpha}(s)$  является аналитической в области  $|s| < 1$ , функция  $g_{\beta}(z)$  — аналитическая функция переменных  $z_1, \dots, z_n$ .

Пусть ветвящийся процесс  $\xi(t)$  задан комплексами взаимодействия  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$  и распределениями (1.2.13). Для нахождения пределов (1.1.22) используются стационарные уравнения Колмогорова.

**Теорема 1.1.3.** Производящая функция предельных вероятностей  $f_{\alpha}(s)$  ветвящегося процесса с взаимодействием при любом  $\alpha$  удовлетворяет при  $|s| \leq 1$  линейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\sum_{i=1}^l \lambda_i (h_i(s) - s^{\varepsilon_i}) \frac{\partial^{\varepsilon_i} f_{\alpha}(s)}{\partial s^{\varepsilon_i}} = 0 \quad (1.1.23)$$

**Теорема 1.1.4.** Экспоненциальная производящая функция предельных вероятностей  $g_{\beta}(z)$  ветвящегося процесса с взаимодействием при любом  $\beta$  удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\sum_{i=1}^l \lambda_i z^{\varepsilon_i} \left( h_i \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{\partial^{\varepsilon_i}}{\partial z^{\varepsilon_i}} \right) g_{\beta}(z) = 0. \quad (1.1.24)$$

Предельное поведение ветвящихся процессов с взаимодействием рассматривается в разнообразных конкретных ситуациях. Физические, химические, биологические системы взаимодействующих частиц могут войти с течением времени либо в стационарное состояние, либо выродиться, т.е. прийти в такое (поглощающее) состояние, когда дальнейшее взаимодействие невозможно, и система навсегда остается в таком состоянии. Для нахождения стационарного распределения вероятностей решается второе уравнение



(1.1.23), для нахождения вероятностей вырождения (финальных вероятностей) решается стационарное первое уравнение (1.1.24).

### 1.1.5. Ветвящиеся процессы.

Специальный класс марковских процессов  $B_1$  выделяется из класса  $B_2$  условиями на число частиц, входящих в комплексы взаимодействия:  $|\varepsilon^i| \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Пусть для определенности,

$$A = \{\varepsilon^1 = (1, 0, \dots, 0), \varepsilon^2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \varepsilon^n = (0, \dots, 0, 1)\}.$$

Тогда

$$\varphi_\alpha^i = \lambda_i \alpha_i, \quad \alpha \in N^n, \quad i = 1, \dots, n,$$

и вторая система уравнений (1.1.12) равносильна уравнению в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (h_i(s) - s_i) \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_i}, \quad F_\alpha(0; s) = s^\alpha. \quad (1.1.25)$$

Решение линейного дифференциального уравнения первого порядка (1.1.25) обладает свойством ветвления:

$$F_\alpha(t; s) = F_{\varepsilon^1}^{\alpha_1}(t; s) F_{\varepsilon^2}^{\alpha_2}(t; s) \dots F_{\varepsilon^n}^{\alpha_n}(t; s).$$

Свойство ветвления — основное свойство, выделяющее из марковских процессов ветвящиеся процессы — состоит в том, что частицы, существующие в момент времени  $t$ , в любой момент  $t + t_1, t_1 > 0$ , эволюционируют и дают потомство независимо друг от друга. Из свойства ветвления и уравнения (1.1.21) следует система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для одночастичных производящих функций

$$\frac{\partial F_{\varepsilon^i}(t; s)}{\partial t} = \lambda_i (h_i(F_{\varepsilon^1}(t; s), F_{\varepsilon^2}(t; s), \dots, F_{\varepsilon^n}(t; s)) - F_{\varepsilon^i}(t; s)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1.26)$$

с начальными условиями  $F_{\varepsilon^1}(0; s) = s_1, \dots, F_{\varepsilon^n}(0; s) = s_n$ .

### 1.1.6. Моделирование на ЭВМ марковских процессов методом Монте-Карло.

Реализации марковского процесса  $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$  строятся методом Монте-Карло [11]. Алгоритм моделирования следующий.

Вводятся исходные данные:  $[0, T]$  — время моделирования;  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  — начальное состояние;  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^l$  — комплексы взаимодействия;  $\{p_\gamma^1\}, \dots, \{p_\gamma^l\}$  — распределение вероятностей на  $N^n$ ;  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  — набор чисел.

Используются переменные:  $m$  — номер итерации алгоритма;  $t^{(m)}$  —  $m$ -й момент времени изменения состояния марковского процесса;  $\beta^{(m)} = (\beta_1^{(m)}, \dots, \beta_n^{(m)})$  — состояние процесса на  $m$ -й итерации;  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l)$  — вектор случайных времен,  $\tau_{min}$  — минимальная координата вектора  $\tau$ ;  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l)$  — вектор скачка, координаты которого вычисляются на  $m$ -й

итерации;  $r = random[0, 1]$  — генератор случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке  $[0, 1]$ .

1. Начальные значения переменных:  $m = 0$ ,  $t^{(0)} = 0$ ,  $\beta^{(0)} = \alpha$ .

2. Реализация вектора  $\tau$ . Цикл по  $i = 1, \dots, l$ .

2.1. Если  $\beta_k^{(m)} < \varepsilon_k^i$  при некотором  $k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , то  $\tau^i = \infty$ . Иначе  $r = random[0, 1]$ , вычислить  $\varphi_{\beta^{(m)}}^i$  по формуле (1.2.16) и присвоить значение  $\tau_i = -(1/\varphi_{\beta^{(m)}}^i) \ln(1 - r)$ .

3. Определить  $\tau_{min} = \min(\tau_1, \dots, \tau_l)$ . Пусть  $\tau_{min} = \tau^i$ . Если  $\tau_{min} = \infty$ , то конец алгоритма.

4. Задать  $r = random[0, 1]$ . С помощью  $r$  реализовать случайный вектор  $\gamma$  с распределением  $\{p_\gamma^i\}$ .

5. Присвоить значения переменным:  $t^{(m+1)} = t^{(m)} + \tau_{min}$ ,  $\beta^{(m+1)} = \beta^{(m)} - \varepsilon^i + \gamma$ .

6. Если  $t^{(m+1)} < T$ , то  $m := m + 1$  и переход к п.2. Иначе конец алгоритма.

## § 1.2. Системы линейных дифференциальных уравнений.

### 1.2.1. Определения и основные свойства решений.

Нормальной системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) называют систему ОДУ вида [4]

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + g_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.2.1)$$

где  $x_i(t)$  — неизвестные функции, подлежащие определению;  $a_{ij}(t)$  и  $g_i(t)$  — известные функции аргумента  $t \in T$ , непрерывные в некотором промежутке  $T \subset R$  числовой прямой  $R$ . Для линейной системы (1.2.1) в области  $D = T \times R^n$  выполнены все условия теоремы Коши существования и единственности решения. Действительно, для любого номера  $i$  правая часть в (1.2.1) имеет непрерывные в промежутке  $T$  частные производные по любому из аргументов  $x_j, (j = \overline{1, n})$ , что, равносильно выполнению для правой части системы ОДУ (1.2.1) условия Липшица относительно всех аргументов  $x_j, (j = \overline{1, n})$  при любых значениях  $t \in T$ .

Запись системы в виде (1.2.1) можно упростить, если воспользоваться матричными обозначениями:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}; \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}; \quad \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\vec{x}(t)$  и  $\vec{g}(t)$  — вектор-функции;  $A(t)$  — матрица системы ОДУ. С учетом введенных обозначений систему (1.2.1) перепишем в виде

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{g}(t). \quad (1.2.2)$$

Если  $\vec{g}(t) \equiv 0$  в  $T$ , то

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}. \quad (1.2.3)$$

Систему (1.2.3) называют нормальной однородной системой линейных ОДУ, соответствующей системе (1.2.2). При  $\vec{g}(t) \neq 0$  в  $T$  система линейных ОДУ будет неоднородной.

**Теорема 1.2.1.** Линейная комбинация решений однородной системы (1.2.3) также является решением этой системы.

**Теорема 1.2.2.** Разность любых двух решений неоднородной системы ОДУ (1.2.2) есть решение однородной системы (1.2.3).

**Теорема 1.2.3.** Сумма решения неоднородной системы (1.2.2) и решения соответствующей ей однородной системы (1.2.3) есть решение неоднородной системы (1.2.2).

**Теорема 1.2.4.** Если  $\vec{x}_1(t)$  и  $\vec{x}_2(t)$  — решения нормальных систем ОДУ соответственно

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{g}(t) \quad \text{и} \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t)$$

то  $\vec{x}(t) = \vec{x}_1(t) + \vec{x}_2(t)$  является решением нормальной системы линейных ОДУ

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{g}(t) + \vec{f}(t).$$

Рассмотрим вектор-функции

$$\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_i(t), \dots, \vec{x}_n(t), \quad (1.2.4)$$

необязательно являющиеся решениями систем (1.2.2) или (1.2.3).

**Определение 1.2.1.** Систему вектор-функций (1.2.4) называют линейно зависимой в некотором промежутке  $T \subseteq R$  числовой прямой  $R$ , если существует такая система чисел

$$\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n \in R, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \neq 0,$$

что имеет место тождество

$$\lambda_1 \vec{x}_1(t) + \dots + \lambda_i \vec{x}_i(t) + \dots + \lambda_n \vec{x}_n(t) \equiv 0 \quad \forall t \in T. \quad (1.2.5)$$

Если же такой системы чисел не существует, то систему вектор-функций (1.2.4) называют линейно независимой в промежутке  $T$ .

Любая система вектор-функций, включающая вектор-функцию, тождественно равную в промежутке  $T$  нулевому вектору, является, согласно определению 1.2.1, линейно зависимой. Действительно, выбирая в (1.2.5) коэффициент при такой функции отличным от нуля и полагая коэффициенты при остальных функциях равными нулю, приходим к тождеству для любых  $t \in T$ .

Система вектор-функций линейно независима в каком-либо промежутке  $T$ , если она линейно независима в меньшем промежутке  $T_1 \subset T$ . Если система линейно зависима в  $T$ , то ее линейная зависимость будет сохранена и в  $T_1 \subset T$ , но обратное, вообще говоря, неверно.

### 1.2.2. Определитель Вронского. Фундаментальная система решений. Формула Остроградского — Лиувилля.

Пусть задана система  $n$  вектор-функций

$$\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_k(t), \dots, \vec{x}_n(t), \quad \vec{x}_k(t) = (x_{1k}(t), \dots, x_{nk}(t))^T, \quad k = \overline{1, n},$$

определенная в некотором промежутке  $T \subseteq R$  числовой прямой  $R$ .

Определитель

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \quad (1.2.6)$$

называют определителем Вронского системы вектор-функций  $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$  по имени польского математика Ю. Вронского (1776-1853). Сформулируем в виде теорем свойства этого определителя.

**Теорема 1.2.5.** Если система вектор-функций

$$\vec{x}_k(t) = (x_{1k}(t), \dots, x_{nk}(t))^T, \quad k = \overline{1, n}, \quad (1.2.7)$$

линейно зависима в некотором промежутке  $T \subseteq R$ , то определитель Вронского  $W(t) \equiv 0 \quad \forall t \in T$ .

**Теорема 1.2.6.** Если определитель  $W(t)$  для системы вектор-функций (1.2.7), являющихся в промежутке  $T \subseteq R$  решениями однородной системы линейных ОДУ (1.2.3), равен нулю хотя бы в одной точке  $t_0 \in T$ , то эта система вектор-функций линейно зависима в промежутке  $T$ .

Из теоремы (1.2.6) вытекает следствие.

**Следствие 1.2.1.** Если определитель  $W(t)$ , составленный из вектор-функций, являющихся решениями однородной системы линейных ОДУ (1.2.3) в некотором промежутке  $T$ , равен нулю в одной точке  $t_0 \in T$ , т.е.  $W(t_0) = 0$ , то он тождественно равен нулю в этом промежутке ( $W(t) \equiv 0 \quad \forall t \in T$ ).

Одним из важнейших понятий в теории однородных систем линейных ОДУ является понятие фундаментальной системы решений.

**Определение 1.2.2.** Линейно независимую в промежутке  $T \subseteq R$  систему из  $n$  вектор-функций вида (1.2.7), каждая из которых является в нем решением однородной системы  $n$  линейных ОДУ (1.2.3), называют фундаментальной системой решений для (1.2.3) в этом промежутке.

**Теорема 1.2.7.** Фундаментальные системы решений существуют.

Запись в виде (1.2.3) соответствует нормальной однородной системе линейных ОДУ с переменными коэффициентами, поскольку элементы  $a_{ij}(t)$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) матрицы  $A(t)$  этой системы являются функциями независимого переменного  $t$ . Такие системы удается проинтегрировать и получить решение в виде аналитической зависимости лишь в исключительных случаях. Однако существует одна замечательная формула, связывающая между собой решения произвольной системы (1.2.3) ОДУ с переменными коэффициентами.

Вычислим производную по  $t$  от определителя Вронского (1.2.6), составленного из решений  $\vec{x}_k(t) = (x_{1k}(t), \dots, x_{nk}(t))^T, \quad k = \overline{1, n}$ , системы ОДУ (1.3.3):

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} = & \begin{vmatrix} \frac{dx_{11}(t)}{dt} & \frac{dx_{12}(t)}{dt} & \dots & \frac{dx_{1n}(t)}{dt} \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \frac{dx_{21}(t)}{dt} & \frac{dx_{22}(t)}{dt} & \dots & \frac{dx_{2n}(t)}{dt} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \\
& + \dots + \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dx_{n1}(t)}{dt} & \frac{dx_{n2}(t)}{dt} & \dots & \frac{dx_{nn}(t)}{dt} \end{vmatrix}. \tag{1.2.8}
\end{aligned}$$

В (1.2.8) использовано правило вычисления производной от определителя квадратной матрицы размера  $n$ . Так как определитель представляет собой сумму  $n!$  слагаемых с соответствующими знаками, а каждое слагаемое есть произведение  $n$  элементов, то, используя правило дифференцирования произведения  $n$  функций, приходим к записи (1.2.8). Вектор-функция  $\vec{x}_k(t)$  является решением однородной системы (1.2.3), т.е.

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j.$$

Поэтому первый определитель в правой части (1.2.8) имеет вид

$$\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}(t)x_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{2j}(t)x_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{nj}(t)x_{jn} \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = a_{11}(t)W.$$

Здесь использовано правило сложения определителей, а также то, что определитель, имеющий две одинаковые строки, равен нулю.

Аналогично второе, третье и т.д. (вплоть до последнего) слагаемые в (1.2.8) равны:

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \frac{dx_{21}(t)}{dt} & \frac{dx_{22}(t)}{dt} & \dots & \frac{dx_{2n}(t)}{dt} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = a_{22}(t)W, \\
& \dots \\
& \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dx_{n1}(t)}{dt} & \frac{dx_{n2}(t)}{dt} & \dots & \frac{dx_{nn}(t)}{dt} \end{vmatrix} = a_{nn}(t)W.
\end{aligned}$$

С учетом этих выражений (1.2.8) принимает вид

$$\frac{dW}{dt} = W \sum_{i=1}^n a_{ii}(t). \quad (1.2.9)$$

Отсюда следует, что определитель Вронского удовлетворяет линейному однородному ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, получаем соотношение

$$W(t) = W(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n a_{ii}(t) dt \right). \quad (1.2.10)$$

которое называют формулой Остроградского — Лиувилля.

### 1.2.3. Теоремы о структуре общего решения однородной и неоднородной систем.

Выше отмечалось, решение однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вида (1.2.3) с переменными коэффициентами в общем случае не удастся получить при помощи операции интегрирования. Однако можно указать структуру общего решения как системы (1.2.3), так и системы линейных неоднородных ОДУ вида (1.2.1), которую также называют нормальной неоднородной системой линейных ОДУ с переменными коэффициентами.

Важно подчеркнуть, что это решение включает  $n$  произвольных постоянных  $C_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Следующая теорема позволяет не только указать структуру общего решения однородной системы вида (1.2.3), но и установить, что в случае задачи Коши для системы линейных ОДУ эти постоянные определены однозначно.

**Теорема 1.2.8.** Если вектор-функции

$$\vec{x}_k(t) = (x_{1k}(t), \dots, x_{nk}(t))^T, \quad k = \overline{1, n},$$

определенные в промежутке  $T$  числовой прямой  $R$ , образуют в нем фундаментальную систему решений однородной системы линейных ОДУ (1.2.3), то общее решение этой системы имеет вид

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^n C_k \vec{x}_k(t), \quad (1.2.11)$$

с некоторыми постоянными коэффициентами  $C_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

Нетрудно заметить, что совокупность решений однородной системы (1.2.3) образует  $n$ -мерное линейное пространство. Любая фундаментальная система решений служит базисом в этом пространстве.

**Теорема 1.2.9.** Общее решение неоднородной системы (1.2.2) есть сумма общего решения соответствующей ей однородной системы (1.2.3) и частного решения неоднородной системы (1.2.2)

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_*(t) + \sum_{k=1}^n C_k \vec{x}_k(t), \quad (1.2.12)$$

Здесь  $\vec{x}_*(t)$  — частное решение неоднородной системы (1.2.2), определенное в промежутке  $T$ ;  $\vec{x}_k(t)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , — фундаментальная система решений соответствующей однородной системы (1.2.3), определенных в том же промежутке;  $C_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , — некоторые постоянные коэффициенты.

Несмотря на достаточно общий характер теорем 1.2.8 и 1.2.9, они не только играют важнейшую роль в теории ОДУ, но и указывают путь решения систем линейных ОДУ с переменными коэффициентами.

#### 1.2.4. Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение системы.

Пусть все коэффициенты  $a_{ij}$  в нормальной системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (1.2.1) постоянны. Иначе говоря, постоянны все элементы матрицы  $A(t)$  системы:  $a_{ij} = \text{const}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ . Такую систему называют нормальной системой линейных ОДУ с постоянными коэффициентами. При этом, если  $\vec{g}(t) \neq 0$  в некотором промежутке  $T$  числовой прямой  $R$ , в котором рассматривают решение этой системы ОДУ, то систему называют неоднородной, а в противном случае — однородной. Среди систем линейных ОДУ система ОДУ с постоянными коэффициентами — один из немногих случаев, допускающих интегрирование. При выяснении вопроса об интегрировании можно ограничиться рассмотрением однородной системы линейных ОДУ с постоянными коэффициентами, которая может быть записана в матричной форме

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad (1.2.13)$$

где  $A$  — заданная матрица, а  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  — искомая вектор-функция.

Будем искать не равное тождественно нулю решение системы (1.2.13) в виде

$$\vec{x}(t) = \alpha e^{\lambda t}, \quad (1.2.14)$$

где  $\alpha \in R^n$  ( $\alpha \neq 0$ )  $\lambda \in R$  подлежат определению. Продифференцировав  $\vec{x}(t)$  как вектор-функцию:  $\frac{d}{dt}(\alpha e^{\lambda t}) = \lambda \alpha e^{\lambda t}$ , подставим в (1.2.13):  $\lambda \alpha e^{\lambda t} = A(\alpha e^{\lambda t})$ . В этом матричном уравнении  $e^{\lambda t}$  представляет собой ненулевой скалярный множитель, на который можно сократить. Получим матричное уравнение  $A\alpha = \lambda\alpha$ . С помощью единичной матрицы  $E$  уравнение можно преобразовать к виду

$$(A - \lambda E)\alpha = 0. \quad (1.2.15)$$

Это уравнение показывает, что искомый вектор  $\alpha$  является собственным вектором матрицы  $A$ . В координатной форме уравнение (1.2.15) имеет вид

$$\begin{aligned} &(a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0; \\ &a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0; \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0. \end{aligned} \tag{1.2.16}$$



Мы получили однородную систему линейных алгебраических уравнений. Для того чтобы она имела ненулевое решение  $\alpha \in R^n$ , необходимо и достаточно, чтобы равнялся нулю ее определитель:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1.2.17)$$

Раскрытие определителя (1.2.17) приводит к алгебраическому уравнению  $n$ -й степени относительно  $\lambda$ . Его называют характеристическим уравнением матрицы  $A$ , а в теории дифференциальных уравнений — характеристическим уравнением системы ОДУ (1.2.13).

