На правах рукописи

МАСТИХИН Антон Вячеславович

ФИНАЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ЭПИДЕМИИ

01.01.05 — теория вероятностей
и математическая статистика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена в Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук Калинкин А.В.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Шур М.Г. доктор физико-математических наук Рыков В.В.
Ведущая организация:	Математический институт имени В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится «___» _____ 2011 года в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.133.07 при Московском государственном институте электроники и математики (технический университет) по адресу: 105028, г. Москва, Б. Трехсвятительский пер., д. 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного института электроники и математики (технический университет) по адресу: 105028, г. Москва, Б. Трехсвятительский пер., д. 3.

Автореферат разослан «___» _____ 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 212.133.07
к.ф.-м.н., доцент Шнурков П.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В диссертационной работе рассматриваются марковские случайные процессы с дискретным множеством состояний N^3, $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, и непрерывным временем t, $t \in [0, \infty)$, интерпретируемые как процессы распространения эпидемии.

По точным решениям уравнений различных марковских процесов эпидемии и способам их вывода имеется обширная литература. Первыми детально рассмотренными марковскими процессами эпидемии были процесс эпидемии Бартлетта—Мак-Кендрика[1] и процесс эпидемии Вейса[2]; оба этих марковских процесса определяются как процессы рождения и гибели на множестве состояний N^2. В процессе эпидемии Бартлетта—Мак-Кендрика при взаимодействии переносчика инфекции и здоровой особи появляются два переносчика инфекции. Такой марковский процесс сложен для изучения; ряд результатов получен асимптотическими методами А.В. Нагаевым, А.Н. Старцевым, М. Мирзаевым.

В процессе эпидемии Вейса при взаимодействии переносчика инфекции и здоровой особи остается только переносчик инфекции, т. е. здоровая особь после контакта с переносчиком инфекции удаляется из популяции (популяция находится под наблюдением, но первоначальные переносчики инфекции не могут быть выявлены). Марковский процесс эпидемии Вейса более доступен для изучения; имеются многочисленные обобщения процесса Вейса на случай N^n. В диссертационной работе рассматриваются определенный Дж. Гани марковский процесс на N^3, интерпретируемый как двустадийный процесс распостранения СПИД, и определенный Н. Беккером процесс на N^3, интерпретируемый как двойная эпидемия.

Задача вычисления финального распределения вероятностей для марковского процесса на N^2 решалась в специальном случае *ветвящегося процесса*[3], когда переходные вероятности связаны нелинейным соотношением и известно нелинейное уравнение для одночастичной производящей функции переходных вероятностей. Процессы, рассмотренные в диссертации,

[1] Эпидемии процесс // Математическая энциклопедия. Т. 5. М.: Советская энциклопедия, 1985. Кол. 1008.
[2] Weiss G. On the spread of epidemics by carries // Biometrics. — 1965. — V. 21, № 2. — P. 481–490.
[3] Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. — М.: Наука, 1971. — 436 с.

принадлежат определенному Б.А. Севастьяновым[4] специальному классу марковских процессов на N^n. Для процессов класса 4) нахождение финального распределения сводится к решению стационарного первого уравнения Колмогорова для экспоненциальной производящей функции финальных вероятностей.

В диссертации при рассмотрении уравнений Колмогорова для процессов на N^3 используется экспоненциальная двойная производящая функция переходных вероятностей. Полученные решения уравнений сведены к интегральному виду, легко используемому для вывода предельных теорем. На основе интегральных представлений для производящей функции финальных вероятностей исследованы асимптотические свойства финальных распределений и установлены предельные теоремы для случая, когда число здоровых особей стремится к бесконечности, а число особей — переносчиков инфекции фиксировано.

Математическая теория эпидемий является областью прикладной математики и моделирование реальных эпидемий проводится численно на ЭВМ. С точки зрения «вычислительной» теории эпидемий марковские процессы Бартлетта—Мак-Кендрика, Вейса, Гани, Беккера и другие являются крайними модельными случаями. Однако они важны, так как дают возможность получить точные аналитические результаты и предельные теоремы. Подобные исследования позволяют объяснить и интерпретировать результаты статистического моделирования процессов эпидемии[5] [6].

Цель работы — получение точных решений уравнений Колмогорова для марковских процессов эпидемии, исследование финальных распределений в процессах эпидемии.

Основные результаты, выносимые на защиту:

Получено точное решение стационарного первого уравнения Колмогорова для процесса эпидемии Гани, исследовано финальное распределение процесса, получены предельные теоремы для числа финальных частиц.

[4]Севастьянов Б.А., Калинкин А.В. Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц // Доклады АН СССР. — 1982. — Т. 264, № 2. — С. 306–308.

[5]Калинкин А.В., Ланге А.М., Мастихин А.В., Шапошников А.А. Численные методы Монте-Карло для моделирования схем взаимодействий при дискретных состояниях // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. — 2005. — № 2(17). — С. 53–74.

[6]Мастихин А.В. Численное моделирование марковского процесса эпидемии // Третья Всероссийская конференция «Необратимые процессы в природе и технике»: Тезисы докладов. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. — 2005. — С. 62–63.

Получено точное решение системы из первого и второго уравнений Колмогорова для процесса эпидемии Беккера. Найдено финальное распределение, установлена предельная теорема.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми.

