ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том 56 И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
2011

 МАСТИХИН А. В.*

ФИНАЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ЭПИДЕМИИ БЕККЕРА

Рассматриваются уравнения Колмогорова для переходных вероятностей трехмерного марковского процесса специального вида. Для системы стационарных первого и второго уравнений методом Фурье получено точное решение. Найдены асимптотики для математического ожидания и дисперсии финального распределения, установлена предельная теорема.

Ключевые слова и фразы: процесс эпидемии, финльное распределение, трехмерный марковский процесс, стационарное уравнение Колмогорова, экспоненциальная производящая функция, гиперболическое уравнение в частных производных, точное решение, метод Фурье.

1. Процесс двойной эпидемии. На фазовом пространстве $N^3 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0, 1, 2, \ldots\}$ рассматривается однородный во времени марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$, $t \in [0, \infty)$, с переходными вероятностями $P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \,|\, \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\}$. Пусть при $\Delta t \to 0+$ переходные вероятности имеют вид $(\mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \rho_1 > 0, \rho_2 > 0)$

$$
\begin{aligned}
P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3-1)}(\Delta t) &= (\mu_1\alpha_1\alpha_3 + \mu_2\alpha_2\alpha_3)\Delta t + o(\Delta t),\\
P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1-1,\alpha_2,\alpha_3)}(\Delta t) &= \rho_1\alpha_1\Delta t + o(\Delta t),\ P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1,\alpha_2-1,\alpha_3)}(\Delta t) = \rho_2\alpha_2\Delta t + o(\Delta t),\\
P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(\Delta t) &= 1 - (\mu_1\alpha_1\alpha_3 + \mu_2\alpha_2\alpha_3 + \rho_1\alpha_1 + \rho_2\alpha_2)\Delta t + o(\Delta t).
\end{aligned}
$$

Марковский процесс $\xi(t)$ интерпретируется как процесс распространения в некоторой популяции двух различных эпидемий. Состояние процесса $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ означает наличие α_1 частиц типа T_1 (переносчики инфекции), α_2 частиц типа T_2 (переносчики другой инфекции) и α_3 частиц типа T_3 (здоровые особи). Через случайное время τ^1_α, $\mathbf{P}\{\tau^1_\alpha < t\} = 1 - e^{-\alpha_1\alpha_3\mu_1 t}$, пара частиц типа T_1 и типа T_3 взаимодействует и превращается в частицу типа T_1 (переход процесса в состояние

*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, кафедра высшей математики, 2-я Бауманская ул., 5, 105005 Москва, Россия; e-mail: mastikhin@yandex.ru

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - 1))$. Через случайное время τ_α^2, $\mathbf{P}\{\tau_\alpha^2 < t\} = 1 - e^{-\alpha_2\alpha_3\mu_2 t}$, пара частиц типа T_2 и типа T_3 взаимодействует и превращается в частицу типа T_2 (переход процесса в состояние $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - 1))$. Кроме того, через случайное время τ_α^3, $\mathbf{P}\{\tau_\alpha^3 < t\} = 1 - e^{-\alpha_1\rho_1 t}$, частица типа T_1 умирает (переход процесса в состояние $(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \alpha_3))$; через случайное время τ_α^4, $\mathbf{P}\{\tau_\alpha^4 < t\} = 1 - e^{-\alpha_2\rho_2 t}$, частица типа T_2 умирает (переход процесса в состояние $(\alpha_1, \alpha_2 - 1, \alpha_3))$. Предполагается, что случайные величины $\tau_\alpha^1, \tau_\alpha^2, \tau_\alpha^3, \tau_\alpha^4$ независимы. В состоянии $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ процесс находится случайное время $\tau_\alpha = \min\{\tau_\alpha^1, \tau_\alpha^2, \tau_\alpha^3, \tau_\alpha^4\}$. Отметим отсутствие взаимодействия между частицами типа T_1 и типа T_2.

Первыми детально рассмотренными в математической литературе марковскими процессами эпидемии были процесс эпидемии Бартлетта–Мак-Кендрика [1] и процесс эпидемии Вейса [2]; оба этих марковских процесса определяются на фазовом пространстве N^2. В процессе эпидемии Бартлетта–Мак-Кендрика при взаимодействии переносчика инфекции и здоровой особи появляются два переносчика инфекции. Такой процесс сложен для изучения; ряд результатов получен асимптотическими методами (см. [4], [5] и др.)