### § 1.3. Дифференциальные уравнения первого порядка в частных производных.

#### 1.3.1. Линейное дифференциальное уравнение. Уравнения характеристик. Задача Коши.

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка в частных производных называют уравнение [4]

$$a_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, \dots, x_n) \quad (1.3.1)$$

где  $a_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$  и  $b(x_1, \dots, x_n)$  — заданные функции  $n$  независимых переменных  $x_1, \dots, x_n$ , непрерывно дифференцируемые в некоторой области  $D \subseteq R^n$ ;  $u(x_1, \dots, x_n)$  — искомая функция.

Если в уравнении (1.3.1)  $b(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$  во всех точках  $(x_1, \dots, x_n)$  области  $D$ , то будем иметь линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка с частными производными

$$a_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad (1.3.2)$$

соответствующее неоднородному уравнению. Решением дифференциальных уравнений (1.3.1) и (1.3.2) в области  $D$  будем называть непрерывно дифференцируемую в  $D$  функцию, которая обращает эти уравнения в тождества в любой точке  $(x_1, \dots, x_n) \in D$ .

Рассмотрим сначала однородное уравнение (1.3.2) и поставим ему в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.3.3)$$

Поскольку  $dt = \frac{dx_i}{a_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то систему (1.3.3) можно представить в симметричной форме записи

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_i}{a_i} = \dots = \frac{dx_n}{a_n}.$$

Систему (1.4.3) называют системой уравнений характеристик для однородного дифференциального уравнения (1.3.2), а ее траектории характеристиками.

**Теорема 1.3.1** Функция  $u(x_1, \dots, x_n)$  является решением дифференциального уравнения (1.3.2) в области  $D$  тогда и только тогда, когда она есть первый интеграл системы (1.3.3) уравнений характеристик в этой области.

Пусть  $\varphi_j(x_1, \dots, x_n)$ ,  $j = 1, \dots, n-1$  — первые интегралы системы уравнений характеристик, и при этом они являются независимыми в области  $D$ . Приведем формулировку теоремы, устанавливающей структуру общего решения однородного уравнения.

**Теорема 1.3.2** Любое решение однородного дифференциального уравнения в области  $D$  имеет вид

$$u = \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \quad (1.3.4)$$

где  $\varphi_j(x_1, \dots, x_n)$ ,  $j = 1, \dots, n-1$  — первые интегралы системы уравнений характеристик в области  $D$ , а  $\Phi$  — произвольная функция, непрерывно дифференцируемая в этой области.

Иными словами, формула (1.3.4) описывает все множество решений дифференциального уравнения (1.3.2) в области  $D$ .

Задача Коши для ДУ (1.3.2) ставится так: найти такое решение ДУ, которое на поверхности  $S$  совпадает с заданной функцией.

Перейдем теперь к рассмотрению неоднородного ДУ. Его решение будем искать в неявном виде

$$W(x_1, \dots, x_n, u) = 0. \quad (1.3.5)$$

В силу правила дифференцирования неявной функции имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\partial W / \partial x_i}{\partial W / \partial u}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.3.6)$$

Подставляя (1.3.6) в неоднородное ДУ (1.3.1), получим

$$a_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial W}{\partial x_1} + a_2(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial W}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial W}{\partial x_n} + b(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial W}{\partial u} = 0 \quad (1.3.7)$$

Уравнение (1.3.7) является линейным однородным ДУ относительно искомой функции  $W$  включает частные производные этой функции по  $n+1$ -му независимому переменному  $x_1, \dots, x_n, u$ . Этому ДУ соответствует система уравнений характеристик

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_i}{a_i} = \dots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{b}. \quad (1.3.8)$$

Пусть функции  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n, u)$ ,  $i = 1, \dots, n$  являются в области

$$D_1 = \{(x_1, \dots, x_n, u) : (x_1, \dots, x_n) \in D\} \subseteq R^{n+1}$$

независимыми первыми интегралами системы (1.3.8). Тогда общее решение однородного ДУ (1.3.7) в силу теоремы 1.3.2 имеет вид

$$W = \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_n),$$

где  $\Phi$  — произвольная непрерывно дифференцируемая в области  $D_1$  функция, такая, что  $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \neq 0$  в области  $D_1$ . Из (1.3.5) следует, что равенство

$$\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = 0 \quad (1.3.9)$$

задает искомое решение  $u$  ДУ (1.3.1) как неявную функцию независимых переменных  $x_1, \dots, x_n$ .

Задача Коши для неоднородного ДУ (1.3.1) ставится так же, как и для однородного ДУ (1.3.2)

### 1.3.2. Квазилинейное дифференциальное уравнение.

Квазилинейным дифференциальным уравнением первого порядка называют ДУ с частными производными

$$a_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, \dots, x_n, u). \quad (1.3.10)$$

где  $a_i(x_1, \dots, x_n, u)$ ,  $i = 1, \dots, n$  и  $b(x_1, \dots, x_n, u)$  — заданные функции, непрерывно дифференцируемые в некоторой области  $D_1 \subseteq R^{n+1}$  изменения  $n$  переменных  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и искомой функции  $u$ . Подчеркнем, что, в отличие от ДУ (1.4.1), коэффициенты  $a_i$   $i = 1, \dots, n$  и правая часть  $b$  в квазилинейном ДУ зависят от искомой функции  $u$ .

Процесс нахождения общего решения ДУ (1.3.10) аналогичен нахождению общего решения неоднородного линейного ДУ. Приведем основные этапы этого процесса.

Система уравнений характеристик для квазилинейного ДУ по форме полностью совпадает с системой для неоднородного ДУ. Интегральные кривые этой системы называют характеристиками квазилинейного ДУ. Если в области  $D_1$  найдены  $n$  первые независимых интегралов  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n, u)$ ,  $i = 1, \dots, n$  системы уравнений характеристик, то все решения квазилинейного ДУ (1.3.10) можно получить из равенства (1.3.9), в котором  $\Phi$  — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Постановка задачи Коши для квазилинейного ДУ аналогична постановке этой задачи для однородного линейного уравнения. При практическом решении этой задачи необходимо руководствоваться следующими правилами.

Пусть решение  $u(\bar{x})$ ,  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ , ДУ должно удовлетворять условию  $u(\bar{x}) = \Psi(\bar{x})$  на поверхности  $S$ , которая задана уравнением  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ . После нахождения первых интегралов  $\varphi_i(\bar{x}, u)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , системы уравнений характеристик, исключив из системы уравнений

$$\varphi_i(\bar{x}, u) = c_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad f(\bar{x}) = 0; \quad u = \Psi(\bar{x}),$$

переменные  $x_1, \dots, x_n, u$  получим равенство  $F(c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ , в которое следует подставить  $\varphi_i(\bar{x}, u) = c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда получим

$$F(\varphi_1(\bar{x}, u), \varphi_2(\bar{x}, u), \dots, \varphi_n(\bar{x}, u)) = 0.$$

Одно из решений  $u(\bar{x})$  этого уравнения и будет искомым.

## Глава 2

### Система массового обслуживания с подвижными заявками. Аналитический метод.

#### § 2.1. Постановка задачи

Исследование системы обслуживания покупателей крупного гипермаркета.

В гипермаркет приходит большое количество покупателей, такое, что некоторым покупателям придется ожидать обслуживания. При этом продавцы-консультанты могут обслуживать не одного, а нескольких покупателей сразу, так что, количество покупателей, обслуживаемых одним продавцом можно считать случайной величиной, время обслуживания также случайное. Некоторые из покупателей, посчитав, что придётся слишком долго ждать, покидают очередь. Из оставшихся, пройдя через кассу, часть покупателей вспоминает, что забыли купить некоторые необходимые им товары и снова возвращаются в очередь.

В данной работе мы будем рассмотрим математическую модель этой системы массового обслуживания, описываемую марковским ветвящимся случайным процессом со схемой превращений [9]

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \longrightarrow T_1, T_2 \\ T_1 \longrightarrow T_2, T_3 \\ T_2 \longrightarrow T_1, T_3 \end{array} \right.$$

Также будет рассмотрена обобщенная задача:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \longrightarrow T_1, \dots, T_n \\ T_1 \longrightarrow T_2, T_3, \dots, T_{n+1} \\ T_2 \longrightarrow T_1, T_3, \dots, T_{n+1} \\ \dots \\ T_n \longrightarrow T_1, T_2, \dots, T_{n-1}, T_{n+1} \end{array} \right.$$

## § 2.2. Явные решения уравнений Колмогорова для схем с тремя типами элементов.

### 2.2.1. Схема $0 \longrightarrow T_1, T_2; T_1 \longrightarrow T_2, T_3; T_2 \longrightarrow T_1, T_3$ .

Будем рассматривать однородный во времени марковский процесс  $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$  со схемой превращений

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow T_1, T_2 \\ T_1 \longrightarrow T_2, T_3 \\ T_2 \longrightarrow T_1, T_3 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Опишем этот процесс через случайные времена нахождения и скачки

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \xrightarrow{p_1^0} (\alpha_1 + 1, \alpha_2, \alpha_3), \quad P\{\tau_1 < t\} = 1 - e^{-\lambda_0 t}, \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \xrightarrow{p_2^0} (\alpha_1, \alpha_2 + 1, \alpha_3), \quad P\{\tau_1 < t\} = 1 - e^{-\lambda_0 t}, \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \xrightarrow{p_2^1} (\alpha_1 - 1, \alpha_2 + 1, \alpha_3), \quad P\{\tau_2 < t\} = 1 - e^{-\lambda_1 \alpha_1 t}, \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \xrightarrow{p_3^1} (\alpha_1 - 1, \alpha_2, \alpha_3 + 1), \quad P\{\tau_2 < t\} = 1 - e^{-\lambda_1 \alpha_1 t}, \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \xrightarrow{p_1^2} (\alpha_1 + 1, \alpha_2 - 1, \alpha_3), \quad P\{\tau_3 < t\} = 1 - e^{-\lambda_2 \alpha_2 t}, \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \xrightarrow{p_3^2} (\alpha_1, \alpha_2 - 1, \alpha_3 + 1), \quad P\{\tau_3 < t\} = 1 - e^{-\lambda_2 \alpha_2 t}, \end{array} \right.$$

$\tau^j$  — случайные времена нахождения в данном состоянии. В каждый следующий момент времени взаимодействие происходит по  $l$ -тому варианту, для которого  $\tau^l = \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$

Данной модели соответствует марковский случайный процесс превращения с тремя типами частиц и тремя комплексами взаимодействия. Второе уравнение Колмогорова для производящей функции переходных вероятностей  $F_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(t; s_1, s_2, s_3)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial t} &= \lambda_1(p_2^1 s_2 + p_3^1 s_3 - s_1) \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1} + \\ &+ \lambda_2(p_1^2 s_1 + p_3^2 s_3 - s_2) \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_2} + \lambda_0(p_1^0 s_1 + p_2^0 s_2 - 1) F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3), \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

с начальным условием  $F_\alpha(0; s_1, s_2, s_3) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} s_3^{\alpha_3}$ .

Это уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка в частных производных. Поставим в соответствие этому ДУ систему обыкновенных

дифференциальных уравнений (систему уравнений характеристик)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dt}{d\tau} = -1, \\ \frac{ds_1}{d\tau} = \lambda_1(p_2^1 s_2 + p_3^1 s_3 - s_1), \\ \frac{ds_2}{d\tau} = \lambda_2(p_1^2 s_1 + p_3^2 s_3 - s_2), \\ \frac{ds_3}{d\tau} = 0, \\ \frac{dF}{d\tau} = \lambda_0(p_1^0 s_1 + p_2^0 s_2 - 1)F, \end{array} \right. \quad (2.2.3)$$

с начальными условиями  $t(0) = 0, s_1(0) = \nu_1, s_2(0) = \nu_2, s_3(0) = \nu_3, F(0) = \nu_1^{\alpha_1} \nu_2^{\alpha_2} \nu_3^{\alpha_3}$ . Очевидно, что

$$t = -\tau, \quad s_3 = \nu_3, \quad (2.2.4)$$

Рассмотрим второе и третье уравнения системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds_1}{d\tau} = \lambda_1(p_2^1 s_2 + p_3^1 \nu_3 - s_1), \\ \frac{ds_2}{d\tau} = \lambda_2(p_1^2 s_1 + p_3^2 \nu_3 - s_2). \end{array} \right.$$

Используя (2.2.4), а также равенство  $(p_2^1 + p_3^1 = 1, p_1^2 + p_3^2 = 1)$ , сделаем замену переменных

$$\tilde{s}_1 = s_1 - \nu_3, \quad \tilde{s}_2 = s_2 - \nu_3,$$

и получим систему однородных дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tilde{s}_1}{d\tau} = \lambda_1(p_2^1 \tilde{s}_2 - \tilde{s}_1), \\ \frac{d\tilde{s}_2}{d\tau} = \lambda_2(p_1^2 \tilde{s}_1 - \tilde{s}_2), \end{array} \right. \quad (2.2.5)$$

или

$$\dot{\tilde{s}} = A\tilde{s},$$

с начальными условиями  $\tilde{s}_1(0) = \nu_1 - \nu_3, \tilde{s}_2(0) = \nu_2 - \nu_3$ , где

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 p_2^1 \\ \lambda_2 p_1^2 & -\lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \dot{\tilde{s}} = \begin{pmatrix} \frac{d\tilde{s}_1}{d\tau} & \frac{d\tilde{s}_2}{d\tau} \end{pmatrix}^T, \quad \tilde{s} = (\tilde{s}_1 \quad \tilde{s}_2)^T.$$

Переходим к решению системы (2.2.5). Найдём корни характеристического уравнения.

$$\det(A - \gamma E) = 0$$

или

$$(\lambda_1 + \gamma)(\lambda_2 + \gamma) - \lambda_1 p_2^1 \lambda_2 p_1^2 = 0,$$

Отсюда имеем

$$\gamma^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\gamma + \lambda_1 \lambda_2 (1 - p_2^1 p_1^2) = 0,$$

Дискриминант этого квадратного уравнения имеет вид

$$D = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4\lambda_1 \lambda_2 (1 - p_2^1 p_1^2),$$

а решения

$$\gamma_{1,2} = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2) \pm \sqrt{D}}{2},$$

при этом  $\gamma_1, \gamma_2 < 0; \gamma_1 \neq \gamma_2$ . В общем виде решения системы уравнений можно записать так;

$$\tilde{s}_1 = C_1 \beta_{11} e^{\gamma_1 \tau} + C_2 \beta_{21} e^{\gamma_2 \tau}, \quad \tilde{s}_2 = C_1 \beta_{12} e^{\gamma_1 \tau} + C_2 \beta_{22} e^{\gamma_2 \tau},$$

здесь  $\beta_{ij}, i, j = 1, 2$  — компоненты векторов, коллинеарных собственным векторам матрицы  $A$ ;  $B = (\beta_{ij}), i, j = 1, 2$ . Находим эти векторы для матрицы  $A$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_2^1 \\ \lambda_1 + \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_2^1 \\ \lambda_1 + \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Подставляя начальные условия, получим:

$$\nu_1 - \nu_3 = C_1 \beta_{11} + C_2 \beta_{21}, \quad \nu_2 - \nu_3 = C_1 \beta_{12} + C_2 \beta_{22},$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_2^1 & \lambda_1 p_2^1 \\ \lambda_1 + \gamma_1 & \lambda_1 + \gamma_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \nu_1 - \nu_3 \\ \nu_2 - \nu_3 \end{pmatrix}. \quad (2.2.6)$$

Для дальнейших вычислений найдем матрицу  $B^{-1}$ :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_2^1 & \lambda_1 p_2^1 \\ \lambda_1 + \gamma_1 & \lambda_1 + \gamma_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} \lambda_1 + \gamma_2 & -\lambda_1 p_2^1 \\ -\lambda_1 + \gamma_1 & \lambda_1 p_2^1 \end{pmatrix},$$

$$\det B = \lambda_1 p_2^1 (\gamma_2 - \gamma_1) = \lambda_1 p_2^1 \sqrt{D}.$$

С другой стороны  $C_1, C_2$  можно выразить из решений  $s_1, s_2$ :

$$\begin{pmatrix} C_1 e^{\gamma_1 \tau} \\ C_2 e^{\gamma_2 \tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_2^1 & \lambda_1 p_2^1 \\ \lambda_1 + \gamma_1 & \lambda_1 + \gamma_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s_1 - s_3 \\ s_2 - s_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} C_1 e^{\gamma_1 \tau} \\ C_2 e^{\gamma_2 \tau} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} \lambda_1 + \gamma_2 & -\lambda_1 p_2^1 \\ -\lambda_1 + \gamma_1 & \lambda_1 p_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 - s_3 \\ s_2 - s_3 \end{pmatrix},$$



$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\det B} ((\lambda_1 + \gamma_2)(s_1 - s_3) - \lambda_1 p_2^1 (s_2 - s_3)) e^{-\gamma_1 \tau} \\ \frac{1}{\det B} (-(\lambda_1 + \gamma_1)(s_1 - s_3) + \lambda_1 p_2^1 (s_2 - s_3)) e^{-\gamma_2 \tau} \end{pmatrix}. \quad (2.2.7)$$

Эти соотношения используются в дальнейшем.

Теперь решим последнее уравнение из (2.2.3).

$$\frac{dF}{d\tau} = \lambda_0(p_1^0 s_1 + p_2^0 s_2 - 1)F,$$

с начальным условием  $F(0) = \nu_1^{\alpha_1} \nu_2^{\alpha_2} \nu_3^{\alpha_3}$ .