Методы исследования. Использовались методы теории марковских процессов со счетным множеством состояний, метод характеристических функций, методы теории дифференциальных уравнений в частных производных, специальные функции.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в математической теории эпидемий.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разделенных на параграфы, заключения и списка литературы из 69 наименований. Текст изложен на 93 страницах и включает 6 рисунков.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 3 статьях и 4 тезисов докладов. 5 научных работ опубликованы в журналах, входящих в утвержденный ВАК перечень ведущих рецензируемых научных изданий, в которых должны быть размещены научные результаты диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на научно-методической конференции, посвященной 40-летию НУК ФН МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, 1–2 декабря 2004 г.), Третьей Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике» (Москва, 24–26 января 2005 г.), Четырнадцатой Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастическим методам (Адлер, 29 сентября–7 октября 2007 г.), Международной конференции «Стохастические модели в биологии и предельные алгебры» (Омск, 2–7 августа 2010 г.).

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на научных семинарах в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана, Российском университете дружбы народов, Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Московском государственном институте электроники и математики (технический университет).

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность работы, сформулирована ее цель, определены научная новизна и практическая ценность. Кратко изложено содержание работы.

В первой главе приведены необходимые сведения о математическом аппарате теории марковских процессов с дискретным множеством состояний. Дано определение марковского ветвящегося процесса с взаимодействием, включающее схему взаимодействий и основные уравнения процесса — первое и второе уравнения Колмогорова для производящих функций переходных вероятностей.

В 1.1 дан обзор используемых далее результатов теории марковских процессов со счетным множеством состояний и непрерывным временем. Пусть $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$, $t \in [0, \infty)$, — однородный во времени марковский процесс на множестве состояний $N^n = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),\ \alpha_i = 0, 1, 2, \ldots,\ i = 1, \ldots, n\}$. Обозначим переходные вероятности $P_{\alpha\beta}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = \beta \,|\, \xi(0) = \alpha\}$, $\alpha, \beta \in N^n$. Марковский процесс задается плотностями переходных вероятностей $a_{\alpha\beta} = dP_{\alpha\beta}(t)/dt|_{t=0+}$. Выполнены обычные для таких процессов условия, при которых переходные вероятности удовлетворяют первой (обратной) системе дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} P_{\gamma\beta}(t), \quad \alpha \in N^n \tag{1}$$

(здесь и далее суммирование $\sum_{\gamma \in N^n}$ обозначается $\sum_{\gamma}$), и второй (прямой) системе дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \sum_{\gamma} P_{\alpha\gamma}(t) a_{\gamma\beta}, \quad \beta \in N^n; \tag{2}$$

начальные условия $P_{\alpha\alpha}(0) = 1$, $P_{\alpha\beta}(0) = 0$ при $\alpha \neq \beta$.

В 1.2 даны сведения о многомерных производящих функциях для дискретных вероятностных распределений и их свойствах.

В 1.3 дано описание системы с взаимодействиями частиц типов $T_1, \ldots, T_n$. Состояние системы характеризуется вектором $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и означает наличие совокупности S_α из α_1 частиц типа T_1, α_2 частиц типа T_2, $\ldots$, α_n

частиц типа T_n: $S_\alpha = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \cdots + \alpha_n T_n$. Возможные переходы системы из одного состояния в другое представляются схемой взаимодействий

$$\begin{cases} \varepsilon_1^1 T_1 + \varepsilon_2^1 T_2 + \cdots + \varepsilon_n^1 T_n \to \gamma_1^1 T_1 + \gamma_2^1 T_2 + \cdots + \gamma_n^1 T_n, \\ \qquad \cdots \\ \varepsilon_1^k T_1 + \varepsilon_2^k T_2 + \cdots + \varepsilon_n^k T_n \to \gamma_1^k T_1 + \gamma_2^k T_2 + \cdots + \gamma_n^k T_n, \\ \qquad \cdots \\ \varepsilon_1^l T_1 + \varepsilon_2^l T_2 + \cdots + \varepsilon_n^l T_n \to \gamma_1^l T_1 + \gamma_2^l T_2 + \cdots + \gamma_n^l T_n, \end{cases}$$

в которой комплексы частиц S_{ε^k}, $k = 1, \ldots, l$, фиксированы, а векторам $\gamma^k = (\gamma_1^k, \gamma_2^k, \ldots, \gamma_n^k)$ соответствуют распределения вероятностей $\{p_\gamma^k \geqslant 0$, $\sum_\gamma p_\gamma^k = 1$; $p_{\varepsilon^k}^k = 0\}$, $k = 1, \ldots, l$. Стохастическая модель такой системы строится в виде марковского ветвящегося процесса $\xi(t)$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний N^n. Событие $\{\xi(t) = \alpha\}$ означает наличие в системе в момент времени t совокупности частиц S_α. Через случайное время τ_α^k может произойти взаимодействие комплекса частиц S_{ε^k}. В этот момент из α_1 частиц типа T_1 выбирается ε_1^k частиц, $\ldots$, из α_n частиц типа T_n выбирается ε_n^k частиц, и этот комплекс частиц S_{ε^k} с распределением вероятностей $\{p_\gamma^k\}$ заменяется совокупностью S_γ новых частиц. Система из состояния S_α, соответствующего вектору α, переходит в состояние $S_{\alpha - \varepsilon^k + \gamma}$, соответствующее вектору $\alpha - \varepsilon^k + \gamma$, и далее аналогичная эволюция системы частиц.

Вероятность взаимодействия комплекса частиц S_{ε^k} за время Δt, $\Delta t \to 0$, пропорциональна числу $C_{\alpha_1}^{\varepsilon_1^k}$ сочетаний ε_1^k частиц типа T_1 из имеющихся α_1 частиц типа T_1, $\ldots$, пропорциональна числу $C_{\alpha_n}^{\varepsilon_n^k}$ сочетаний ε_n^k частиц типа T_n из имеющихся α_n частиц типа T_n и равна $\varphi_\alpha^k \Delta t + o(\Delta t)$, где $\varphi_\alpha^k = \lambda_k \prod_{i=1}^n \alpha_i(\alpha_i - 1) \cdots (\alpha_i - \varepsilon_i^k + 1)$ ($\varphi_\alpha^k = 0$, если при некотором i имеет место неравенство $\alpha_i < \varepsilon_i^k$); λ_k — коэффициент интенсивности взаимодействия комплекса S_{ε^k}. Плотности переходных вероятностей марковского процесса $\xi(t)$ полагают равными $a_{\alpha\alpha} = -\sum_{k=1}^l \varphi_\alpha^k$, $a_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^l \varphi_\alpha^k p_{\beta - \alpha + \varepsilon^k}^k$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in N^n$.