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dF}{F} = \lambda_0(\nu_3 + p_1^0 \lambda_1 p_2^1 (C_1 e^{\gamma_1 \tau} + C_2 e^{\gamma_2 \tau}) + p_2^0 ((\lambda_1 + \gamma_1) C_1 e^{\gamma_1 \tau} + (\lambda_1 + \gamma_2) C_2 e^{\gamma_2 \tau}) - 1) d\tau,$$

$$\ln F = \lambda_0 \left( (\nu_3 - 1)\tau + \frac{C_1}{\gamma_1} (p_1^0 \lambda_1 p_2^1 + \lambda_1 + \gamma_1) e^{\gamma_1 \tau} + \frac{C_2}{\gamma_2} (p_1^0 \lambda_1 p_2^1 + \lambda_1 + \gamma_2) e^{\gamma_2 \tau} \right) + \tilde{C}, \quad (2.1.8)$$

Для удобства положим  $\tilde{C} = \tilde{C}_1 + \ln \tilde{C}_2$ :

$$\ln \left( \frac{F}{\tilde{C}_2} \right) = f(\nu_1, \nu_2, \nu_3, t) + \tilde{C}_1,$$

$$\frac{F}{\tilde{C}_2} = \exp \left\{ f(\nu_1, \nu_2, \nu_3, t) + \tilde{C}_1 \right\}, \quad (2.2.9)$$

Подставив начальные условия, получим:

$$\tilde{C}_2 = \nu_1^{\alpha_1} \nu_2^{\alpha_2} \nu_3^{\alpha_3}, \quad \tilde{C}_1 = -f(\nu_1, \nu_2, \nu_3, 0),$$

$$F = \nu_1^{\alpha_1} \nu_2^{\alpha_2} \nu_3^{\alpha_3} \exp \{ f(\nu_1, \nu_2, \nu_3, t) - f(\nu_1, \nu_2, \nu_3, 0) \},$$

$$\begin{aligned} F = \nu_1^{\alpha_1} \nu_2^{\alpha_2} \nu_3^{\alpha_3} \exp \left\{ \lambda_0((\nu_3 - 1)\tau + \frac{C_1}{\gamma_1} (p_1^0 \lambda_1 p_2^1 + \lambda_1 + \gamma_1)(e^{\gamma_1 \tau} - 1) + \right. \\ \left. + \frac{C_2}{\gamma_2} (p_1^0 \lambda_1 p_2^1 + \lambda_1 + \gamma_2)(e^{\gamma_2 \tau} - 1)) \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Остается выразить  $\nu$  через  $s$ . Ранее вычислили  $C_1, C_2$  сначала через  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ , а потом через  $s_1, s_2, s_3$ . Для этого совместим (2.2.6) с (2.2.7):

$$\begin{pmatrix} \nu_1 - \nu_3 \\ \nu_2 - \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_2^1 & \lambda_1 p_2^1 \\ \lambda_1 + \gamma_1 & \lambda_1 + \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_3 \\ s_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 p_2^1 & \lambda_1 p_2^1 \\ \lambda_1 + \gamma_1 & \lambda_1 + \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\det B} ((\lambda_1 + \gamma_2)(s_1 - s_3) - \lambda_1 p_2^1(s_2 - s_3)) e^{-\gamma_1 \tau} \\ \frac{1}{\det B} (-(\lambda_1 + \gamma_1)(s_1 - s_3) + \lambda_1 p_2^1(s_2 - s_3)) e^{-\gamma_2 \tau} \end{pmatrix}.$$

И учитывая, что  $t = -\tau$ , запишем искомую производящую функцию переходных вероятностей:

$$\begin{aligned} F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3) = \nu_1^{\alpha_1} \nu_2^{\alpha_2} s_3^{\alpha_3} \exp \left\{ -\lambda_0 \left( (s_3 - 1)t + \frac{C_1}{\gamma_1} (p_1^0 \lambda_1 p_2^1 + \lambda_1 + \gamma_1)(e^{-\gamma_1 t} - 1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{C_2}{\gamma_2} (p_1^0 \lambda_1 p_2^1 + \lambda_1 + \gamma_2)(e^{-\gamma_2 t} - 1) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Заметим, что  $F_\alpha(t; 1) \equiv 1$ .

### 2.2.2. Математические ожидания и дисперсии.

Теперь снова вернемся к рассмотрению схемы (2.2.1) и второго уравнения Колмогорова, соответствующей ей.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial t} = \lambda_1(p_2^1 s_2 + p_3^1 s_3 - s_1) \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1} + \\ + \lambda_2(p_1^2 s_1 + p_3^2 s_3 - s_2) \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_2} + \lambda_0(p_1^0 s_1 + p_2^0 s_2 - 1) F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3), \end{aligned}$$

с начальным условием  $F_\alpha(0; s_1, s_2, s_3) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} s_3^{\alpha_3}$ .

Продифференцируем это уравнение по  $s_k$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial t} \right) = -\lambda_1 \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1} + \lambda_1(p_2^1 s_2 + p_3^1 s_3 - s_1) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1^2} + \\ + \lambda_2 p_1^2 \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_2} + \lambda_2(p_1^2 s_1 + p_3^2 s_3 - s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1 \partial s_2} + \\ + \lambda_0 p_1^0 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3) + \lambda_0(p_1^0 s_1 + p_2^0 s_2 - 1) \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_2} \left( \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial t} \right) = \lambda_1 p_2^1 \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1} + \lambda_1(p_2^1 s_2 + p_3^1 s_3 - s_1) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1 \partial s_2} + \\ - \lambda_2 \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_2} + \lambda_2(p_1^2 s_1 + p_3^2 s_3 - s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_2^2} + \\ + \lambda_0 p_2^0 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3) + \lambda_0(p_1^0 s_1 + p_2^0 s_2 - 1) \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_2}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial s_3} \left( \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial t} \right) = \lambda_1 p_3^1 \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1} + \lambda_1(p_2^1 s_2 + p_3^1 s_3 - s_1) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1 \partial s_3} +$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_2 p_3^2 \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_2} + \lambda_2 (p_1^2 s_1 + p_3^2 s_3 - s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_2 \partial s_3} + \\
& + \lambda_0 (p_1^0 s_1 + p_2^0 s_2 - 1) \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_3}.
\end{aligned}$$

Пользуясь тем, что по определению

$$A_i(t) = M\xi_i(t) = \frac{\partial F_\xi(t, 1)}{\partial s_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$p_1^0 + p_2^0 = 1, \quad p_2^1 + p_3^1 = 1, \quad p_1^2 + p_3^2 = 1.$$

Получаем

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = -\lambda_1 A_1 + \lambda_2 p_1^2 A_2 + \lambda_0 p_1^0, \\ \frac{dA_2}{dt} = \lambda_1 p_2^1 A_1 - \lambda_2 A_2 + \lambda_0 p_2^0, \\ \frac{dA_3}{dt} = \lambda_1 p_3^1 A_1 + \lambda_2 p_3^2 \end{cases} \quad (2.2.12)$$

Итак мы получили систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с начальными условиями  $A_i(0) = \alpha_i$ .

Займемся теперь вычислением дисперсии.

$$D_i(t) = D\xi_i(t) = \frac{\partial^2 F_\alpha(t, 1)}{\partial s_i^2} + \frac{\partial F_\alpha(t, 1)}{\partial s_i} - \left( \frac{\partial F_\alpha(t, 1)}{\partial s_i} \right)^2.$$

Пользуясь (2.2.12), найдем сразу при  $s = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} \left( \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial t} \right) &= -2\lambda_1 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1^2} + \\
&+ 2\lambda_2 p_1^2 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1 \partial s_2} + 2\lambda_0 p_1^0 \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial s_2^2} \left( \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial t} \right) &= 2\lambda_1 p_2^1 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1 \partial s_2} + \\
&- 2\lambda_2 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_2^2} + 2\lambda_0 p_2^0 \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_2},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} \left( \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial t} \right) = 2\lambda_1 p_3^1 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1 \partial s_3} + 2\lambda_2 p_3^2 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_2 \partial s_3},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} \left( \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial t} \right) = -(\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_1 p_2^1 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1^2}$$

$$+ \lambda_2 p_1^2 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_2^2} + \lambda_0 p_1^0 \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_2} + \lambda_0 p_2^0 \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_3} \left( \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial t} \right) = \lambda_1 p_2^1 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1 \partial s_3} + \lambda_1 p_3^1 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1 \partial s_2}$$

$$- \lambda_2 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_2 \partial s_3} + \lambda_2 p_3^2 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_2^2} + \lambda_0 p_2^0 \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_3},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_3} \left( \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial t} \right) = -\lambda_1 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1 \partial s_3} + \lambda_1 p_3^1 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1^2}$$

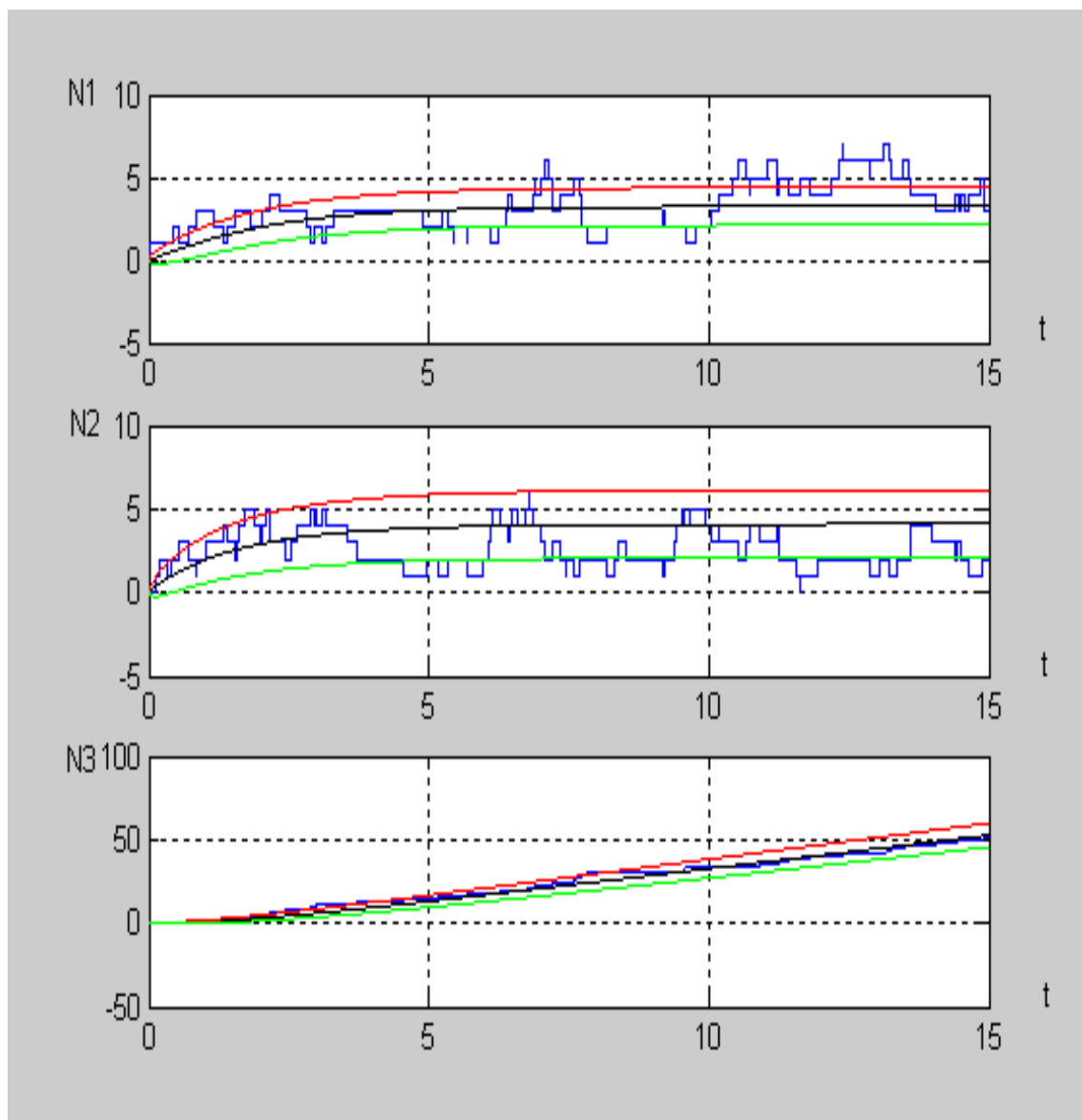
$$+ \lambda_2 p_1^2 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_2 \partial s_3} + \lambda_2 p_3^2 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_0 p_1^0 \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_3},$$

Обозначая  $\frac{\partial^2}{\partial s_i^2} F_\alpha(t; 1) = B_i(t)$  и  $\frac{\partial^2 F_\alpha(t; 1)}{\partial s_i \partial s_j} = B_{ij}(t)$  запишем систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dB_1}{dt} = -2\lambda_1 B_1 + 2\lambda_2 p_1^2 B_{12} + 2\lambda_0 p_1^0 A_1, \\ \frac{dB_2}{dt} = 2\lambda_1 p_2^1 B_{12} - 2\lambda_2 B_2 + 2\lambda_0 p_2^0 A_2, \\ \frac{dB_3}{dt} = 2\lambda_1 p_3^1 B_{13} + 2\lambda_2 p_3^2 B_{23}, \\ \frac{dB_{12}}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2) B_{12} + \lambda_1 p_2^1 B_1 + \lambda_2 p_1^2 B_2 + \lambda_0 p_1^0 A_2 + \lambda_0 p_2^0 A_1, \\ \frac{dB_{23}}{dt} = \lambda_1 p_2^1 B_{13} + \lambda_1 p_3^1 B_{12} - \lambda_2 B_{23} + \lambda_2 p_3^2 B_2 + \lambda_0 p_2^0 A_3, \\ \frac{dB_{13}}{dt} = -\lambda_1 B_{13} + \lambda_1 p_3^1 B_1 + \lambda_2 p_1^2 B_{23} + \lambda_2 p_1^3 B_{12} + \lambda_0 p_1^0 A_3, \end{array} \right. \quad (2.2.13)$$

Решив эту систему уравнений численно, получаем следующие результаты (2.2.1).

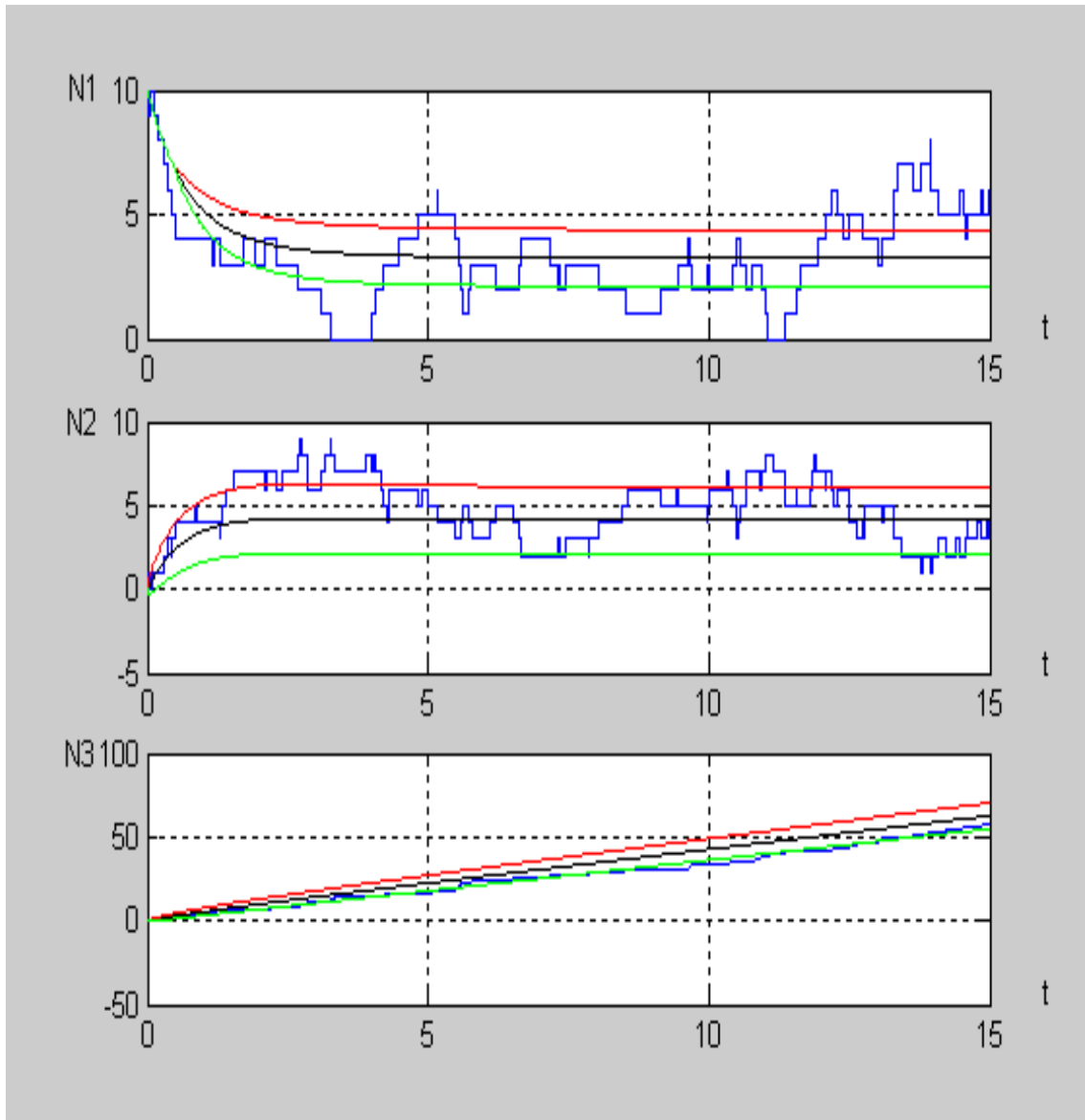
Рис 2.1



— реализация случайного процесса,  
— математическое ожидание  $A_i(t)$ ,  
—  $A_i(t) + \sqrt{D_i(t)}$ ,  
—  $A_i(t) - \sqrt{D_i(t)}$

Параметры интенсивности:  $\lambda_0 = 4, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ .

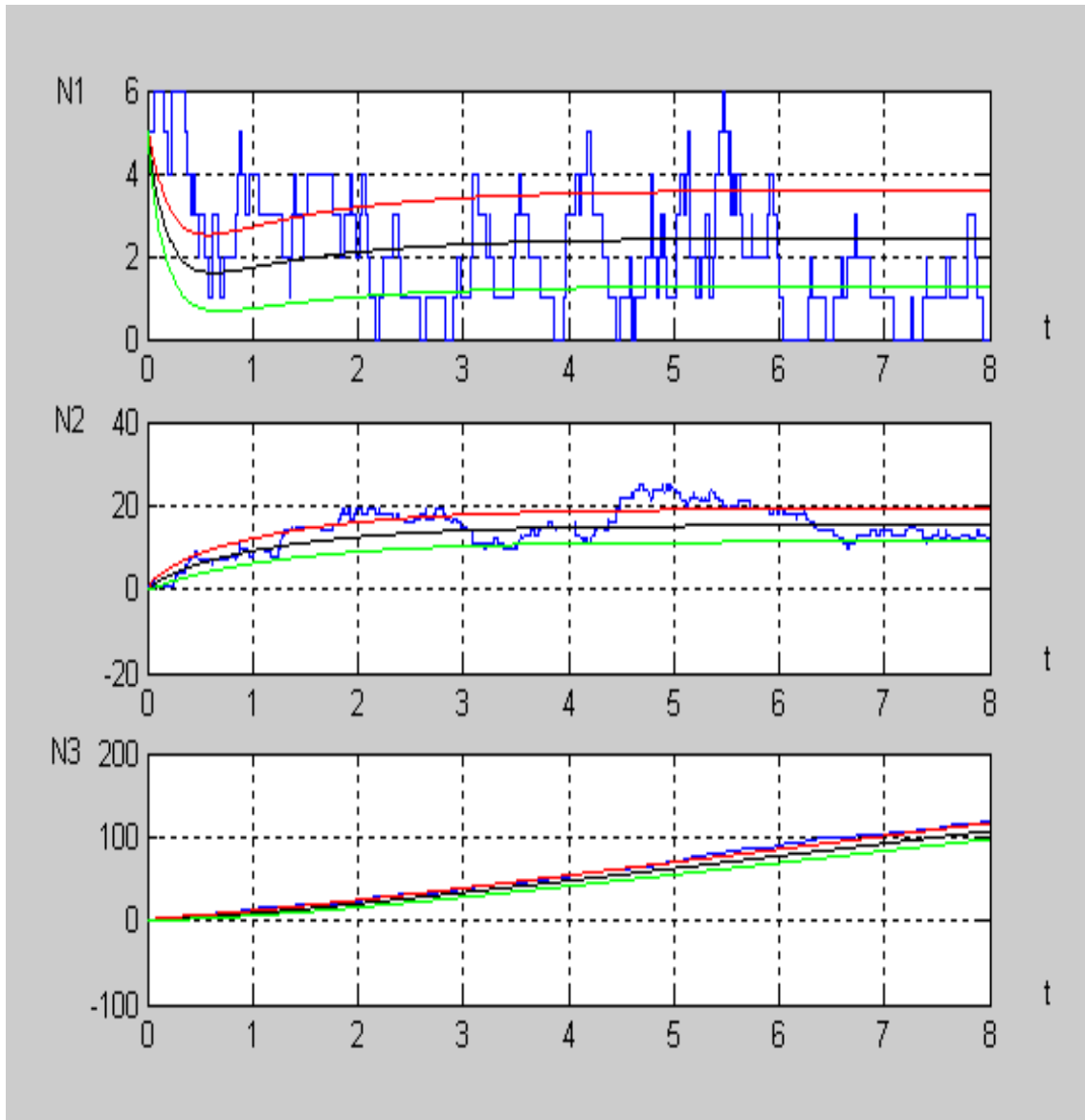
Рис 2.2



- реализация случайного процесса,
- математическое ожидание  $A_i(t)$ ,
- $A_i(t) + \sqrt{D_i(t)}$ ,
- $A_i(t) - \sqrt{D_i(t)}$

Параметры интенсивности:  $\lambda_0 = 4, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ . Начальное число элементов типа  $T_1$  — 10.