Время τ_α^k имеет экспоненциальное распределение $\mathbf{P}\{\tau_\alpha^k < t\} = 1 - e^{-\varphi_\alpha^k t}$. В состоянии S_α система находится случайное время τ_α, до тех пор пока не произойдет какое-либо из l взаимодействий, т. е. $\tau_\alpha = \min(\tau_\alpha^1, \ldots, \tau_\alpha^l)$. Поскольку предполагается, что случайные величины $\tau_\alpha^1, \ldots, \tau_\alpha^l$ независимы,

то $\mathbf{P}\{\tau_\alpha < t\} = 1 - e^{-(\varphi_\alpha^1 + \dots + \varphi_\alpha^l)t}$, а вероятность, что произошло взаимодействие комплекса частиц S_{ε^k}, при условии, что взаимодействие имело место, равна $\varphi_\alpha^k/(\varphi_\alpha^1 + \dots + \varphi_\alpha^l)$.

Далее для вектора $s = (s_1, \dots, s_n)$ применяется сокращенная запись $s^\alpha = s_1^{\alpha_1} \dots s_n^{\alpha_n}$. Неравенство $|s| \leqslant 1$ означает, что $|s_i| \leqslant 1$, $i = 1, \dots, n$. Запись $\partial^\alpha/\partial s^\alpha$ обозначает частную производную $\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}/(\partial s_1^{\alpha_1} \cdots \partial s_n^{\alpha_n})$. Для вектора $z = (z_1, \dots, z_n)$ приняты аналогичные обозначения; $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$.

Для свертки системы уравнений (1) используется экспоненциальная производящая функция переходных вероятностей $G_\beta(t; z) = \sum_\alpha P_{\alpha\beta}(t) z^\alpha/\alpha!$, $\beta \in N^n$, и линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами $h_k(\partial/\partial z) = \sum_\gamma p_\gamma^k \partial^\gamma/\partial z^\gamma$, $k = 1, \dots, l$.

Т е о р е м а 1.1.[7] *Экспоненциальная производящая функция переходных вероятностей $G_\beta(t; z)$ при любом $\beta \in N^n$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных производных*

$$\frac{\partial G_\beta(t; z)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k z^{\varepsilon^k} \left(h_k\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\partial^{\varepsilon^k}}{\partial z^{\varepsilon^k}} \right) G_\beta(t; z), \quad G_\beta(0; z) = \frac{z^\beta}{\beta!}.$$

Для свертки второй системы (2) используются производящие функции $F_\alpha(t; s) = \sum_\beta P_{\alpha\beta}(t) s^\beta$, $\alpha \in N^n$; $h_k(s) = \sum_\gamma p_\gamma^k s^\gamma$, $k = 1, \dots, l$.

Т е о р е м а 1.2.[7)] *Производящая функция переходных вероятностей $F_\alpha(t; s)$ при любом $\alpha \in N^n$ удовлетворяет при $|s| \leqslant 1$ линейному дифференциальному уравнению в частных производных*

$$\frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \left(h_k(s) - s^{\varepsilon^k} \right) \frac{\partial^{\varepsilon^k} F_\alpha(t; s)}{\partial s^{\varepsilon^k}}, \quad F_\alpha(0; s) = s^\alpha.$$

Далее в первой главе диссертации дается обзор некоторых процессов эпидемии: эпидемия Вейса $T_1 + T_2 \to T_1,\ T_1 \to 0$; эпидемия Бартлетта—Мак-Кендрика $T_1 + T_2 \to 2T_1,\ T_1 \to 0$; повторяющаяся эпидемия $T_1 + T_2 \to 2T_1,\ T_1 \to 0,\ 0 \to T_2$; эпидемия с размножением переносчиков $T_1 + T_2 \to T_1,\ T_1 \to 0, 2T_1$; эпидемия, открытая для переносчиков $T_1 + T_2 \to T_1,\ T_1 \to 0,\ 0 \to T_1$; эпидемия с приобретением иммунитета $T_1 + T_2 \to 2T_1, T_1 \to T_3,\ T_3 \to T_2$.

[7]Калинкин А.В. Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием // Усп. матем. наук. — 2002. — Т. 57, № 2. — С. 23–84.

Во второй главе рассмотрен марковский процесс эпидемии Гани. Найдено явное решение стационарного второго уравнения для двойной производящей функции финальных вероятностей. Исследованы асимптотические свойства финального распределения.

В 2.1 определен марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$, $t \in [0, \infty)$, дана его интерпретация как процесса эпидемии с тремя типами особей и двумя стадиями заболевания. Частицы типа T_1 — зараженные особи (источники инфекции); частицы типа T_2 — здоровые особи (восприимчивые к инфекции, не имевшие контактов с зараженными); частицы типа T_3 — особи, имевшие один контакт с зараженными. Здоровая особь после двух контактов с зараженными удаляется из популяции. Схема взаимодействий в эпидемии

$$T_1 + T_2 \to T_1 + T_3, \quad T_1 + T_3 \to T_1, \quad T_1 \to 0.$$

На множестве состояний $N^3 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0, 1, 2, \dots\}$ рассматривается однородный во времени марковский процесс $\xi(t), t \in [0, \infty)$, с переходными вероятностями $P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\}$. Пусть при $t \to 0+$ переходные вероятности имеют вид ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$)

$$\begin{aligned}
&P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1,\alpha_2-1,\alpha_3+1)}(t) = \lambda_1\alpha_1\alpha_2 t + o(t),\\
&P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3-1)}(t) = \lambda_2\alpha_1\alpha_3 t + o(t), \quad P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1-1,\alpha_2,\alpha_3)}(t) = \lambda_3\alpha_1 t + o(t),\\
&P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(t) = 1 - (\lambda_1\alpha_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1\alpha_3 + \lambda_3\alpha_1)t + o(t).
\end{aligned}$$

Вторая система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей $P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}(t)$ после свертки получает вид ($|s| \leqslant 1$)

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} = \lambda_1\big(s_1 s_3 - s_1 s_2\big)\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_2\big(s_1 - s_1 s_3\big)\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial s_1 \partial s_3} + \lambda_3\big(1 - s_1\big)\frac{\partial F_\alpha}{\partial s_1}, \quad (3)$$

с начальным условием $F_\alpha(0; s_1, s_2, s_3) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} s_3^{\alpha_3}$.

Экспоненциальная (двойная) производящая функция переходных вероятностей

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!} F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)$$

удовлетворяет первому уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda_1 z_1 z_2 \Big(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_3} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_2} \Big) + \lambda_2 z_1 z_3 \Big(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_3} \Big) + \lambda_3 z_1 \Big(\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} \Big),$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = e^{z_1 s_1 + z_2 s_2 + z_3 s_3}$.

В 2.2 ставится задача о финальных вероятностях для поглощающих состояний $(0, \gamma_2, \gamma_3)$, $\gamma_2, \gamma_3 = 0, 1, 2, \ldots$,

$$q_{(0,\gamma_2,\gamma_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} = \lim_{t \to \infty} P_{(0,\gamma_2,\gamma_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(t), \ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in N^3; \qquad \sum_{\gamma_2,\gamma_3=0}^{\infty} q_{(0,\gamma_2,\gamma_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} = 1.$$

Марковский процесс $\xi(t)$ введен Гани[8] и является обобщением марковского процесса эпидемии Вейса. В работе [8)] второе уравнение Колмогорова (3) решено методом преобразования Лапласа, при значениях параметров $\lambda_1 = \lambda_2$. Однако выражение для решения в [8)], состоящее из наборов многократных сумм и произведений, малопригодно для исследования асимптотических свойств рассматриваемого случайного процесса.

В 2.3 применена экспоненциальная (двойная) производящая функция для нахождения финальных вероятностей. Введем производящую функцию финальных вероятностей $\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2, s_3) = \sum_{\gamma_2,\gamma_3=0}^{\infty} q_{(0,\gamma_2,\gamma_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} s_2^{\gamma_2} s_3^{\gamma_3}$, $|s_2| \leqslant 1$, $|s_3| \leqslant 1$, и экспоненциальную производящую функцию

$$\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} \Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2, s_3).$$

Первое стационарное уравнение для экспоненциальной (двойной) производящей функции имеет вид

$$\lambda_1 z_2 \Big(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_3} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_2} \Big) + \lambda_2 z_3 \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_3} \Big) + \lambda_3 \Big(\Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \Big) = 0, \quad (4)$$

граничные условия $\Phi(0, z_2, z_3; s_2, s_3) = e^{s_2 z_2 + s_3 z_3}$, $\Phi(z_1, 0, 0; s_2, s_3) = e^{z_1}$.

В 2.4 получено интегральное представление для экспоненциальной производящей функции.

Т е о р е м а 2.1. *Положим $\rho = \lambda_2/\lambda_1$ и $\mu = \lambda_3/\lambda_1$; пусть $\rho \neq 1$. Экспоненциальная производящая функция финальных вероятностей равна*

[8] Gani J. Approaches to the modelling of AIDS // Lecture notes in biomathematics. V. 86. Stochastic processes in epidemic theory. — Heidelberg: Springer. 1990. — P. 145–154.

$$\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3) =$$
$$= \int_0^\infty \exp\{-\mu v + z_2(1+(s_2-1)e^{-v} - (s_3-1)\frac{e^{-\rho v} - e^{-v}}{\rho - 1}) + z_3(1+(s_3-1)e^{-\rho v})\} \times$$
$$\times [\mu + z_2((s_2-1)e^{-v} - (s_3-1)\frac{\rho e^{-\rho v} - e^{-v}}{\rho - 1}) + z_3(s_3-1)\rho e^{-\rho v}] J_0\big(2\sqrt{-\mu z_1 v}\big) dv, \tag{5}$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя порядка нуль.

Вид уравнения (4) привел к рассмотрению значений параметра $\rho > 1$, $0 < \rho < 1$ и $\rho = 1$. В 2.4 рассмотрен случай $\rho > 1$. При замене переменных

$$x = z_1, \quad y = \exp\{(1-\rho) z_2^{-\rho} z_3\}, \quad \zeta = \exp\{(\rho - 1) z_2^{-\rho} z_3 - z_2^{1-\rho}\},$$
$$z_1 = x, \quad z_2 = (-\ln \zeta y)^{1/(1-\rho)}, \qquad z_3 = \frac{\ln y}{1-\rho}(-\ln \zeta y)^{\rho/(1-\rho)},$$

уравнение (4) сводится к гиперболическому уравнению

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\mu}{(\rho - 1) y \ln \zeta y} u(x,y) = 0, \tag{6}$$

с граничными условиями

$$u(x,0) = 0, \ u(0,y) = z_2^{\mu} e^{z_2(s_2-1) - z_3(s_3-1)}.$$

Далее определена и решена вспомогательная граничная задача для уравнения (6). Для $y_0 > 0$ обозначим $u^0(x,y)$ — решение гиперболического уравнения (6) с граничными условиями на характеристиках $y = y_0$ и $x = 0$,

$$u^0(x, y_0) = \varphi(x), \qquad u^0(0,y) = \psi(y), \tag{7}$$

где функции $\varphi(x)$, $\psi(y)$ выбраны специальным образом. Задача Гурса (6), (7) решается методом Римана. В полученном решении переходим к пределу при $y_0 \to 0$ и получаем (5).