Рис 2.3



— реализация случайного процесса,  
 — математическое ожидание  $A_i(t)$ ,  
 —  $A_i(t) + \sqrt{D_i(t)}$ ,  
 —  $A_i(t) - \sqrt{D_i(t)}$

Параметры интенсивности:  $\lambda_0 = 15$ ,  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 1$ . Начальное число элементов типа  $T_1$  — 5.

### 2.2.3. Стационарные вероятности.

Очевидно, что с течением времени для схемы (2.2.1) количество элементов типа  $T_3$  будет только накапливаться. Поэтому не имеет смысла говорить в этом случае о финальном распределении вероятностей. Изменим схему превращений (2.2.1) следующим образом:

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow T_1, T_2 \\ T_1 \longrightarrow T_2, 0 \\ T_2 \longrightarrow T_1, 0 \end{cases} \quad (2.2.14)$$

здесь мы удаляем из системы элементы типа  $T_3$ , оставив без изменений все остальное. Уравнение Колмогорова в этом случае будет выглядеть

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2)}{\partial t} &= \lambda_1(p_2^1 s_2 + p_0^1 - s_1) \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2)}{\partial s_1} + \\ &+ \lambda_2(p_1^2 s_1 + p_0^2 - s_2) \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2)}{\partial s_2} + \lambda_0(p_1^0 s_1 + p_2^0 s_2 - 1) F_\alpha(t; s_1, s_2) \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

с начальными условиями  $F_\alpha(0; s_1, s_2) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$ . Решение этого уравнения будет иметь предел при  $\lim_{t \rightarrow \infty} F_\alpha(t; s_1, s_2) = f(s_1, s_2)$ , то есть финальные вероятности.

Это решение в нашем случае будет выглядеть

$$\begin{aligned} F_\alpha(t; s_1, s_2) &= \nu_1^{\alpha_1} \nu_2^{\alpha_2} \exp \left\{ -\lambda_0 \left( \frac{C_1}{\gamma_1} (p_1^0 \lambda_1 p_2^1 + \lambda_1 + \gamma_1) (e^{-\gamma_1 t} - 1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{C_2}{\gamma_2} (p_1^0 \lambda_1 p_2^1 + \lambda_1 + \gamma_2) (e^{-\gamma_2 t} - 1) \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

где

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\det B} ((\lambda_1 + \gamma_2)(s_1 - 1) - \lambda_1 p_2^1 (s_2 - 1)) e^{\gamma_1 t} \\ \frac{1}{\det B} (-(\lambda_1 + \gamma_1)(s_1 - 1) + \lambda_1 p_2^1 (s_2 - 1)) e^{\gamma_2 t} \end{pmatrix} \cdot \\ \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 p_2^1 & \lambda_1 p_2^1 \\ \lambda_1 + \gamma_1 & \lambda_1 + \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Вычисляя  $\lim_{t \rightarrow \infty} F_\alpha(t; s_1, s_2)$ , получим

$$\begin{aligned} f(s_1, s_2) &= \exp \left\{ -\lambda_0 \left( \frac{1}{\gamma_1 \det B} ((\lambda_1 + \gamma_2)(s_1 - 1) - \lambda_1 p_2^1 (s_2 - 1)) (p_1^0 \lambda_1 p_2^1 + \lambda_1 + \gamma_1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\gamma_2 \det B} (-(\lambda_1 + \gamma_1)(s_1 - 1) + \lambda_1 p_2^1 (s_2 - 1)) (p_1^0 \lambda_1 p_2^1 + \lambda_1 + \gamma_2) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Эта функция и является производящей функцией для распределения стационарных вероятностей марковского ветвящегося процесса, описываемого схемой превращений (2.2.14).



## § 2.3. Явные решения уравнений Колмогорова для схем с $n$ типами элементов.

### 2.3.1. Явные решения .

Сначала рассмотрим схему общего вида

$$\begin{cases} T_1 \longrightarrow T_2, T_3, \dots, T_n \\ T_2 \longrightarrow T_1, T_3, \dots, T_n \\ \dots \\ T_n \longrightarrow T_1, T_2, \dots, T_{n-1} \end{cases} \quad (2.3.1)$$

$$\begin{cases} \frac{dF_1}{dt} = \lambda_1(h_1(F_2, F_3, \dots, F_n) - F_1), \\ \dots \\ \frac{dF_n}{dt} = \lambda_n(h_n(F_1, F_2, \dots, F_{n-1}) - F_n), \end{cases} \quad (2.3.2)$$

с начальными условиями

$$F_i(0; s_1, \dots, s_n) = s_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Так как частица любого типа имеет некоторую вероятность превращения всего лишь в частицу одного из типов, то производящая функция  $h(s)$  в системе дифференциальных уравнений примет следующий вид:

$$h_i(s_1, \dots, s_n) = \sum_{j=1}^n p_j^i s_j, \quad i = 1, \dots, n$$

Тогда получим

$$\begin{cases} \frac{dF_1}{dt} = \lambda_1 \left( \sum_{j=2}^n p_j^1 F_j - F_1 \right), \\ \dots \\ \frac{dF_n}{dt} = \lambda_n \left( \sum_{j=1}^{n-1} p_j^n F_j - F_n \right), \end{cases} \quad (2.3.3)$$

с начальными условиями

$$F_i(0; s_1, \dots, s_n) = s_i, \quad i = 1, \dots, n$$

или

$$\dot{\vec{F}} = A\vec{F}.$$

Пусть  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  — собственные значения  $A$  действительны и попарно различны, тогда решение системы (2.3.3) можно будет записать в виде

$$F_i = \sum_{j=1}^n C_j b_{ij} e^{\gamma_j t}, \quad (2.3.4)$$

где  $b_{ij}$  — компоненты собственных векторов. Подставив начальные условия, получим:

$$s_i = \sum_{j=1}^n C_j b_{ij},$$

или

$$\begin{aligned} s &= Bc, \\ c &= B^{-1}s, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Обозначим  $B^{-1} = D = (d_{ij})$ . Тогда

$$F_i = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n d_{jk} s_k \right) b_{ij} e^{\gamma_j t}, \quad (2.3.6)$$

И учитывая свойство ветвления

$$F(t; s_1, \dots, s_n) = F_1^{\alpha_1} \dots F_n^{\alpha_n}. \quad (2.3.7)$$

Очевидно, что для соответствия полученного решения условиям производящей функции, необходимо выполнение ограниченности функций  $\nu_i(t; s_1, \dots, s_{n+1})$ . Эти функции будут ограничены в области решения задачи при  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \leq 0$ .

**Теорема 2.3.1** (Теорема Гершгорина) Каждое собственное число матрицы  $A = (a_{ij})$  всегда расположено в одном из кругов:

$$|a_{ii} - \gamma| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Теперь рассмотрим матрицу системы (2.3.3)

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 p_2^1 & \dots & \lambda_1 p_n^1 \\ \lambda_2 p_1^2 & -\lambda_2 & \dots & \lambda_2 p_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_n p_1^n & \lambda_n p_2^n & \dots & -\lambda_n \end{pmatrix}$$

Так как  $\sum_{j=1, j \neq i}^n p_j^i = 1$ , то используя теорему Гершгорина [6] получим оценку для собственных значений

$$-\lambda_i \left( 1 + \sum_{j=1, j \neq i}^n p_j^i \right) \leq \gamma \leq -\lambda_i \left( 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^n p_j^i \right),$$

Откуда следует, что  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \leq 0$ .

Также абсолютно очевидно, для производящей функции (2.3.7) выполняются условия:  
 $F(t; 0) \equiv 0, F(t; 1) \equiv 1$ .

Теперь рассмотрим схему

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \longrightarrow T_1, \dots, T_n \\ T_1 \longrightarrow T_2, T_3, \dots, T_{n+1} \\ T_2 \longrightarrow T_1, T_3, \dots, T_{n+1} \\ \dots \\ T_n \longrightarrow T_1, T_2, \dots, T_{n-1}, T_{n+1} \end{array} \right. \quad (2.3.8)$$

Запишем систему уравнений Колмогорова для этой схемы

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dF_0}{dt} = \lambda_0(h_0(F_1, F_2, \dots, F_n) - 1)F_0, \\ \frac{dF_1}{dt} = \lambda_1(h_1(F_1, F_2, \dots, F_{n+1}) - F_1), \\ \dots \\ \frac{dF_n}{dt} = \lambda_n(h_n(F_1, F_2, \dots, F_{n+1}) - F_n), \\ \frac{dF_{n+1}}{dt} = 0, \end{array} \right. \quad (2.3.9)$$

с начальными условиями

$$F_i(0; s_1, \dots, s_{n+1}) = s_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Так как данная схема имеет сходство с рассмотренной в предыдущем случае, то сразу запишем её в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dF_0}{dt} = \lambda_0 \left( \sum_{j=1}^n p_j^1 F_j - 1 \right) F_0, \\ \frac{dF_1}{dt} = \lambda_1 \left( \sum_{j=2}^{n+1} p_j^1 F_j - F_1 \right), \\ \dots \\ \frac{dF_n}{dt} = \lambda_n \left( \sum_{j=1, j \neq i}^{n+1} p_j^1 F_j - F_n \right), \\ \frac{dF_{n+1}}{dt} = 0, \end{array} \right. \quad (2.3.10)$$

Очевидно, что решением последнего уравнения этой системы будет

$$F_{n+1} = s_{n+1}.$$

А  $n$  уравнений, начиная со второго, будут решаться также как и в предыдущем случае. Соответственно запишем.

$$F_i(t; s_1, \dots, s_{n+1}) = \Phi_i(t; s_1, \dots, s_{n+1}).$$

И наконец, рассмотрим первое уравнение системы

$$\frac{dF_0}{dt} = \lambda_0 \left( \sum_{j=1}^n p_j^1 F_j - 1 \right) F_0,$$

Решением этого уравнения будет являться

$$F_0(t; s_1, \dots, s_{n+1}) = \exp \left\{ \int_0^t \lambda_0 \left( \sum_{j=1}^n p_j^0 \Phi_j - 1 \right) d\tau \right\},$$

В результате производящая функция для схемы (1) примет вид

$$F_\alpha(t; s_1, \dots, s_{n+1}) = \Phi_1^{\alpha_1} \dots \Phi_n^{\alpha_n} s_{n+1} \exp \left\{ \int_0^t \lambda_0 \left( \sum_{j=1}^n p_j^0 \Phi_j - 1 \right) d\tau \right\}. \quad (2.3.11)$$

Перейдем к рассмотрению схемы (2.3.8), но только с переменной интенсивностью входящего потока  $\lambda_0(t)$ .

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow T_1, \dots, T_n \\ T_1 \longrightarrow T_2, T_3, \dots, T_{n+1} \\ T_2 \longrightarrow T_1, T_3, \dots, T_{n+1} \\ \dots \\ T_n \longrightarrow T_1, T_2, \dots, T_{n-1}, T_{n+1} \end{cases}$$

Этот случай аналогичен случаю (2.3.11). Поэтому сразу запишем производящую функцию

$$F_\alpha(t; s_1, \dots, s_{n+1}) = \Phi_1^{\alpha_1} \dots \Phi_n^{\alpha_n} s_{n+1} \exp \left\{ \int_{t_0}^t \lambda_0(\tau) \left( \sum_{j=1}^n p_j^0 \Phi_j - 1 \right) d\tau \right\}. \quad (2.3.12)$$

### 2.3.2. Математические ожидания и дисперсии.

Теперь снова вернемся к рассмотрению схемы (2.3.1) и второго уравнения Колмогорова, соответствующей ей.

$$\frac{\partial F_\alpha(t; s_1, \dots, s_n)}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{j=1, i \neq j}^n p_j^i s_j - s_i \right) \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, \dots, s_n)}{\partial s_i},$$

с начальным условием  $F_\alpha(0; s_1, \dots, s_n) = s_1^{\alpha_1} \dots s_n^{\alpha_n}$ .

Продифференцируем это уравнение по  $s_k$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_k} \left( \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, \dots, s_n)}{\partial t} \right) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{j=1, i \neq j}^n p_j^i \frac{\partial s_j}{\partial s_k} - \frac{\partial s_i}{\partial s_k} \right) \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, \dots, s_n)}{\partial s_i} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{j=1, i \neq j}^n p_j^i s_j - s_i \right) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, \dots, s_n)}{\partial s_i \partial s_k}, \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Пользуясь тем, что по определению

$$A_i(t) = M\xi_i(t) = \frac{\partial F_\xi(t, 1)}{\partial s_i}, \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^n p_j^i = 1,$$

Получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_k} \left( \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, \dots, s_n)}{\partial t} \right) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{j=1, i \neq j}^n p_j^i \delta_{jk} - \delta_{ik} \right) \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, \dots, s_n)}{\partial s_i} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{j=1, i \neq j}^n p_j^i s_j - s_i \right) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, \dots, s_n)}{\partial s_i \partial s_k}, \end{aligned}$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

$$\frac{dA_k}{dt} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{j=1, i \neq j}^n p_j^i \delta_{jk} - \delta_{ik} \right) A_i, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.3.14)$$

Итак мы получили систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с начальными условиями  $A_k = \alpha_k$ . Займемся теперь вычислением дисперсии.

$$D_i(t) = D\xi_i(t) = \frac{\partial^2 F_\alpha(t, 1)}{\partial s_i^2} + \frac{\partial F_\alpha(t, 1)}{\partial s_i} - \left( \frac{\partial F_\alpha(t, 1)}{\partial s_i} \right)^2.$$

Пользуясь (2.3.14), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s_k \partial s_l} \left( \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, \dots, s_n)}{\partial t} \right) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial s_l} \left( \sum_{j=1, i \neq j}^n p_j^i \delta_{jk} - \delta_{ik} \right) \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, \dots, s_n)}{\partial s_i} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{j=1, i \neq j}^n p_j^i \delta_{jk} - \delta_{ik} \right) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, \dots, s_n)}{\partial s_i \partial s_l} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial s_l} \left( \sum_{j=1, i \neq j}^n p_j^i s_j - s_i \right) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, \dots, s_n)}{\partial s_i \partial s_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{j=1, i \neq j}^n p_j^i s_j - s_i \right) \frac{\partial^3 F_\alpha(t; s_1, \dots, s_n)}{\partial s_i \partial s_k \partial s_l}, \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial s_i \partial s_j} = B_{ij}$ , в результате при  $s = 1$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{dB_{kl}(t)}{dt} &= 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{j=1, i \neq j}^n p_j^i \delta_{jk} - \delta_{ik} \right) B_{il}(t) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{j=1, i \neq j}^n p_j^i \delta_{jl} - \delta_{il} \right) B_{ik}(t), \quad k = \overline{1, n}, l = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

с начальными условиями  $B_{kl}(0) = \alpha_k \alpha_l$ . Учитывая, что  $\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial s_i \partial s_j} = \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial s_j \partial s_i}$ , получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами размерности  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

$$D_i(t) = B_{ii}(t) + A_i(t) - (A_i(t))^2.$$

Обратимся к вычислению математических ожиданий и дисперсий для схемы (2.3.8). Ей соответствует второе уравнение Колмогорова в частных производных

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{j=1, i \neq j}^{n+1} p_j^i s_j - s_i \right) \frac{\partial F_\alpha}{\partial s_i} + \lambda_0 \left( \sum_{j=1}^n p_j^0 s_j - 1 \right) F_\alpha,$$

с начальным условием  $F_\alpha(0; s_1, \dots, s_{n+1}) = s_1^{\alpha_1} \dots s_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$ .

Произведя над уравнением действия, аналогичные (2.3.13), получим систему дифференциальных уравнений для математических ожиданий схемы (2.3.8).

$$\left\{ \frac{dA_k}{dt} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{j=1, i \neq j}^{n+1} p_j^i \delta_{jk} - \delta_{ik} \right) A_i + \lambda_0 \left( \sum_{j=1}^n p_j^0 \delta_{jk} \right), \quad k = \overline{1, n+1}. \right. \quad (2.3.16)$$

Для дисперсий

$$\begin{aligned} \frac{dB_{kl}(t)}{dt} = & \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{j=1, i \neq j}^{n+1} p_j^i \delta_{jk} - \delta_{ik} \right) B_{il}(t) + \\ & + \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{j=1, i \neq j}^{n+1} p_j^i \delta_{jl} - \delta_{il} \right) B_{ik}(t) + \\ & + \lambda_0 \left( \sum_{j=1}^n p_j^0 \delta_{jk} \right) \frac{\partial F_\alpha}{\partial s_l} + \lambda_0 \left( \sum_{j=1}^n p_j^0 \delta_{jl} \right) \frac{\partial F_\alpha}{\partial s_k}, \quad k = \overline{1, n+1}, l = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

### 2.3.3. Стационарное распределение.

Рассмотрим схему (2.3.8). Аналогично схеме (2.2.1), не будем учитывать финальный тип, тогда для случайный процесс со схемой вероятностных переходов (2.3.8)

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \longrightarrow T_1, \dots, T_n \\ T_1 \longrightarrow T_2, T_3, \dots, 0 \\ T_2 \longrightarrow T_1, T_3, \dots, 0 \\ \dots \\ T_n \longrightarrow T_1, T_2, \dots, T_{n-1}, 0 \end{array} \right. \quad (2.3.18)$$

будет иметь стационарное распределение.

Система уравнений Колмогорова в этом случае будет выглядеть

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dF_0}{dt} = \lambda_0(h_0(F_1, F_2, \dots, F_n) - 1)F_0, \\ \frac{dF_1}{dt} = \lambda_1(h_1(F_1, F_2, \dots, 1) - F_1), \\ \dots \\ \frac{dF_n}{dt} = \lambda_n(h_n(F_1, F_2, \dots, 1) - F_n), \end{array} \right. \quad (2.3.19)$$

с начальными условиями

$$F_i(0; s_1, \dots, s_n) = s_i, \quad i = 1, \dots, n$$

а ее решение

$$F_\alpha(t; s_1, \dots, s_n) = \Phi_1^{\alpha_1} \dots \Phi_n^{\alpha_n} \exp \left\{ \int_0^t \lambda_0 \left( \sum_{j=1}^n p_j^0 \Phi_j - 1 \right) d\tau \right\}. \quad (2.3.20)$$

Стационарное распределение в этом случае можно записать

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_\alpha(t; s_1, \dots, s_n) = f(s_1, \dots, s_n).$$

$$f(s_1, \dots, s_n) = \varphi_1^{\alpha_1} \dots \varphi_n^{\alpha_n} \exp \left\{ \int_0^\infty \lambda_0 \left( \sum_{j=1}^n p_j^0 \Phi_j - 1 \right) d\tau \right\},$$

где

$$\varphi_i(s_1, \dots, s_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_i(t, s_1, \dots, s_n)$$

Проведя некоторые выкладки, становится очевидным факт, что в нашем случае  $\varphi_i(s_1, \dots, s_n) = 1$ , тогда

$$f(s_1, \dots, s_n) = \exp \left\{ \int_0^\infty \lambda_0 \left( \sum_{j=1}^n p_j^0 \Phi_j - 1 \right) d\tau \right\}. \quad (2.3.21)$$



## Глава 3

### Система массового обслуживания с подвижными приборами. Метод статистического моделирования.

#### § 3.1. Постановка задачи.

В этой главе будет показано, что некоторые задачи массового обслуживания, аналогичные задачам, рассмотренным в пункте 0.1, можно решать, используя марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием [10]. Перейдем к постановке и рассмотрению таких задач.