В 2.4 рассмотрен и случай $0 < \rho < 1$. Решение уравнения (4) найдено аналогично описанному выше способу с другой заменой переменных. Получено интегральное представление (5) для экспоненциальной производящей функции финальных вероятностей.

Далее получено интегральное представление для производящей функции финальных вероятностей $\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2, s_3)$. Раскладывая в ряд (5) по степеням z_1, z_2, z_3, получаем

С л е д с т в и е 2.1. *Для марковского процесса $\xi(t)$ производящая функция финальных вероятностей равна* ($\rho \neq 1, \alpha_1 \neq 0$)

$$\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2,s_3) = \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1-1)!}\int_0^\infty v^{\alpha_1-1}e^{-\mu v}\times \\ \times\Big(1+(s_2-1)e^{-v}-(s_3-1)\frac{e^{-\rho v}-e^{-v}}{\rho-1}\Big)^{\alpha_2}(1+(s_3-1)e^{-\rho v})^{\alpha_3}dv. \tag{8}$$

В 2.5 рассматриваются асимптотические свойства финального распределения при $\rho \neq 1$. В рассматриваемом специальном случае процесса частицы типов T_2 и T_3 называются финальными [3]. Обозначим $\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$ случайное число частиц типа T_2 и $\eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$ случайное число частиц типа T_2, которые останутся после того, как процесс эпидемии остановится, то есть не останется частиц типа T_1. Случайный вектор $(\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}, \eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)})$ имеет определяемое производящей функцией (8) вероятностное распределение $\{q_{(0,\gamma_2,\gamma_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)},\ (\gamma_2,\gamma_3)\in N^2\}$.

В 2.5 для математических ожиданий получено, при $\alpha_2 \to \infty$ ($\rho \neq 1$),

$$\mathbf{E}\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} = \frac{\partial\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1,1)}{\partial s_2} = \alpha_2\Big(\frac{\mu}{\mu+1}\Big)^{\alpha_1},$$

$$\mathbf{E}\eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} = \frac{\partial\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1,1)}{\partial s_3} \sim \frac{\alpha_2}{\rho-1}\Big(\Big(\frac{\mu}{\mu+1}\Big)^{\alpha_1}-\Big(\frac{\mu}{\mu+\rho}\Big)^{\alpha_1}\Big).$$

Вычисление дисперсий приводит к асимптотическим формулам

$$\mathbf{D}\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} = \frac{\partial^2\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1,1)}{\partial s_2^2} + \frac{\partial\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1,1)}{\partial s_2} - \Big(\frac{\partial\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1,1)}{\partial s_2}\Big)^2 \sim \\ \sim \alpha_2^2\Big(\Big(\frac{\mu}{\mu+2}\Big)^{\alpha_1}-\Big(\frac{\mu}{\mu+1}\Big)^{2\alpha_1}\Big),$$

$$\mathbf{D}\eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} \sim \frac{\alpha_2^2}{(\rho-1)^2}\Big(\Big(\frac{\mu}{\mu+2}\Big)^{\alpha_1}-2\Big(\frac{\mu}{\mu+\rho+1}\Big)^{\alpha_1}+\Big(\frac{\mu}{\mu+2\rho}\Big)^{\alpha_1}- \\ -\Big(\frac{\mu}{\mu+1}\Big)^{2\alpha_1}+2\Big(\frac{\mu^2}{(\mu+1)(\mu+\rho)}\Big)^{\alpha_1}-\Big(\frac{\mu}{\mu+\rho}\Big)^{2\alpha_1}\Big).$$

Получены предельные теоремы. Асимптотические свойства финального распределения рассматриваются при $\alpha_2 \to \infty$, поскольку для приложений представляет интерес случай, когда при $t = 0$ число инфициированных особей мало, а здоровых велико. Предельные теоремы относится к теоремам «порогового» типа, которые применяются для определения пороговой численности инфицированных особей, превышение которой означает начало эпидемии.

Используя явное выражение (8) для производящей функции вероятностного распределения на N^2, применив стандартным образом метод преобразования Лапласа для вывода предельных теорем [3)], получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть* $x_1, x_2 \in [0,1]$. *Тогда* $(\rho \neq 1, \alpha_1 \neq 0)$

$$\lim_{\alpha_2\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}}{\alpha_2} \leqslant x_1, \frac{\eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}}{\alpha_2} \leqslant x_2 \right\} = \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} f(y_1,y_2)dy_1dy_2,$$

причем двумерное преобразование Лапласа для плотности распределения вероятностей $f(x_1,x_2)$ *имеет вид* $(\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0)$

$$\begin{aligned} F(\lambda_1,\lambda_2) &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \\ &= \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1-1)!}\int_0^\infty v^{\alpha_1-1} e^{-\mu v - \lambda_1 e^{-v} + \lambda_2(e^{-\rho v}-e^{-v})/(\rho-1)}dv. \end{aligned} \tag{9}$$

Получено разложение для плотности распределения вероятностей $f(x_1,x_2)$ в виде ряда по многочленам Лагерра.

Случайные величины $\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$ и $\eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$ имеют распределения, определяемые производящими функциями $\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2,1)$ и $\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1,s_3)$. Соответственно, полагая в (9) для параметров преобразования Лапласа $\lambda_2 = 0$ или $\lambda_1 = 0$, имеем следствия для одномерных распределений.

С л е д с т в и е 2.2. *Пусть* $x \in [0,1]$. *Тогда*

$$\lim_{\alpha_2\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}}{\alpha_2} \leqslant x \right\} = \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1-1)!}\int_{-\ln x}^\infty y^{\alpha_1-1}e^{-\mu y}dy.$$

Рассмотрим функцию $x(y) = -(e^{-\rho y} - e^{-y})/(\rho-1)$, $y \in [0,\infty)$. Функция $x(y)$ возрастает на $[0,y_0]$ и убывает на $[y_0,\infty)$; y_0 — точка максимума и $x_0 = x(y_0) \leqslant 1$. На отрезке $[0,x_0]$ определены обратные функции $y_1(x)$, $y_1(0) = 0$, и $y_2(x)$, $\lim_{x\to 0} y_2(x) = \infty$; причем $y_1(x_0) = y_2(x_0)$.

С л е д с т в и е 2.3. *Пусть* $x \in [0,x_0]$. *Тогда*

$$\lim_{\alpha_2\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}}{\alpha_2} \leqslant x \right\} = \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1-1)!}\left(\int_0^{y_1(x)} y^{\alpha_1-1}e^{-\mu y}dy + \int_{y_2(x)}^\infty y^{\alpha_1-1}e^{-\mu y}dy \right).$$

Также рассмотрен случай согласованного стремления α_2 и α_3 к бесконечности. Из (8) следует

Т е о р е м а 2.3. *Пусть* $\alpha_2 \to \infty$, $\alpha_3 \to \infty$, *причем отношение* α_3/α_2 *стремится к* θ, *где* $0 \leqslant \theta < \infty$. *Пусть* $x_1, x_2 \in [0,1]$. *Тогда* $(\rho \neq 1, \alpha_1 \neq 1)$

$$\lim_{\substack{\alpha_2\to\infty \\ \alpha_3\to\infty}} \mathbf{P}\left\{ \frac{\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}}{\alpha_2} \leqslant x_1, \frac{\eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}}{\alpha_2} \leqslant x_2 \right\} = \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} f(y_1,y_2)dy_1dy_2,$$

причем преобразование Лапласа для плотности распределения вероятностей имеет вид $(\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0)$

$$F(\lambda_1,\lambda_2) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 =$$
$$= \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1-1)!}\int_0^\infty v^{\alpha_1-1} e^{-\mu v - \lambda_1 e^{-v} + \lambda_2 (e^{-\rho v}(1-\theta(\rho-1)) - e^{-v})/(\rho-1)} dv.$$

В 2.6 и 2.7 рассматривается случай $\rho = 1$. Решена граничная задача для стационарного первого уравнения Колмогорова специальной заменой переменных и получено интегральное представление для экспоненциальной (двойной) производящей функции методом Римана. С помощью найденной в явном виде производящей функции финальных вероятностей вычислены математические ожидания и дисперсии двумерного финального распределения. Установлены предельные теоремы для случая $\alpha_2 \to \infty$ и случая согласованного стремления α_2 и α_3 к бесконечности.

В третьей главе рассмотрен марковский процесс эпидемии Беккера. Получено решение в виде ряда Фурье для системы из первого и второго уравнений Колмогорова. Это решение суммировано к интегральному представлению для экспоненциальной (двойной) производящей функции переходных вероятностей. Полученная затем производящая функция финальных вероятностей имеет интегральный вид, используемый для вывода предельной теоремы для числа финальных частиц.

В 3.1 определен марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$, $t \in [0,\infty)$, дана его интерпретация как процесса двойной эпидемии, обобщающего процесс эпидемии Вейса. В популяции имеются три типа частиц (особей), два из которых являются переносчиками. Частицы типа T_1 и T_2 — зараженные особи (источники инфекции двух типов); частицы типа T_3 — здоровые особи (восприимчивые к инфекции, не имевшие контактов с зараженными). Схема взаимодействий в эпидемии

$$T_1 + T_3 \to T_1,\ T_2 + T_3 \to T_2,\ T_1 \to 0,\ T_2 \to 0.$$

Взаимодействие между частицами типа T_1 и типа T_2 отсутствует.

На множестве N^3 рассматривается процесс $\xi(t)$, $t \in [0, \infty)$, с переходными вероятностями $P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}(t)$. Пусть при $t \to 0+$ переходные вероятности имеют вид ($\mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \rho_1 > 0, \rho_2 > 0$)

$$
\begin{aligned}
&P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3-1)}(t) = (\mu_1\alpha_1\alpha_3 + \mu_2\alpha_2\alpha_3)t + o(t),\\
&P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1-1,\alpha_2,\alpha_3)}(t) = \rho_1\alpha_1 t + o(t), \qquad P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1,\alpha_2-1,\alpha_3)}(t) = \rho_2\alpha_2 t + o(t),\\
&P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(t) = 1 - (\mu_1\alpha_1\alpha_3 + \mu_2\alpha_2\alpha_3 + \rho_1\alpha_1 + \rho_2\alpha_2)t + o(t).
\end{aligned}
$$

В работе Беккера[9] марковский процесс определен для случая $\rho_1 = \rho_2$.