В СМО с некоторой интенсивностью  $\lambda_0$  поступают заявки, которые обслуживаются подвижными приборами [8]. Такую задачу можно описать следующей схемой превращений

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow T_1 \\ T_1 + T_2 \longrightarrow T_3 \\ T_3 \longrightarrow T_2 + T_4 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

где  $T_1$  — заявки в очереди, элементы типа  $T_2$  — приборы,  $T_3$  — заявки, находящиеся в обработке,  $T_4$  — обслуженные заявки. Опишем этот процесс через случайные времена нахождения и скачки

$$\begin{cases} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \longrightarrow (\alpha_1 + 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), & P\{\tau_1^\alpha < t\} = 1 - e^{-\lambda_0 t} \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \longrightarrow (\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \alpha_3 + 1, \alpha_4), & P\{\tau_2^\alpha < t\} = 1 - e^{-\lambda_1 \alpha_1 \alpha_2 t} \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \longrightarrow (\alpha_1, \alpha_2 + 1, \alpha_3 - 1, \alpha_4 + 1), & P\{\tau_3^\alpha < t\} = 1 - e^{-\lambda_2 \alpha_3 t} \end{cases}$$

$\tau^j$  — случайные времена нахождения в данном состоянии. В каждый следующий момент времени взаимодействие происходит по  $l$ -тому варианту, для которого  $\tau^l = \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$

Запишем второе уравнение Колмогорова в производящих функциях для схемы (3.1.1).

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3, s_4)}{\partial t} &= \lambda_1(s_3 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3, s_4)}{\partial s_1 \partial s_2} + \\ &+ \lambda_2(s_2 s_4 - s_3) \frac{\partial F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3, s_4)}{\partial s_3} + \lambda_0(s_1 - 1) F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3, s_4) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

с начальным условием  $F_\alpha(0; s_1, s_2, s_3, s_4) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$ . Здесь  $\alpha_2$  равно начальному количеству заявок в СМО,  $\alpha_2$  равно количеству подвижных приборов в СМО.

Математические ожидания можно найти приближенно, решив систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA_1}{dt} = -\lambda_1 A_1 A_2 + \lambda_0, \\ \frac{dA_2}{dt} = -\lambda_1 A_1 A_2 - \lambda_2 A_3, \\ \frac{dA_3}{dt} = \lambda_1 A_1 A_2 - \lambda_2 A_3, \\ \frac{dA_4}{dt} = \lambda_2 A_3. \end{array} \right. \quad (3.1.3)$$

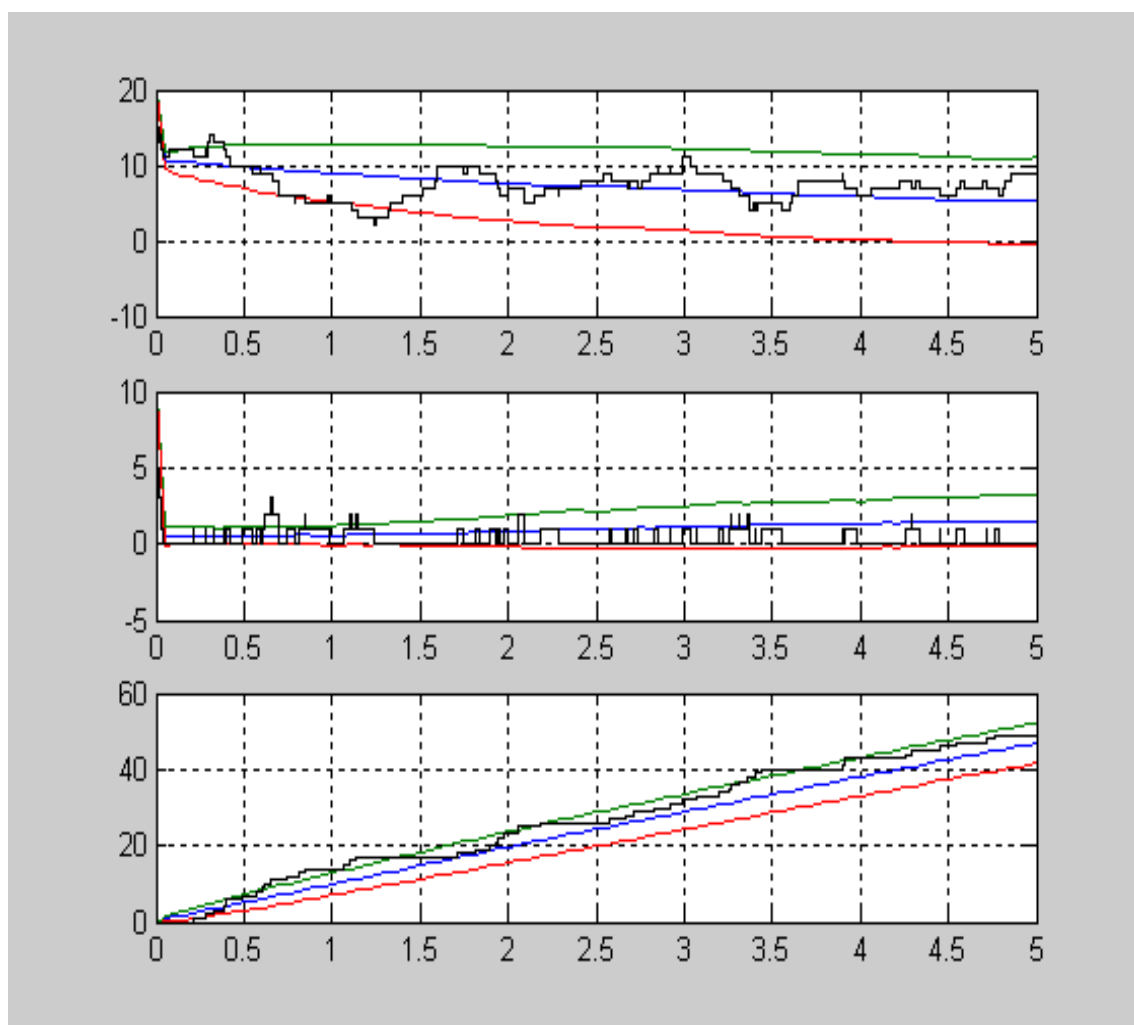
здесь ввиду того, что при дифференцировании по  $s_i$  система не разрешается относительно смешанных производных второго порядка, используем для описания детерминированной модели следующее приближение  $\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial s_1 \partial s_2} \approx A_1 A_2$

Отличие этой СМО от простейшей  $n$ -канальной системы, рассмотренной в 0.1 состоит в том, что в данном случае заявка, попадающая в систему (переход  $0 \longrightarrow T_1$ ), не сразу занимает свободный канал, если он есть в наличии конечно, а через некоторое случайное время. Другими словами, свободный прибор (или освободившийся) ищет заявку в системе, на что соответственно нужно какое-то время. Очевидно, что скорость перехода на обслуживание ( $T_1 + T_2 \longrightarrow T_3$ ) зависит от количества свободных приборов и заявок в СМО, а также от интенсивности перехода на обслуживание  $\lambda_1$ . В этой главе будет показана сходимость решения схемы (3.1.1) к решению простейшей  $n$ -канальной системы (0.2) при  $\lambda_1 \longrightarrow \infty$ .

### § 3.2. Исследование нестационарной задачи

Ввиду сложности уравнения (3.1.2) будет исследовать задачу методом Монте-Карло, алгоритм которого описан в п. 1.1.6. Для этого проводилась многократная имитация (реализация случайного процесса) работы СМО на временном промежутке  $[0, T]$ . По данным этих вычислений были получены оценки математического ожидания и дисперсии.

Рис 3.1

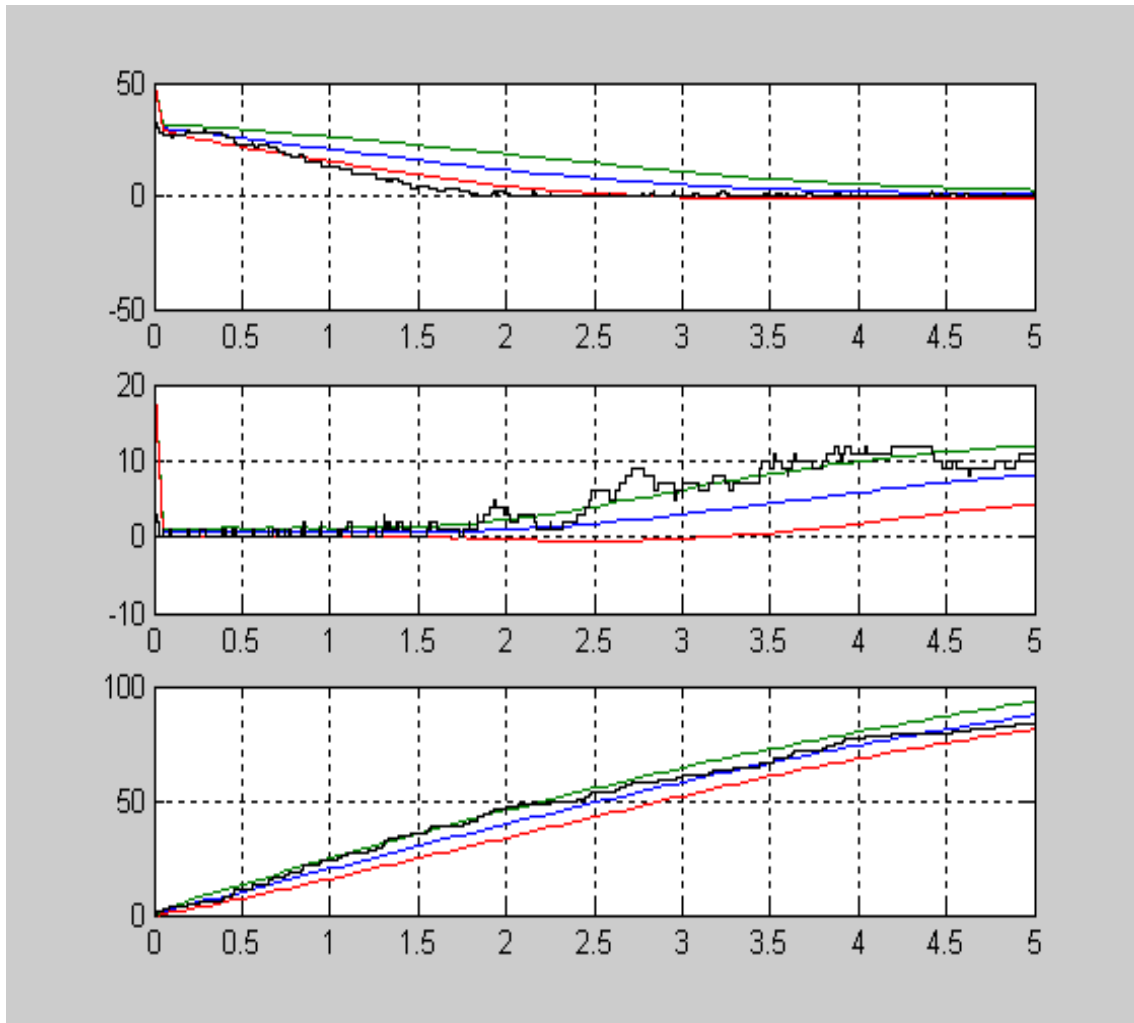


— реализация случайного процесса,  
— математическое ожидание  $A_i(t)$ ,  
—  $A_i(t) + \sqrt{D_i(t)}$ ,  
—  $A_i(t) - \sqrt{D_i(t)}$

Параметры интенсивности:  $\lambda_0 = 7$ ,  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 1$ .

Начальные условия: количество заявок — 20, количество приборов — 10.

Рис 3.2

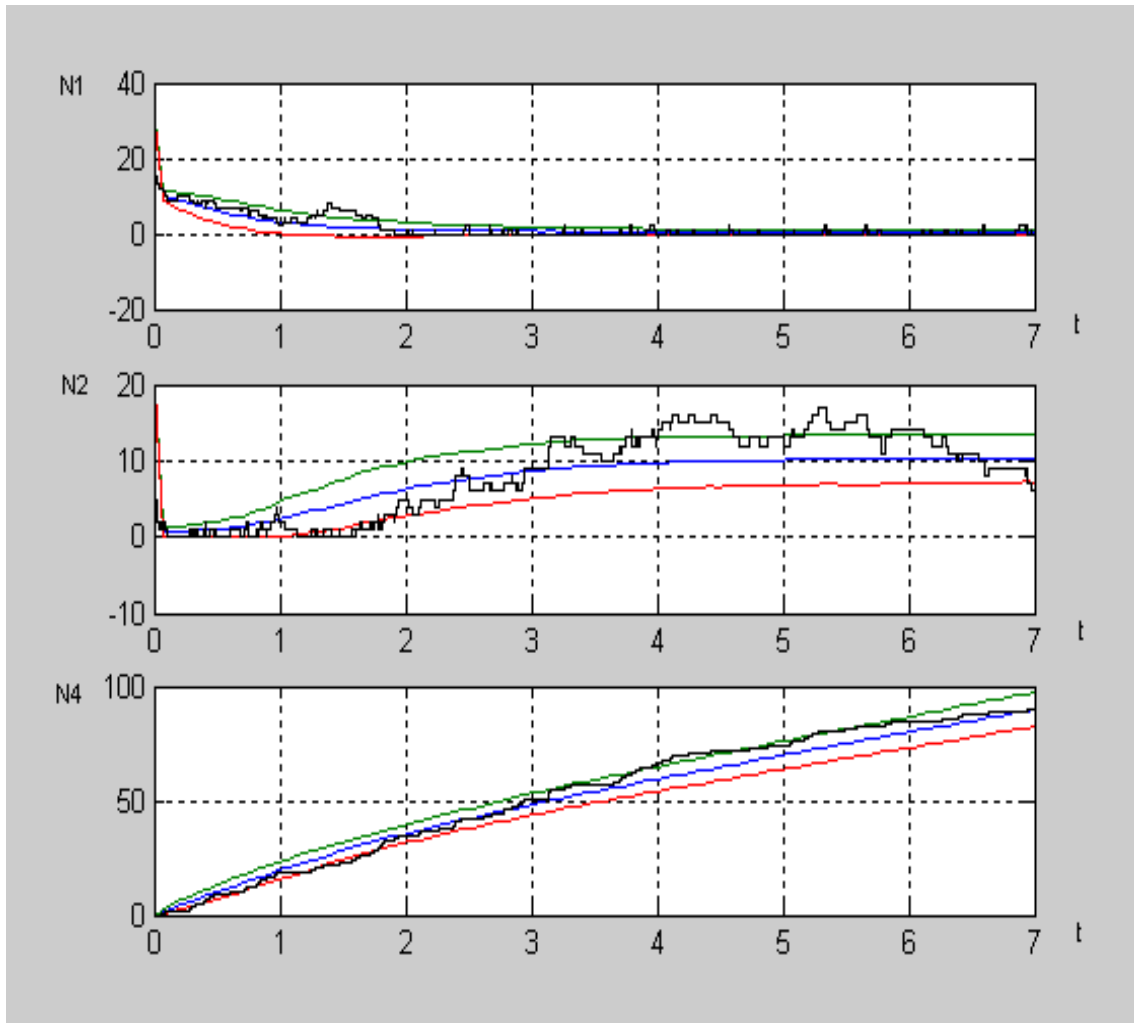


— реализация случайного процесса,  
— математическое ожидание  $A_i(t)$ ,  
—  $A_i(t) + \sqrt{D_i(t)}$ ,  
—  $A_i(t) - \sqrt{D_i(t)}$

Параметры интенсивности:  $\lambda_0 = 7$ ,  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 1$ .

Начальные условия: количество заявок — 50, количество приборов — 20.

Рис 3.3

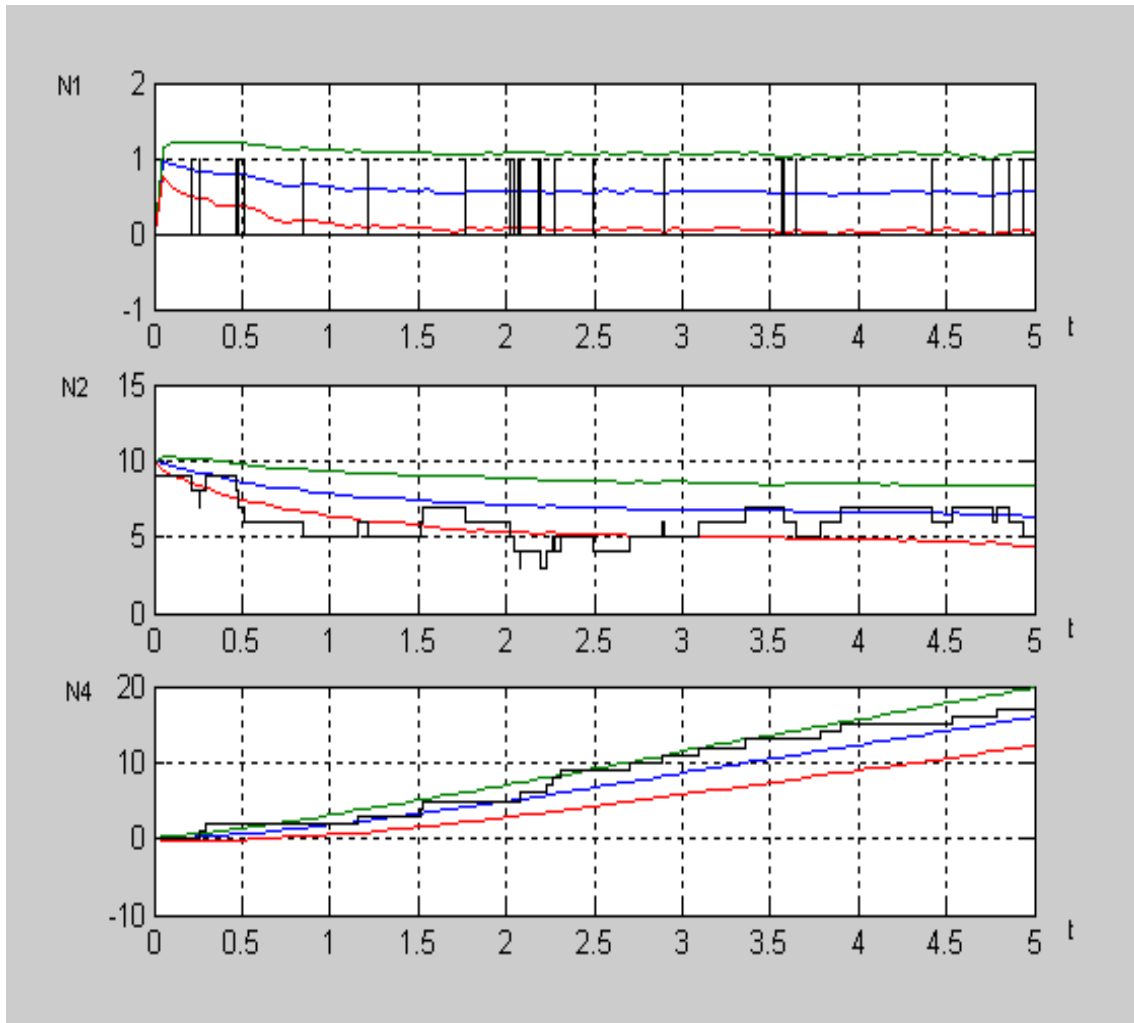


— реализация случайного процесса,  
 — математическое ожидание  $A_i(t)$ ,  
 —  $A_i(t) + \sqrt{D_i(t)}$ ,  
 —  $A_i(t) - \sqrt{D_i(t)}$

Параметры интенсивности:  $\lambda_0 = 10$ ,  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 1$ .