В 3.2 рассматривается постановка задачи о финальных вероятностях. Для процесса $\xi(t)$ определены финальные вероятности для поглощающих состояний $(0, 0, \gamma_3)$, $\gamma_3 = 0, 1, 2, \ldots$ (то есть исчезли все переносчики),

$$
q^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(0,0,\gamma_3)} = \lim_{t\to\infty} P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(0,0,\gamma_3)}(t), \ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in N^3; \quad \sum_{\gamma_3=0}^{\infty} q^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(0,0,\gamma_3)} = 1.
$$

В 3.3 получено замкнутое решение системы из первого и второго уравнений Колмогорова. Введем экспоненциальную (двойную) производящую функцию ($|s_1| \leqslant 1), |s_2| \leqslant 1, |s_3| \leqslant 1$)

$$
\mathcal{F}(t; z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2\beta_3=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!} P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2} s_3^{\beta_3}.
$$

Первая (обратная) и вторая (прямая) системы дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей записываются для рассматриваемого процесса в виде уравнений в частных производных

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \mu_1 z_1 z_3 \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_3} \right) + \mu_2 z_2 z_3 \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_2} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_2 \partial z_3} \right) + \\
+ \rho_1 z_1 \left(\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} \right) + \rho_2 z_2 \left(\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_2} \right);
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \mu_1 (s_1 - s_1 s_3) \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_1 \partial s_3} + \mu_2 (s_2 - s_2 s_3) \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_2 \partial s_3} + \\
+ \rho_1 (1 - s_1) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_1} + \rho_2 (1 - s_2) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_2},
\end{aligned} \tag{11}
$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = e^{z_1 s_1 + z_2 s_2 + z_3 s_3}$.

[9] Becker N.G. Interacnions between species: some comparisons between deterministic and stochastic models // Rocky Mountain J. Math. — 1973. — V.4, № 1. — P. 53–68.

Применение к системе линейных уравнений (10), (11) метода разделения переменных приводит к решению

$$\mathcal{F}(t;z_1,z_2,z_3;s_1,s_2,s_3)=\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=0}^{\infty}\frac{z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}z_3^{\alpha_3}}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}\,e^{z_1\rho_1/(\mu_1\alpha_3+\rho_1)+z_2\rho_2/(\mu_2\alpha_3+\rho_2)+z_3}\times$$
$$\times\Big(s_1-\frac{\rho_1}{\mu_1\alpha_3+\rho_1}\Big)^{\alpha_1}\Big(s_2-\frac{\rho_2}{\mu_2\alpha_3+\rho_2}\Big)^{\alpha_2}(s_3-1)^{\alpha_3}e^{-(\mu_1\alpha_1\alpha_3+\mu_2\alpha_2\alpha_3+\rho_1\alpha_1+\rho_2\alpha_2)t}. \tag{12}$$

Абсолютная сходимость ряда (12) при любых z_1,z_2,z_3,s_1,s_2,s_3 и $t\in[0,\infty)$ очевидна. Далее потребуется функция ($x>0$, $y>0$)

$$H(x,y)=\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ux})J_0(2\sqrt{vy})\;{}_0F_2(1,1;-uv)\,dudv,$$

где $J_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z/2)^{2k}}{k!k!}$ — функция Бесселя порядка нуль, ${}_0F_2(1,1;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k!)^3}$ — обобщенная гипергеометрическая функция.

Т е о р е м а 3.1. *Для марковского процесса $\xi(t)$ двойная производящая функция переходных вероятностей равна*

$$\mathcal{F}(t;z_1,z_2,z_3;s_1,s_2,s_3)=\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{z_1s_1e^{-(\mu_1x+\rho_1)t}+z_2s_2e^{-(\mu_2x+\rho_2)t}+z_3}\Big\{e^{z_3(s_3-1)e^{-y}}+$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty e^{-u+z_3(s_3-1)e^{-y-\frac{\mu_i}{\rho_i}u}}\sqrt{\frac{z_i}{u}(1-e^{-(\mu_ix+\rho_i)t})}\,I_1\big(2\sqrt{z_iu(1-e^{-(\mu_ix+\rho_i)t})}\big)du$$
$$+\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-u-v+z_3(s_3-1)e^{-y-\frac{\mu_1}{\rho_1}u-\frac{\mu_2}{\rho_2}v}}\sqrt{\frac{z_1z_2}{uv}(1-e^{-(\mu_1x+\rho_1)t})(1-e^{-(\mu_2x+\rho_2)t})}\times$$
$$\times\,I_1\big(2\sqrt{z_1u(1-e^{-(\mu_1x+\rho_1)t})}\big)I_1\big(2\sqrt{z_2v(1-e^{-(\mu_2x+\rho_2)t})}\big)dudv\Big\}H(x,y)dxdy, \tag{13}$$

где $I_1(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

При суммировании ряда (12) к интегральному представлению (13) используется представление экспоненты через функцию $H(x,y)$, несколько соотношений, выражающих сумму некоторых рядов через интеграл, изменение порядка суммирования и ряд модифицированной функции Бесселя.

В 3.4 рассматривается задача о финальном распределении. Получено, как следствие формулы (13), интегральное выражение для производящей функции финальных вероятностей $\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s)=\sum_{\gamma_3=0}^{\infty}q_{(0,0,\gamma_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}s^{\gamma_3}$.