Начальные условия: количество заявок — 30, количество приборов — 20.

Рис 3.4



— реализация случайного процесса,  
 — математическое ожидание  $A_i(t)$ ,  
 —  $A_i(t) + \sqrt{D_i(t)}$ ,  
 —  $A_i(t) - \sqrt{D_i(t)}$

Параметры интенсивности:  $\lambda_0 = 8$ ,  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 1$ .

Начальные условия: количество заявок — 0, количество приборов — 10.

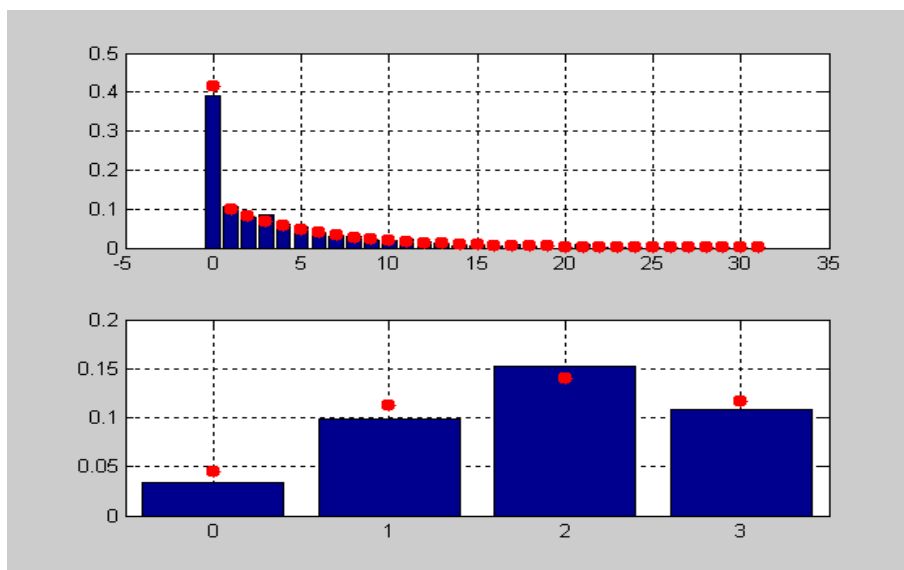
Здесь представлены численные оценки по методу Монте-Карло характеристик случайного процесса с взаимодействием и схемой превращений (3.1.1), являющегося математической моделью системы массового обслуживания с подвижными приборами, при различных значениях входных данных. На графиках представлен результат вычислений среднего и дисперсии по 1000 реализаций.

### § 3.3. Исследование стационарного распределения.

Для статистической оценки вероятности нахождения системы в данном состоянии при работе в стационарном режиме используется метод Монте-Карло. В результате произведя вычисление 1000 реализаций случайного процесса, получим вероятностное распределение занятости СМО со схемой переходов (3.1.1).

На каждом рисунке верхняя гистограмма — распределение вероятностей длины очереди, полученных методом Монте-Карло, нижняя гистограмма — распределение занятости подвижных приборов. Красные точки — расчет стационарных вероятностей для простейшей  $n$ -канальной СМО по формулам (0.2)

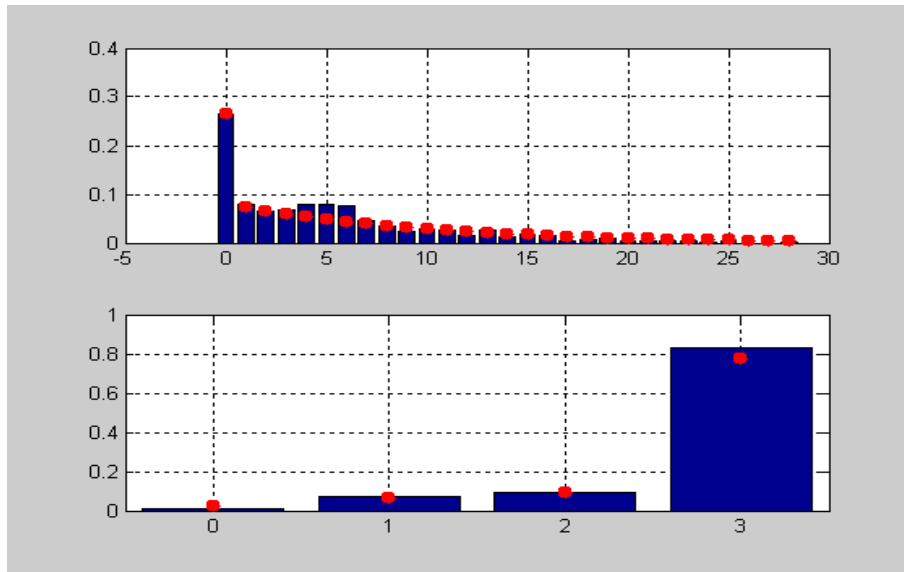
Рис 3.5



Для СМО с подвижными приборами: приборов — 3,  $\lambda_0 = 2$ ,  $\lambda_1 = 1200$ ,  $\lambda_3 = 1$ .

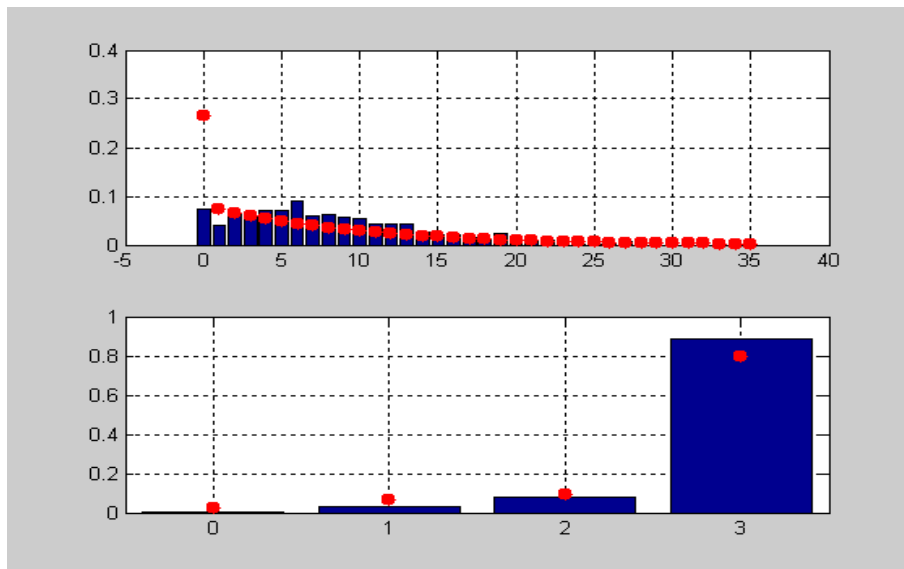
Для  $n$ -канальной СМО: каналов — 3,  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 1$ .

Рис 3.6



Для СМО с подвижными приборами: приборов — 3,  $\lambda_0 = 2.7$ ,  $\lambda_1 = 1200$ ,  $\lambda_3 = 1$ .  
 Для  $n$ -канальной СМО: каналов — 3,  $\lambda = 2.7$ ,  $\mu = 1$ .

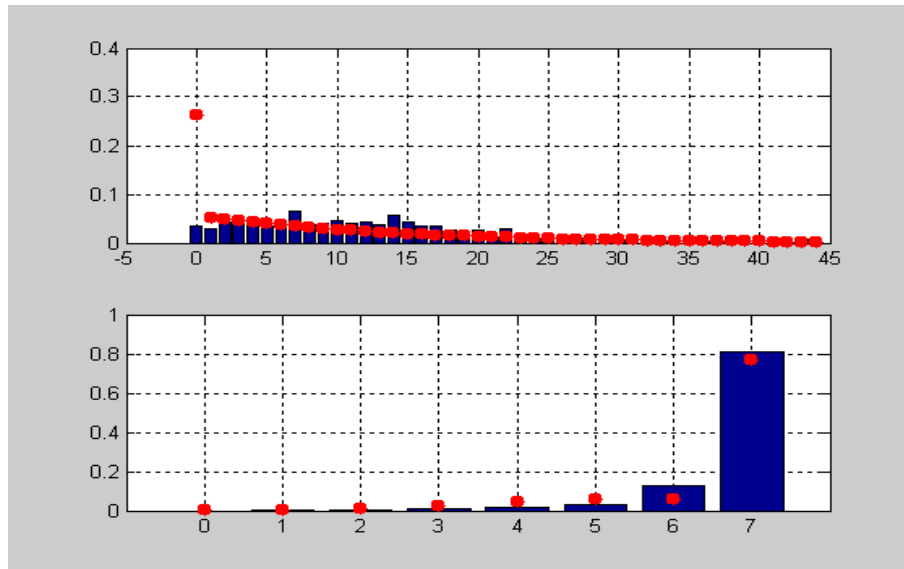
Рис 3.7



Для СМО с подвижными приборами: приборов — 3,  $\lambda_0 = 2.7$ ,  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_3 = 1$ .  
 Для  $n$ -канальной СМО: каналов — 3,  $\lambda = 2.7$ ,  $\mu = 1$ .



Рис 3.8

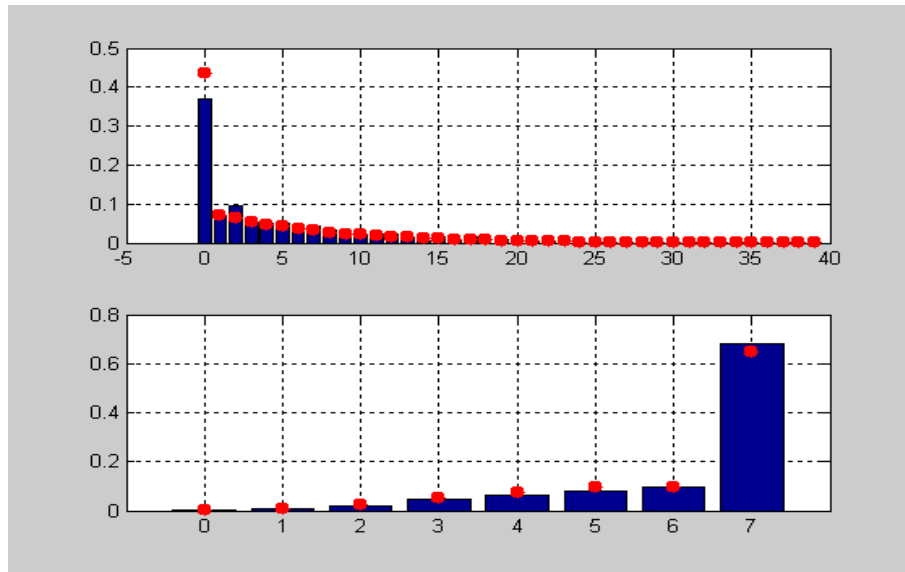


Для СМО с подвижными приборами: приборов — 7,  $\lambda_0 = 6.6$ ,  $\lambda_1 = 6, \lambda_3 = 1$ .

Для  $n$ -канальной СМО: каналов — 7,  $\lambda = 6.6, \mu = 1$ .

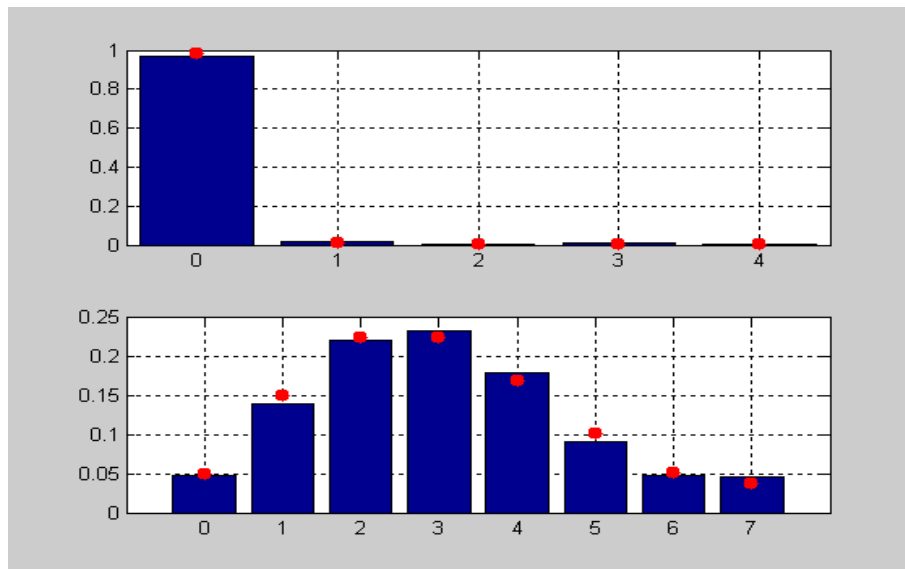
На рис. 3.7, 3.8 заметно некоторое "запаздывание" системы (3.1.1) по сравнению с классической СМО. Это вызвано медленным переходом на обслуживание ( $\lambda_1 = 3, 6$ ) сравнительно с расчетами других систем (рис. 3.5, 3.6;  $\lambda_1 = 1200$ , то есть заявка занимает прибор почти мгновенно). То есть стационарное распределение для (3.1.1) сходится к распределению классической СМО лучше. Аналогичные эффекты получены в расчетах при других параметрах, поэтому можно говорить о сходимости стационарного распределения СМО (3.1.1) к распределению классической системы при  $\lambda_1 \rightarrow \infty$ .

Рис 3.9



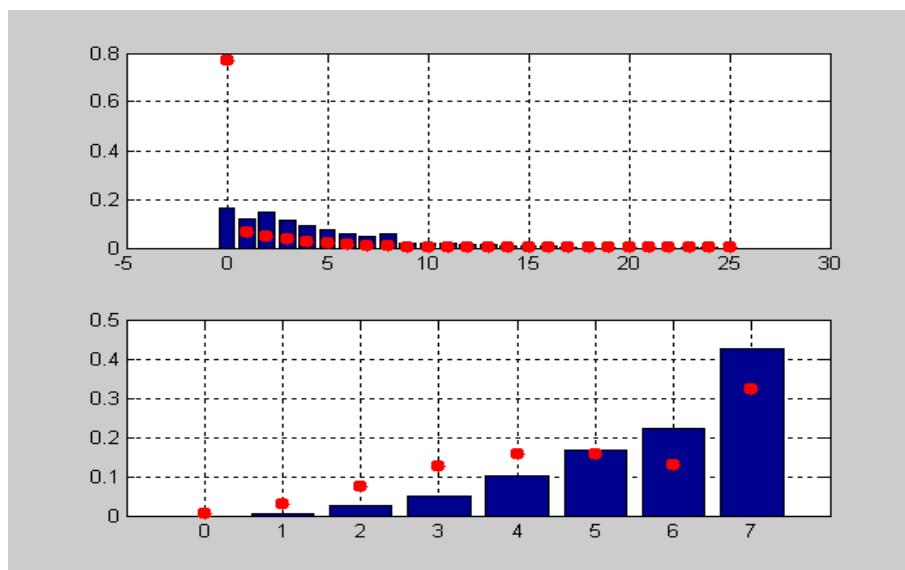
Для СМО с подвижными приборами: приборов — 7,  $\lambda_0 = 6.6$ ,  $\lambda_1 = 1200$ ,  $\lambda_3 = 1$ .  
 Для  $n$ -канальной СМО: каналов — 7,  $\lambda = 6.6$ ,  $\mu = 1$ .

Рис 3.10



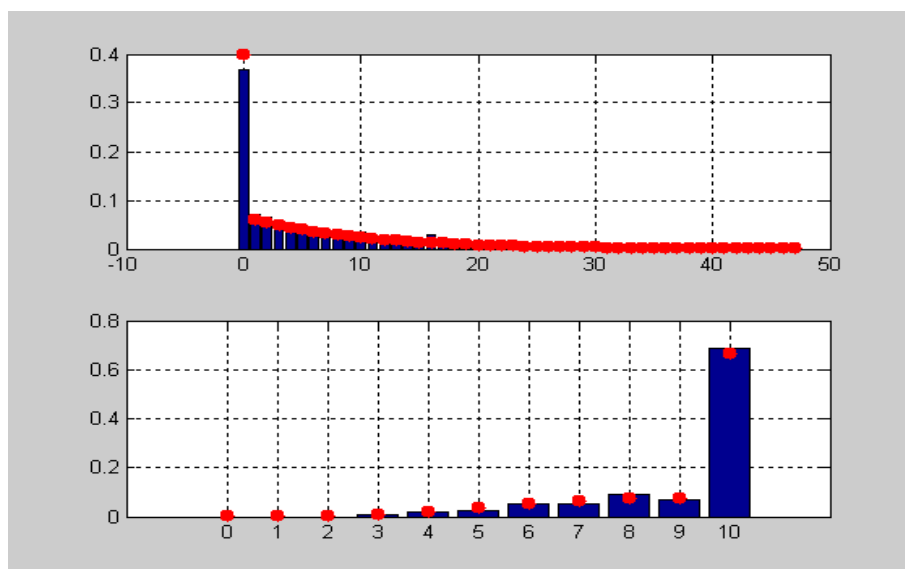
Для СМО с подвижными приборами: приборов — 7,  $\lambda_0 = 3$ ,  $\lambda_1 = 1200$ ,  $\lambda_3 = 1$ .  
 Для  $n$ -канальной СМО: каналов — 7,  $\lambda = 3$ ,  $\mu = 1$ .

Рис 3.11



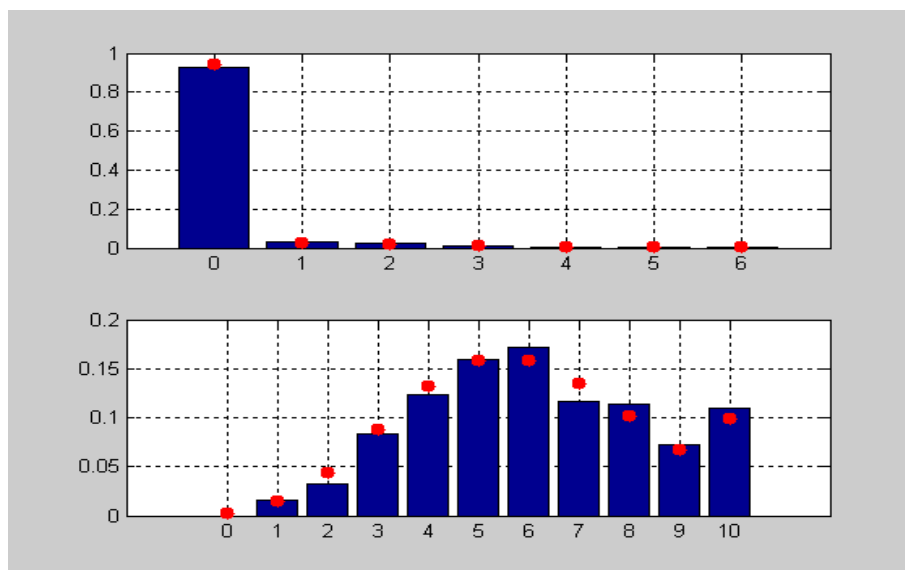
Для СМО с подвижными приборами: приборов — 7,  $\lambda_0 = 5$ ,  $\lambda_1 = 6$ ,  $\lambda_3 = 1$ .  
 Для  $n$ -канальной СМО: каналов — 7,  $\lambda = 5$ ,  $\mu = 1$ .

Рис 3.12



Для СМО с подвижными приборами: приборов — 10,  $\lambda_0 = 9$ ,  $\lambda_1 = 1200$ ,  $\lambda_3 = 1$ .  
 Для  $n$ -канальной СМО: каналов — 10,  $\lambda = 9$ ,  $\mu = 1$ .

Рис 3.13



Для СМО с подвижными приборами: приборов — 10,  $\lambda_0 = 6$ ,  $\lambda_1 = 1200$ ,  $\lambda_3 = 1$ .  
 Для  $n$ -канальной СМО: каналов — 10,  $\lambda = 6$ ,  $\mu = 1$ .

## Выводы.

Дипломный проект посвящен аналитическому и численному исследованию систем массового обслуживания с подвижными элементами. Для исследования использовался математический аппарат марковских случайных процессов. Рассмотрены методы получения явных решений уравнений Колмогорова для СМО с заданными схемами вероятностных переходов.

В главе 2 получены явные решения второго уравнения Колмогорова (нестационарного) для системы массового обслуживания с тремя типами частиц и найдены стационарные вероятности для данной системы. Также рассмотрен метод получения явных решений для обобщенных схем (СМО с  $n$ -типами подвижных заявок) и метод нахождения числовых характеристик (математического ожидания и дисперсия) этих случайных процессов, получено стационарное распределение вероятностей.

В главе 3 рассмотрен метод статистического моделирования систем массового обслуживания с подвижными приборами (метод Монте-Карло). Были получены оценки числовых характеристик решения уравнения Колмогорова для СМО со схемой переходов (3.1.1), а также показана сходимость распределения стационарных вероятностей этой системы к распределению вероятностей классической  $n$ -канальной системы массового обслуживания при  $\lambda_1 \rightarrow \infty$ , то есть показана возможность применения математического аппарата марковских процессов с взаимодействием для классических СМО.

## Глава 4

### Организация и планирование научно–исследовательской работы

Организация и планирование научно-исследовательской работы (НИР) включает расчет трудоемкости этапов НИР, определение продолжительности выполнения этих этапов, составление графика хода выполнения НИР, а также предусматривается составление схемы затрат на НИР [14].

## Расчет трудоемкости НИР

Научно-исследовательскую работу можно условно разбить на несколько этапов:

- 1) Утверждение задания на проект (постановка задачи)
- 2) Выбор направления исследования (подбор литературы, изучение теории ветвящихся процессов, разработка методики исследования)
- 3) Подготовка экспериментальной базы (написание программного комплекса, предназначенного для построения реализаций исследуемых ветвящихся процессов)
- 4) Теоретические и экспериментальные исследования (аналитическое исследование ветвящихся процессов: поиск точных решений соответствующих систем дифференциальных уравнений Колмогорова, экспериментальное моделирование ветвящихся процессов с помощью программы, сопоставление аналитических и экспериментальных результатов)
- 5) Обобщение и оценка результатов исследования (безопасность, трудоемкость и себестоимость НИР, оформление проекта)

Для расчета трудоемкости этапов применим метод экспертных оценок. Пусть число экспертов равно шести. Каждый эксперт высказывает свое мнение о трудоемкости каждого из этапов, называя минимальное  $t_{min}$  и максимальное  $t_{max}$  значение трудоемкости (см. табл. 4.1). Ожидаемое значение трудоемкости определяется по формуле

$$t_{ож} = \frac{3t_{min} + 2t_{max}}{5}.$$

Продолжительность этапа в рабочих днях равна  $t_{cp}/R$ , где  $t_{cp}$  и  $R$  — соответственно среднее значение трудоемкости и число исполнителей на данном этапе работы. Продолжительность этапа в календарных днях определяется как  $K_k t_{cp}/R$ , где  $K_k = 365/250$  — коэффициент для перевода рабочих дней в календарные. Данные о продолжительности этапов работы приведены в таблице 4.2.

Построим календарный план–график работ (см. табл. 4.3).

Таблица 4.1. Данные экспертов о трудоемкости этапов НИР

Этапы НИР	Значения трудоемкости $t_{min}$ , $t_{max}$ и $t_{ож}$ , чел.-дн. (6 экспертов)							Средняя трудоемкость, чел.-дн.
		1	2	3	4	5	6	
1	$t_{min}$	2	1	1	2	1	1	2,2
	$t_{max}$	5	4	3	4	2	3	
	$t_{ож}$	3,2	2,2	1,8	2,8	1,4	1,8	
2	$t_{min}$	12	13	14	10	11	13	15
	$t_{max}$	19	17	22	14	18	18	
	$t_{ож}$	14,8	15,0	17,2	11,6	15,8	15,0	
3	$t_{min}$	5	6	6	7	5	7	7,6
	$t_{max}$	9	11	10	12	8	11	
	$t_{ож}$	6,6	8,0	7,6	9,0	6,2	8,6	
4	$t_{min}$	50	55	54	60	58	57	58,2
	$t_{max}$	58	62	59	66	63	64	
	$t_{ож}$	53,2	57,8	56,0	62,4	60,0	59,8	
5	$t_{min}$	11	10	13	9	10	11	11,2
	$t_{max}$	14	12	15	11	12	12	
	$t_{ож}$	12,2	10,4	13,4	9,4	10,4	11,2	

Таблица 4.2. Продолжительности этапов НИР

Этапы НИР	Средняя трудоемкость чел.-дн.	Количество исполнителей, чел.	Продолжительность	
			раб.-дн.	кл.-дн.
1	2,2	2	2	2
2	15	1	15	22
3	7,6	1	8	11
4	58,2	1	59	85
5	11,2	1	11	16
Всего	94,2		94	136

## Расчет себестоимости НИР

### Материалы и комплектующие

Затраты состоят из стоимости материалов и транспортно-заготовительных расходов. Расчеты по данной статье затрат представлены в табл. 4.4.

### Затраты на амортизацию оборудования

Затраты на амортизацию оборудования составляют 12,5% от стоимости оборудования в год. Оборудование (компьютер и принтер) общей стоимостью 24000 р. использовалось в течении 30 дней. Количество рабочих дней в году равно 250. Следовательно, затраты на амортизацию составляют

$$C_A = 0,125 \cdot 24000 \cdot \frac{30}{250} = 360 \text{ р.}$$



Таблица 4.3. План–график выполнения работ

Название этапа	Кол-во исполн.	Недели																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1. Постановка задачи	2	x																			
2. Выбор направления исследования	1	x	x	x	x																
3. Подготовка экспериментальной базы	1				x	x															
4. Теоретические исследования	1					x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x				
5. Оценка результатов	1																	x	x	x	x

Таблица 4.4. Материалы и комплектующие

	Наименование расходов	Единица измерения	Кол-во	Цена за единицу, р.	Сумма, р.
1	Бумага, формат А4	пачка	1	130	130
2	Дискеты	шт	2	15	30
3	Картридж для принтера	шт	1	1700	1700
Всего:					1860
Транспортные расходы	14 % от (1+2+3)				260
<b>Итого:</b>					2120

### Затраты на электроэнергию

Время работы за компьютером составляет 180 ч. (30 дней при 6-часовом рабочем дне. Мощность компьютера составляет 0,3 кВт; тариф на электроэнергию равен 0,96 р./кВт·ч. С учетом поправочного коэффициента 1,15 затраты на электроэнергию составляют

$$C_{\text{Э}} = 1,15 \cdot 180 \cdot 0,3 \cdot 0,96 = 52 \text{ р.}$$

### Фонд оплаты труда

Оклад научного сотрудника составляет 2000 р., а старшего научного сотрудника — 6000 р. (ГНИИ АПП от 01/03/2002). На разработку НИР научному сотруднику потребовалось 94 рабочих дней, а старшему научному сотруднику — 2 дня. Считая, что в месяце 21,8 рабочих дней, определяем основной фонд оплаты труда:

$$L_{\text{осн}} = 2000 \cdot \frac{94}{21,8} + 6000 \cdot \frac{2}{21,8} = 9174 \text{ р.}$$

Дополнительный фонд оплаты труда составляет 43% от основного фонда (ГНИИ АПП от 01/03/2002),  $L_{\text{доп}} = 3945 \text{ р.}$

### Налоги

Единый социальный налог и налог на несчастные случаи и риски жизни в сумме составляют 26% от суммы основного и дополнительного фондов оплаты труда,  $C_{\text{Н}} = 3411 \text{ р.}$

### Накладные расходы

К накладным расходам относятся расходы по управлению и обслуживанию отдела разработки и составляют 28% от основного фонда оплаты труда (ГНИИ АПП от 01/03/2002),  $C_{\text{НР}} = 2569 \text{ р.}$

## Производственная себестоимость НИР

Суммируя все затраты, определим производственную себестоимость (себестоимость НИР). Перечень затрат представлен в табл. 4.5.

Таблица 4.5. Структура затрат

	Статья затрат	Сумма, р.	Доля, %	Примечание
1	Материалы и комплектующие	2120	9,80	
2	Затраты на амортизацию оборудования	360	1,66	
3	Затраты на электроэнергию	52	0,24	
4	Основной фонд оплаты труда	9174	42,41	
5	Дополнительный фонд оплаты труда	3945	18,24	43% от (4)
6	Налоги (ЕСН + ННСиРЖ)	3411	15,77	26% от (4+5)
7	Накладные расходы	2569	11,88	28% от (4)
8	<b>Себестоимость НИР:</b>	21631	100	

Таким образом, себестоимость НИР составляет 21631 р.

## Глава 5

### Промышленная экология и безопасность

Работа операторов, программистов и пользователей непосредственно связана с компьютерами, а следовательно, с дополнительными вредными воздействиями целой группы факторов, что существенно снижает производительность их труда. Изучение и решение проблем, связанных с обеспечением здоровых и безопасных условий, в которых протекает труд человека — одна из наиболее важных задач в разработке новых технологий и систем производства.

#### § 1. Анализ вредных факторов на рабочем месте инженера–расчетчика

##### Шум

Шум определяют как совокупность аperiodических звуков различной интенсивности и частоты. Окружающие человека шумы имеют разную интенсивность: разговорная речь — 50...60 дБ А, шум в обычной квартире — 30...40 дБ А. При выполнении основной работы на ПЭВМ уровень шума на рабочем месте не должен превышать 50 дБ А. Снизить уровень шума можно использованием звукопоглощающих материалов с максимальными коэффициентами звукопоглощения в области частот 31,5 — 8000 Гц.

Таблица 5.1. Допустимые уровни звукового давления

Частота, Гц	31,5	63	125	250	500	1000	2000	4000	8000	Эквив. уров. шума, дБ
Уровень шума, дБ	86	71	61	54	49	45	42	40	38	50

Нормируемые параметры шума на рабочих местах определены ГОСТ 12.1.003–83 и Санитарными нормами СН 2.2.4/2.1.8.562–96 "Шум на рабочих местах, в помещениях жилых, общественных зданий и на территории жилой застройки". Документы дают классификацию шумов по спектру на широкополосные и тональные, а по временным характеристикам — на постоянные и непостоянные. Для нормировки постоянных шумов применяют допустимые уровни звукового давления (УЗД) в девяти октавных полосах частот (таблица 5.1) в зависимости от вида производственной деятельности. Для данных, приведенных в таблице 5.1, в качестве рабочих мест взяты помещения конструкторских бюро, расчетчиков, программистов вычислительных машин, лабораторий для теоретических работ.

## Вибрация

Малые механические колебания, возникающие в упругих телах или телах, находящихся под воздействием переменного физического поля, называют вибрацией. Вибрация относится к факторам, обладающим высокой биологической активностью. Выраженность ответных реакций обуславливается главным образом силой энергетического воздействия и биомеханическими свойствами человеческого тела как сложной колебательной системы. Мощность колебательного процесса в зоне контакта и время этого контакта являются главными параметрами, определяющими развитие вибрационных патологий, структура которых зависит от частоты и амплитуды колебаний, продолжительности воздействия, места приложения и направления оси вибрационного воздействия, демпфирующих свойств тканей, явлений резонанса и других условий. Допустимые уровни вибрации, условия и правила их измерений регламентируются санитарными нормами СН 2.2.4/2.18.566 — 96. Основными нормируемыми параметрами вибрации являются средние квадратичные величины уровней виброскорости и виброускорения в октавных полосах частот. Допустимые нормы вибрации на всех рабочих местах с ПЭВМ приведены в таблице 5.2.

Таблица 5.2. Допустимые нормы вибрации на рабочих местах с ПЭВМ.

Среднегеометрические частоты полос, Гц	Допустимые значения			
	по виброускорению		по виброскорости	
	м/с <sup>2</sup>	дБ	м/с <sup>2</sup>	дБ
2	53	25	45	79
4	53	25	22	73
8	53	25	11	67
16	10	31	11	67
31,5	21	37	11	67
63	42	43	11	67

## Освещение

Освещение — один из важнейших факторов, влияющих на пользователя ПЭВМ, т.к. работа пользователя связана с восприятием информации. Зрительная информация составляет 80 процентов от общего объема. Правильное освещение повышает производительность труда. Исследования показывают, что при хорошем освещении производительность труда повышается примерно на 15 процентов.

В помещениях используется естественное и искусственное освещение.

Естественное освещение предполагает проникновение внутрь солнечного света через окна и различного типа светопроемы. Качество естественного освещения внутри помещения определяет коэффициент  $K_o$ , который рассчитывается как отношение застекленной поверхности к площади пола. Освещение помещений нормируется. Согласно установленным нормативам световой коэффициент колеблется от 0,10 до 0,20. Однако оценка естественной освещенности по световому коэффициенту недостаточна, так как при этом не учитываются факторы, влияющие на естественную освещенность (расположение окон, рабочих мест внутри помещения, высота и расположение противоположных зданий и т.п.). Поэтому для оценки естественной освещенности используют коэффициент естественной освещенности  $K_{eo}$ , который представляет

собой отношение освещенности в заданной точке помещения к одновременно измеренной освещенности наружной точки, находящейся на горизонтальной плоскости, освещенной рассеянным светом открытого небосвода.

Естественное освещение — наиболее благоприятное для человека, однако оно не может в полной мере обеспечить необходимую освещенность помещения. Поэтому в практической деятельности широко используют искусственное освещение.

Рациональное искусственное освещение предусматривает равномерную освещенность, без резких изменений и пульсаций. благоприятный спектральный состав света и достаточную яркость. Поэтому для рационального освещения необходимо создавать общее и местное освещение.

Освещенность определяется люксметром. Он состоит из селенового элемента и миллиамперметра. при отсутствии люксметра для определения освещенности руководствуются нормами электрического освещения, выраженными в ваттах на 1 м<sup>2</sup> площади. Освещенность в зоне работы пользователя ПЭВМ должна быть 300–500 лк.

Для искусственного электрического освещения применяют лампы накаливания и люминесцентные. Люминесцентные лампы обеспечивают высокое качество и имитируют естественное освещение. Они экономичны по расходу электроэнергии, световой отдаче и сроку службы. Наиболее приемлемы лампы ЛБ (белый свет) и ЛТБ (темно-белый свет) мощностью 20, 40 или 80 Вт.

## **Электромагнитные поля и ионизирующее излучение**

Монитор является источником широкополосных электромагнитных излучение: мягкого рентгеновского, ультрафиолетового, ближнего инфракрасного, радиочастотного диапазона, а также сверх- и инфранизкочастотного электростатических полей. Основным источником вредного воздействия является высокая напряженность электромагнитного поля, создаваемого монитором, значений которой лежат в пределах от 4 до 70 миллигаусс. Напряженность магнитного поля даже в пределах 4 миллигаусс вредна для живой клетки. Самая опасная низкочастотная составляющая электромагнитного поля (до 100 Гц) способствует изменению биохимической реакции в крови на клеточном уровне, что приводит к возникновению у человека симптомом раздражительности, нервного напряжения и стресса, способствует нарушению репродуктивной функции и возникновению рака.

Что касается высокочастотной составляющей электромагнитного поля, то по данным Шведской национальной комиссии по безопасности и здоровью, на рабочем месте она не превышает 1% от предельно допустимой величины, и поэтому её воздействие на организм человека считается незначительным.

Интенсивность рентгеновского излучения зависит от напряжения, подаваемого на электронно-лучевую трубку. Для мониторов с диагональю 14 дюймов используется напряжение, которое дает излучение, близкое к фоновому, и оно не представляет большой опасности. Но у мониторов с большим экраном (17-21 дюйм) рентгеновское излучение может быть значительным. Электростатическое излучение монитора ведет к деионизации воздуха в окрестностях монитора, что способствует изменению клеточного развития, увеличению клеточного развития, увеличению вероятности возникновения глазной болезни катаракты. Электростатическое поле также способно изменять клеточное развитие и обострять некоторые заболевания кожи.

## Микроклимат

Микроклимат — климат внутренней среды производственных помещений, определяется действующим на организм человека сочетанием температуры, влажности и скорости движения воздуха, а также температуры окружающих поверхностей.

Микроклимат зависит от климатического пояса и сезона года, размеров помещения и числа работающих, условий отопления и вентиляции. Санитарные нормы микроклимата помещений СанПиН 2.2.4.548–96 регламентируют нормы микроклимата.

Таблица 5.3. Оптимальные нормы микроклимата

Период года	Категория работ	Температура воздуха, С°	Относительная влажность воздуха, %	Скорость движения воздуха, м/с
Холодный	Легкая 1а	22-24	40-60	0,1
	Легкая 1б	21-23	40-60	0,1
Теплый	Легкая 1а	23-25	40-60	0,1
	Легкая 1б	22-24	40-60	0,2

Работа с ПЭВМ делится на 2 вида: к 1а относятся работы, производимые сидя и не требующие физического напряжения, при которых расход энергии составляет до 120 ккал/ч; к 1б относятся работы, производимые сидя, стоя или связанные с ходьбой и сопровождающиеся некоторым физическим напряжением, при которых расход энергии составляет от 120 до 150 ккал/ч.

В таблице 5.3 приведены оптимальные нормы микроклимата.

Для обеспечения надлежащего качественного состава воздуха необходимы систематическое проветривание, наличие приточно-вытяжной вентиляции, установка увлажнителей, заправляемых ежедневно дистиллированной или прокипяченной водой, установка кондиционеров в оконных рамах, ежедневная влажная уборка, ежемесячное протирание спиртом клавиатуры и экрана, установка на окнах штор и жалюзи.

## Статические перегрузки

У людей, работающих за компьютерами наибольшее число жалоб на здоровье связано с заболеваниями мышц и суставов. Чаще всего это просто онемение шеи, боль в плечах и пояснице или покалывание в ногах. Но бывают и более серьезные заболевания. Наиболее распространен кистевой туннельный синдром (carpal tunnel syndrome), при котором нервы руки повреждаются вследствие частой и длительной работы на компьютере. В наиболее тяжелой форме этот синдром проявляется в виде мучительных болей, лишаящих человека трудоспособности.

Лечение КТС в ряде случаев представляет сложную задачу, поскольку часто требуется назначение различных противовоспалительных средств. В некоторых случаях требуется даже хирургическое лечение: удлинение поперечной связки. Часто, но не всегда, удается добиться полного выздоровления. Именно поэтому, очень важно стараться предотвратить развитие КТС всеми доступными методами, а если он все же возник, максимально рано начать лечение.

Наиболее тяжелые случаи КТС встречаются при поздней диагностике и несвоевременно начатом лечении. В то же время, можно избежать боли и функциональных расстройств,

если выявить КТС на ранних стадиях. Для начальной стадии КТС характерно появление дрожи, зуда, покалывания в пальцах. Чаще всего эти симптомы появляются через несколько часов после окончания работы. Как следствие, большинство людей не связывают наличие этих явлений со своей работой. Это приводит к запущенным случаям КТС. Постепенно присоединяется онемение, боль и тяжесть в руках. Для большинства больных начало заболевания проходит незамеченным.

При обнаружении признаков КТС необходимо обратиться к врачу, который с помощью весьма несложных исследований проведет диагностику и при необходимости, назначит лечение.

## Требования к организации рабочего места

### Требования к оборудованию

Существует стандарт на ВДТ, обязательный для любого монитора, продаваемого в России (см. ГОСТ 27954–88, СанПиН 2.2.2.542–96). Основные требования к ВДТ изложены в таблице 5.4.