Т е о р е м а 3.2. *Для марковского процесса эпидемии Беккера производящая функция финальных вероятностей равна* $(\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0)$

$$\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s) = \frac{1}{(\alpha_1-1)!(\alpha_2-1)!}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty u^{\alpha_1-1}v^{\alpha_2-1}\times$$
$$\times\,(1-e^{-(\mu_1/\rho_1)u-(\mu_2/\rho_2)v}+se^{-(\mu_1/\rho_1)u-(\mu_2/\rho_2)v})^{\alpha_3}e^{-u-v}dudv. \quad (14)$$

Раскладывая в ряд по степеням s выражение (14), получаем

С л е д с т в и е 3.1. *Финальные вероятности для процесса эпидемии Беккера равны*

$$q^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(0,0,\gamma_3)} = C^{\gamma_3}_{\alpha_3}\sum_{i=0}^{\alpha_3-\gamma_3}(-1)^i C^i_{\alpha_3-\gamma_3}\Big(\frac{\rho_1}{\mu_1 i+\mu_1\gamma_3+\rho_1}\Big)^{\alpha_1}\Big(\frac{\rho_2}{\mu_2 i+\mu_2\gamma_3+\rho_2}\Big)^{\alpha_2}.$$

В частном случае $\rho_1 = \rho_2$ выражения для переходных и финальных вероятностей получены в [9] другими методами.

В рассматриваемом случае частицы типа T_3 являются финальными. Обозначим $\eta^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$ случайное число частиц типа T_3, которые останутся после того, как процесс эпидемии остановится, то есть не останется частиц типов T_1 и T_2. Случайная величина $\eta^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$ имеет вероятностное распределение $\{q^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(0,0,\gamma_3)},\ \gamma_3 = 0,\dots,\alpha_3\}$, определяемое производящей функцией (14).

В 3.4 для математического ожидания получено

$$\mathbf{E}\eta^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} = \Phi'_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1) = \alpha_3\Big(\frac{\rho_1}{\mu_1+\rho_1}\Big)^{\alpha_1}\Big(\frac{\rho_2}{\mu_2+\rho_2}\Big)^{\alpha_2}.$$

Вычисление дисперсии приводит к асимптотической формуле, $\alpha_3 \to \infty$,

$$\mathbf{D}\eta^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} \sim \alpha_3^2\Big(\Big(\frac{\rho_1}{2\mu_1+\rho_1}\Big)^{\alpha_1}\Big(\frac{\rho_2}{2\mu_2+\rho_2}\Big)^{\alpha_2}-\Big(\frac{\rho_1}{\mu_1+\rho_1}\Big)^{2\alpha_1}\Big(\frac{\rho_2}{\mu_2+\rho_2}\Big)^{2\alpha_2}\Big).$$

Установлена предельная теорема. Используя интегральное представление (14) для производящей функции вероятностного распределения на N, применив стандартным образом метод характеристических функций для вывода предельных теорем, получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 3.3. *Пусть* $x \in [0,1]$. *Тогда* $(\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0)$

$$F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(x) = \lim_{\alpha_3\to\infty}\mathbf{P}\Big\{\frac{\eta^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}}{\alpha_3} \leqslant x\Big\} =$$
$$= 1-\frac{1}{(\alpha_1-1)!(\alpha_2-1)!}\int_0^{-\frac{\rho_1}{\mu_1}\ln x}\int_0^{-\frac{\rho_2}{\mu_2}\ln x-\frac{\mu_1\rho_2}{\rho_1\mu_2}u} u^{\alpha_1-1}v^{\alpha_2-1}e^{-u-v}dudv.$$

В частности, имеем при $\mu_1\rho_2 \neq \mu_2\rho_1$ *или* $\mu_1\rho_2 = \mu_2\rho_1$ *соответственно*

$$F_{(1,1)}(x) = \frac{\mu_1\rho_2 x^{\rho_1/\mu_1} - \mu_2\rho_1 x^{\rho_2/\mu_2}}{\mu_1\rho_2 - \mu_2\rho_1} \quad \textit{или} \quad F_{(1,1)}(x) = x^{\rho_1/\mu_1}(1 - \frac{\rho_1}{\mu_1}\ln x).$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Для марковского процесса эпидемии Гани получено точное решение стационарного первого уравнения Колмогорова. Найдено интегральное представление для производящей функции финального распределения. Установлены асимптотики для математического ожидания и дисперсии финального распределения и получены предельные теоремы для числа финальных частиц в эпидемии.

Для марковского процесса эпидемии Беккера получены интегральные представления для производящих функций переходных и финальных вероятностей процесса путем решения системы из первого и второго уравнений Колмогорова. Найдены асимптотики для математического ожидания и дисперсии финального распределения, установлена предельная теорема для числа финальных частиц в эпидемии.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Мастихин А.В. Функция Римана для стационарного уравнения марковской эпидемии // Обозрение прикл. промышл. матем. — 2003. — Т. 10, № 2. — С. 502.

2. Мастихин А.В. О финальных вероятностях для марковской модели эпидемии при дискретных состояниях // Сборник трудов научно-методической конференции, посвященной 40-летию НУК ФН. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. — 2004. — С. 40–42.

3. Мастихин А.В. Решение стационарного первого уравнения Колмогорова для марковского процесса эпидемии со схемой $T_1 + T_2 \to T_1 + T_3$, $T_1 + T_3 \to T_1$, $T_1 \to 0$ // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. — 2005. — № 2(17). — С. 75–86.

4. Мастихин А.В. Предельная теорема для финального распределения марковского процесса эпидемии Гани // Обозрение прикл. промышл. матем. — 2007. — Т. 14, № 3. — С. 502.

5. Мастихин А.В. Финальное распределение для марковского процесса эпидемии Гани // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 6. — С. 873–884.

6. Мастихин А.В. Предельные теоремы для числа финальных частиц в марковских процессах эпидемий // Международная конференция «Стохастические модели в биологии и предельные алгебры»: Труды конференции / Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН. Омск: Изд-во Омского государственного университета, 2010. С. 64–65.

7. Мастихин А.В. Финальные вероятности марковского процесса эпидемии Беккера // Теория вероятностей и ее применения. — 2011. — Т. 56, № 3. — С. 606–614.