Таблица 5.4. Основные требования к ВДТ

Характеристика монитора	Требования ГОСТ 27954–88
Частота кадров при работе с позитивным контрастом	не менее 60 Гц
Частота кадров в режиме обработки текста	не менее 72 Гц
Дрожание элементов изображения	не более 0,1 мм
Антибликовое покрытие	обязательно
Доверительный уровень шума	не более 50 дБ
Мощность дозы рентгеновского излучения на расстоянии 5 см от экрана при 41-часовой неделе	не более 0,03 мкР/с

Конструкция ВДТ должна обеспечивать возможность фронтального наблюдения экрана путем поворота корпуса в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси в пределах  $\pm 30^\circ$  и в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси в пределах  $\pm 30^\circ$  с фиксацией в заданном положении. Дизайн ВДТ должен предусматривать окраску корпуса в спокойные мягкие тона с диффузным рассеиванием света. Корпус ВДТ и ПЭВМ, клавиатура и другие локи ПЭВМ должны иметь матовую поверхность одного цвета с коэффициентом отражения 0,4–0,6 и не иметь блестящих деталей, способных создавать блики. На лицевой стороне корпуса ВДТ не рекомендуется располагать органы управления, маркировку, какие-либо вспомогательные надписи и обозначения. При необходимости расположения органов управления на лицевой панели они должны закрываться крышкой или быть утоплены в корпусе.

ВДТ должны соответствовать следующим параметрам:

- 1) Параметры безопасности — ГОСТ Р 50377–72
- 2) Санитарно-гигиенические требования ГОСТ Р 26329–84 или ГОСТ 2718–18



### 3) Электромагнитная совместимость — ГОСТ 29216–91

#### **Требования к клавиатуре**

Конструкция клавиатуры должна предусматривать:

- исполнение в виде отдельного устройства с возможностью свободного перемещения
- опорное приспособление, позволяющее изменять угол наклона поверхности клавиатуры в пределах от 5 до 15 градусов
- высоту среднего ряда клавиш не более 30 мм
- расположение часто используемых клавиш в центре, внизу и справа, редко используемых — вверху и слева
- выделение цветом, размером, формой и местом расположения функциональных групп клавиш
- минимальный размер клавиш — 13 мм, оптимальный — 15 мм
- клавиши с углублением в центре и шагом  $19 \pm 1$  мм
- расстояние между клавишами не менее 3 мм
- одинаковый ход для всех клавиш с минимальным сопротивлением нажатию 0,25 Н и максимальным — не более 1,5 Н
- звуковую обратную связь от включения клавиш с регулировкой уровня звукового сигнала и возможности её отключения

#### **Требования к помещению для эксплуатации ВДТ и ПЭВМ**

Использование подвальных помещений запрещается. Помещение не должно граничить с помещениями, в которых уровни шума и вибрации превышают допустимые значения (механические цеха, мастерские, гимнастические залы и т.д.). Размер помещения рассчитывается из требований площади на одно рабочее место с ВДТ или ПЭВМ не менее 6 м<sup>2</sup>, а объема не менее 20<sup>3</sup>. Помещение должно иметь естественное и искусственное освещение. Для внутренней отделки интерьера должны использоваться диффузно-отражающие материалы с коэффициентом отражения для потолка — 0,7–0,8; для стен — 0,5–0,6; для пола — 0,3–0,5. Поверхность пола в помещении должна быть ровной, без выбоин, нескользкой, удобной для очистки и влажной уборки, обладать антистатическими свойствами.

#### **Оборудование и расположение рабочего места ПЭВМ**

Рабочее место пользователя ПЭВМ состоит из стола, на котором помещается монитор, ПЭВМ, клавиатура, и стула.

Рабочие места по отношению к световым проемам должна располагаться так, чтобы естественный свет падал сбоку, преимущественно слева.

Схемы расположения рабочих мест должны учитывать расстояния между рабочими столами и видеомониторами (в направлении тыла поверхности одного видеомонитора и

экрана другого видеомонитора), которое должно быть не менее 2 м, а расстояние между боковыми поверхностями видеомониторов – не менее 1,2 м. Оконные проемы в помещениях использования ВДТ и ПЭВМ должны быть оборудованы регулирующими устройствами типа: жалюзи, занавеси, внешние козырьки и др.

Длина рабочего стола (слева направо) должна быть не менее 70 см, ширина должна обеспечивать место перед клавиатурой не менее 30 см для расположения записей, текста программы и др. Поверхность стола, на котором располагается клавиатура и тетрадь, должна иметь наклон 12–15°; допускается и горизонтальная поверхность стола. Высота края стола, обращенного к работающему за видеотерминалом, кресла или стула над полом и ширина пространства для ног под столом должны приниматься в соответствии с ростом программиста. ширина пространства для ног под столом должна быть не менее 50 см, глубина — не менее 45 см.

Кресло должно иметь подлокотники и подъемно-поворотное устройство для регуляции высоты сидения и спинки. а также угла наклона спинки. Желательно, чтобы рельеф спинки повторял форму спины. Высота поверхности сидения должна регулироваться в пределах 40–50 см, а угол наклона спинки — в пределах 90–110°. Ширина сидения должна быть 40 см, глубина не менее 38 см. Высота опорной поверхности спинки — не менее 30 см, ее ширина — не менее 38 см. Материал покрытия должен обеспечивать возможность легкой очистки от загрязнения. Поверхность сидения и спинки должны быть полумягкими, с нескользящим, неэлектризующимся и воздухопроницаемым покрытием.

## Нормирование электромагнитных излучений

При работе с ПЭВМ оператор подвергается воздействию электромагнитного поля. При длительном воздействии электромагнитных полей на человека возникает тепловой эффект — организм не в состоянии отвести тепло, полученное в результате воздействия электромагнитных полей. Наиболее уязвимы органы, содержащие много воды: глаза, почки и т.д. Так же электромагнитные поля действуют на клеточном уровне. Поэтому ГОСТ 12.1.006–84 устанавливает допустимые уровни электромагнитных излучений (ЭМИ) на рабочих местах персонала, работающих в помещениях с источниками ЭМП. Уровни напряженности ЭМП на рабочих местах персонала, работающих в помещениях с источниками ЭМП в течение дня не должны превышать значения, приведенные в таблице 5 для электрической составляющей  $E$  и для магнитной составляющей  $H$ .

Таблица 5.5. Уровни напряженности ЭМП на рабочих местах персонала

f, МГц	от 0.06 до 3	от 3 до 30	от 30 до 300
E, В/м	500	300	80
H, А/м	50	—	—

Для снижения напряженности ЭМП используются защитные экраны.

Кроме ЭМИ при эксплуатации ПЭВМ имеют место рентгеновское, видимое, ультрафиолетовое и инфракрасное излучения, интенсивность которых обычно значительно ниже существующих допустимых нормативных значений. Однако, учитывая недостаточную изученность воздействия этих излучений на оператора рекомендуется ограничивать время работы с ПЭВМ, не размещать ПЭВМ концентрировано в рабочей зоне, применять защитные экраны, которые необходимо не менее одного раза в течение рабочей смены протирать от пыли.

## Нормирование электростатического поля

При работе с ПЭВМ оператор может находиться под воздействием электростатического поля. Степень его воздействия на оператора зависит от напряженности и времени воздействия. Предельно допустимая напряженность электростатического поля на рабочих местах не должна превышать:

- при воздействии до 1 часа — 60 кВ/м.
- при воздействии от 1 часа до 9 часа —  $60/\sqrt{t}$ ,

где  $t$  - время от 1 до 9 часов.

В случае превышения напряженности электрического поля нормируемого значения должны применяться средства защиты, такие как: защитные экраны, нейтрализаторы, антистатические препараты и увлажнители.

## Требования по электробезопасности

Питание ПЭВМ осуществляется от электросети переменного тока с напряжением 220В и частотой 50Гц, поэтому возникает опасность поражения электрическим током.

Технические способы и средства обеспечения электробезопасности в соответствии с ГОСТ 12.1.019–79 разделены на две группы: обеспечивающие защиту от случайного соприкосновения к токоведущим частям и защищающие от поражения током при соприкосновении к металлическим нетокведущим частям, которые могут оказаться под напряжением в результате повреждения изоляции или по иным причинам.

При прохождении через организм человека электрический ток оказывает термическое, электролитическое и биологическое воздействие. Термическое воздействие выражается в ожогах отдельных участков тела. Электролитическое воздействие выражается в изменении химического состава крови и других органических жидкостей. Биологическое воздействие выражается в непроизвольном судорожном сокращении мышц, в нарушении внутренних биоэлектрических процессов.

Для предотвращения поражения электрическим током используется защитное заземление. Заземлению подлежат металлические нетокведущие части оборудования, на которых возможно возникновение напряжения вследствие повреждения изоляции. Защитное заземление позволяет снизить до безопасного значения напряжение прикосновения, возникающее вследствие замыкания на корпус, и осуществляется в помещениях с помощью трубопроводов и подобных им проводящих предметов.

Необходимо обеспечить недоступность токоведущих частей, находящихся под напряжением для случайного прикосновения за счет применения сплошных корпусов, скрывающих токопроводящие части.

## Требования по пожарной безопасности

Вычислительные центры и другие помещения, в которых расположены компьютеры, оснащены развитой системой электропроводки. Короткое замыкание в электросети может привести к пожару. Основы противопожарной защиты определяются стандартом ГОСТ 12.1.004–91 "Пожарная безопасность".

Конструкции здания, в котором расположен вычислительный центр, должны в течении определенного времени сопротивляться воздействию пожара обладать соответствующей огнестойкостью.

Конструкция здания должна предусматривать возможность эвакуации людей в случае возникновения пожара. В помещении должны быть углекислотные огнетушители (типа ОУ-2А, ОУ-5, ОУ-8) и автоматические средства обнаружения пожаров, типа тепловых извещателей, срабатывающих на повышение абсолютного значения температуры.

## Приложение.

### Метод Монте-Карло для схемы с тремя типами частиц

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \longrightarrow T_1, T_2 \\ T_1 \longrightarrow T_2, T_3 \\ T_2 \longrightarrow T_1, T_3 \end{array} \right.$$

---

#### Technical Parameters

N = 100;      —      Time break  
lambda0 = 4;   —      Intensivity of incoming stream  
lambda1 = 1;   —      Intensivity reaction 1  
lambda2 = 1;   —      Intensivity reaction 2  
T0 = 0;        —      Start time  
T = 25;        —      Final time  
p = [0.3,0.4,0.5];

---

#### Starting Conditions

A1 = 0;  
A2 = 0;  
A3 = 0;

---

#### Main Part

```
clear t;  
clear x1;  
clear x2;  
clear x3;  
  
x1(1) = A1;  
x2(1) = A2;  
x3(1) = A3;  
t(1) = T0;  
tt(3) = 0;  
i = 1;  
  
while t(i) < T
```

```

tt(1) = random('exp',1/lambda0,1,1);
if x1(i) == 0
    tt(2) = 50;
else
    tt(2) = random('exp',1/(lambda1*x1(i)),1,1);
end
if x2(i) == 0
    tt(3) = 50;
else
    tt(3) = random('exp',1/(lambda2*x2(i)),1,1);
end

s = min(tt);
t(i+1) = t(i) + s;
if t(i+1) < T
    q = rand(1,1);
    if s == tt(1)
        if q < p(1)
            x1(i+1) = x1(i) + 1;
            x2(i+1) = x2(i);
            x3(i+1) = x3(i);
        else
            x1(i+1) = x1(i);
            x2(i+1) = x2(i) + 1;
            x3(i+1) = x3(i);
        end
    end
    if s == tt(2)
        if q < p(2)
            x1(i+1) = x1(i) - 1;
            x2(i+1) = x2(i) + 1;
            x3(i+1) = x3(i);
        else
            x1(i+1) = x1(i) - 1;
            x2(i+1) = x2(i);
            x3(i+1) = x3(i) + 1;
        end
    end
    if s == tt(3)
        if q < p(3)
            x1(i+1) = x1(i) + 1;
            x2(i+1) = x2(i) - 1;
            x3(i+1) = x3(i);
        else
            x1(i+1) = x1(i);
            x2(i+1) = x2(i) - 1;
            x3(i+1) = x3(i) + 1;
        end
    end
end

```

```

        end
    end
else
    t(i+1) = T;
    x1(i+1) = x1(i);
    x2(i+1) = x2(i);
    x3(i+1) = x3(i);
end
i = i + 1;
end

```

---

Visualisation part

```

figure;
subplot(3,1,1); stairs(t,x1,'b',0.1); grid on;
subplot(3,1,2); stairs(t,x2,'b',0.1); grid on;
subplot(3,1,3); stairs(t,x3,'b',0.1); grid on;

```

## Метод Монте-Карло для исследования стационарного решения схемы 3.1.1.

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow T_1 \\ T_1 + T_2 \longrightarrow T_3 \\ T_3 \longrightarrow T_2 + T_4 \end{cases}$$

### Основная программа.

---

#### Technical Parameters

N = 100;      —      Time break  
lambda0 = 6;    —    Intensity of incoming stream  
lambda1 = 4;    —    Intensity reaction 1  
lambda2 = 1;    —    Intensity reaction 2  
T0 = 0;        —       Start time  
T = 25;        —       Final time  
A2 = 10;       —       Number of working channels  
nk = 500;      —      Number of iterations Monte-Carlo method

---

#### Starting Conditions

A1 = 0; Number requests

---

#### Technical part

```
clear t1;
clear x1sum;
clear x2sum;
clear x3sum;
clear x4sum;
clear p;

x1sum(N+1) = 0;
x2sum(N+1) = 0;
x3sum(N+1) = 0;
x4sum(N+1) = 0;
t1 = T0:(T-T0)/N:T;
```

---

#### Main Part

```
for k=1:nk

    clear t;
```



```

clear x1;
clear x2;
clear x3;
clear x4;

x1(1) = A0;
x2(1) = 0;
x3(1) = 0;
x4(1) = A1;
t(1) = T0;
tt(3) = 0;
i = 1;

while t(i) < T

    tt(1) = random('exp',1/lambda0,1,1);
    if x0(i)*x1(i) == 0
        tt(2) = 50;
    else
        tt(2) = random('exp',1/(lambda1*x0(i)*x1(i)),1,1);
    end
    if x(i) == 0
        tt(3) = 50;
    else
        tt(3) = random('exp',1/(lambda2*x(i)),1,1);
    end

    s = min(tt);
    t(i+1) = t(i) + s;
    if t(i+1) < T
        if s == tt(1)
            x1(i+1) = x1(i) + 1;
            x2(i+1) = x2(i);
            x3(i+1) = x3(i);
            x4(i+1) = x4(i);
        end
        if s == tt(2)
            x1(i+1) = x1(i) - 1;
            x2(i+1) = x2(i) - 1;
            x3(i+1) = x3(i) + 1;
            x4(i+1) = x4(i);
        end
        if s == tt(3)
            x1(i+1) = x1(i);
            x2(i+1) = x2(i) + 1;
            x3(i+1) = x3(i) - 1;
            x4(i+1) = x4(i) + 1;
        end
    else

```

```

        t(i+1) = T;
        x1(i+1) = x1(i);
        x2(i+1) = x2(i);
        x3(i+1) = x3(i);
        x4(i+1) = x4(i);
    end
    i = i + 1;
end
x1sum(k) = x1(i);
x2sum(k) = x2(i);
        x3sum(k) = x3(i);
        x4sum(k) = x4(i);

end

```

---

Visualisation part

```

clear p1;
probabilityhist2(x0sum,xsum,A1);

amax = max(x0sum);
amin = min(x0sum);

p = classicalmodel(lambda0,lambda2,amin,amax,A1);

p1(1) = sum(p(1:A1+1));
p1(2:amax+1) = p(A1+2:amax+A1+1);
p2(1:A1) = p(1:A1);
p2(A1+1) = sum(p(A1+1:amax+A1+1));

subplot(2,1,1); hplot = plot(0:amax,p1,'r*'); set(hplot,'LineWidth',5);
subplot(2,1,2); hplot = plot(0:A1,p2,'r*'); set(hplot,'LineWidth',5); grid on;
order = sum(x0sum)/nk
system = order + sum(xsum)/nk
timeorder = order/lambda0
timesystem = system/lambda0

```

## Внутренний модуль 1.

```

function p = classicalmodel(lambda,mu,amin,amax,lab)

clear p;

if lab == 1

    ro = lambda/mu;
    p(1) = 1 - ro;

    for i = 1:3*amax

```

```

        p(i+1) = ro*p(i);
    end

    classorder = (ro*ro)/(1-ro)
    classsystem = ro/(1-ro)
    cltimeorder = classorder/lambda
    cltimesystem = classsystem/lambda
end

if lab > 1

    ro = lambda/mu;
    kappa = ro/lab;
    p(1) = 1;
    coef = 1;

    for i = 1:lab
        coef = coef*(ro/i);
        p(1) = p(1) + coef;
    end

    p(1) = p(1) + coef*(ro/i)*(1/(1-kappa));
    p(1) = 1/p(1);

    for i=1:lab
        p(i+1) = p(i)*(ro/i);
    end

    for i=lab+1:3*amax
        p(i+1) = p(i)*(ro/lab);
    end

    M = 0;
    for i=1:3*amax
        M = M + (i-1)*p(i);
    end

    classorder = (kappa*p(lab+1))/((1-kappa)*(1-kappa))
    classsystem = classorder + kappa*lab
    cltimeorder = classorder/lambda
    cltimesystem = classsystem/lambda
end
end

```

## Внутренний модуль 2.

```

function probabilityhist2(Y1,Y2,A1)

clear x1;
clear x2;
clear razmer;

```

```

d = size(Y1);
Y1 = round(Y1);
abeg = min(Y1);
afin = max(Y1);
x1(afin - abeg + 1) = 0; x2(A1+1) = 0;
for i = 1:d(2)
    if Y1(i)>0
        if Y2(i)<A1
            Y1(i) = Y1(i) - 1;
            Y2(i) = Y2(i) + 1;
        end
    end
end

for i = 1:d(2)
    x1(Y1(i) - abeg + 1) = x1(Y1(i) - abeg + 1) + 1;
    x2(Y2(i)+1) = x2(Y2(i)+1) + 1;
end

x1 = x1/d(2); x2 = x2/d(2);
razmer = abeg:afin; subplot(2,1,1);
bar(razmer,x1); grid on; hold on;
subplot(2,1,2); bar(0:A1,x2); grid on; hold on;

```

## Литература

- [1] Вентцель Е.С. Исследование операций. — Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. — 208 с.
- [2] Баруча–Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. — Наука, 1969. — 512 с.
- [3] Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 3-е, испр. и доп. М.: КомКнига, 2005. — 400с.
- [4] Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения: Учеб. для вухов. 2-е изд. / Под. ред. В.С. Зарубина, А.П.Крищенко. — М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. — 348с.
- [5] Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977. — 568 с.
- [6] Гантмахер Ф.Р., Полянин А.В. Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 576 с.
- [7] Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. — М.: Наука, 1971. — 436 с.
- [8] Сергеев А.А. Предельные теоремы для случайных процессов, характеризующих работу системы массового обслуживания с подвижными приборами // Обозр. прикл. промышл. математ., 2005, т. 12, вып. 3, с. 680.
- [9] Калинин А.В. Схемы взаимодействий: детерминированные и стохастические модели. — М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2005. — 32 с.
- [10] Калинин А.В. Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. — Успехи математических наук, 2002, т.57, вып.2, с 24-84.
- [11] Калинин А.В., Ланге А.М., Мاستихин А.В., Шапошников А.А. Численные методы Монте-Карло для моделирования схем взаимодействий при дискретных состояниях. — Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. "Естественные науки". 2005. №2.
- [12] Арустамов Э.А. Безопасность жизнедеятельности. — М.: Изд. Дом Дашков и К, 2000. — 678 с.
- [13] Белов С.В., Ильницкая А.В. Безопасность жизнедеятельности. — М.: Высшая школа, 1999. — 448 с.
- [14] Смирнов С.В. Организационно-экономическая часть дипломных проектов исследовательского профиля. — М.: МГТУ им. Баумана, 1995.