В процессе эпидемии Вейса при взаимодействии переносчика инфекции и здоровой особи остается только переносчик инфекции, т.е. здоровая особь после контакта с переносчиком инфекции удаляется из популяции. Марковский процесс эпидемии Вейса более доступен для изучения; имеются многочисленные обобщения процесса Вейса на случай фазового пространства N^n. Например, определенный Гани [13] марковский процесс на N^3 интерпретируется как двустадийный процесс распространения СПИД (см. обзор литературы в [13]). Рассматриваемый в настоящей работе марковский процесс $\xi(t)$ ввел Беккер ([3]; определение дано при $\rho_1 = \rho_2$) как обобщение процесса Вейса. Согласно данной выше интерпретации процесса $\xi(t)$ через частицы типов T_1, T_2, T_3, в такой двойной эпидемии предполагается, что популяция находится под наблюдением, но первоначальные переносчики инфекции не могут быть выявлены.

2. Задача о финальных вероятностях. Для процесса $\xi(t)$ определим *финальные вероятности* для поглощающих состояний $(0, 0, \gamma_3)$, $\gamma_3 = 0, 1, 2, \ldots$ (т.е. исчезли все переносчики),

$$q_{(0,0,\gamma_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} = \lim_{t\to\infty} P_{(0,0,\gamma_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(t), \ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in N^3; \quad \sum_{\gamma_3=0}^{\infty} q_{(0,0,\gamma_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} = 1. \quad (1)$$

Задача вычисления финального распределения вероятностей для марковского процесса на N^2 решалась в работе [6] в специальном случае *ветвящегося процесса*, когда переходные вероятности связаны нелинейным соотношением и известно нелинейное уравнение для одночастичной производящей функции переходных вероятностей [7]. Процесс $\xi(t)$ является частным случаем определенного Б. А. Севастьяновым в работе [8] класса марковских процессов на N^n. Для процессов класса [8] нахождение финального распределения сводится к решению стационарного первого (линейного) уравнения Колмогорова для экспоненциальной производящей функции финальных вероятностей (см. [10, обзор в гл. 3]; [9]).

По точным решениям уравнений различных марковских процесов эпидемии и способам их вывода имеется обширная литература (см. [1]–[4] и др.). В настоящей работе получено решение в виде ряда Фурье для системы из первого и второго (нестационарных) уравнений Колмогорова. Это решение суммировано к интегральному представлению для экспоненциальной (двойной) производящей функции переходных вероятностей (теорема 1) [10], [11], [12]. Полученная затем производящая функция финальных вероятностей имеет интегральный вид (теорема 2), легко используемый для вывода предельных теорем.

Асимптотические свойства финального распределения (1) рассматриваются при $\alpha_3 \to \infty$, поскольку для приложений представляет интерес случай, когда при $t = 0$ число инфициированных особей мало, а здоровых велико. Предельная теорема 3 относится к теоремам ««порогового»» типа (см. [4], [13]), которые применяются для определения пороговой численности инфицированных особей, превышение которой означает начало эпидемии.

3. Интегральное представление решения системы уравнений Колмогорова. Введем экспоненциальную (двойную) производящую функцию ($|s_1| \leqslant 1, |s_2| \leqslant 1, |s_3| \leqslant 1$)

$$\mathscr{F}(t; z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2\beta_3=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!} P_{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2} s_3^{\beta_3}.$$

Первая (обратная) и вторая (прямая) системы дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей $P_{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(t)$ записываются для рассматриваемого процесса в виде уравнений в частных производных второго порядка (см. [8], [10])

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} &= \mu_1 z_1 z_3 \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_3}\right) + \mu_2 z_2 z_3 \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_2} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_2 \partial z_3}\right) \\ &\quad + \rho_1 z_1 \left(\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1}\right) + \rho_2 z_2 \left(\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_2}\right); \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} &= \mu_1 (s_1 - s_1 s_3) \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_1 \partial s_3} + \mu_2 (s_2 - s_2 s_3) \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_2 \partial s_3} \\ &\quad + \rho_1 (1 - s_1) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_1} + \rho_2 (1 - s_2) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_2}, \end{aligned} \tag{3}$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = e^{z_1 s_1 + z_2 s_2 + z_3 s_3}$.

Применение к системе линейных уравнений (2), (3) метода разделения переменных (ср. [11], [12]) приводит к решению

$$\mathcal{F}(t;z_1,z_2,z_3;s_1,s_2,s_3) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}z_3^{\alpha_3}}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}\, e^{z_1\rho_1/(\mu_1\alpha_3+\rho_1)+z_2\rho_2/(\mu_2\alpha_3+\rho_2)+z_3}$$
$$\times\left(s_1-\frac{\rho_1}{\mu_1\alpha_3+\rho_1}\right)^{\alpha_1}\left(s_2-\frac{\rho_2}{\mu_2\alpha_3+\rho_2}\right)^{\alpha_2}$$
$$\times\,(s_3-1)^{\alpha_3}\, e^{-(\mu_1\alpha_1\alpha_3+\mu_2\alpha_2\alpha_3+\rho_1\alpha_1+\rho_2\alpha_2)t}. \qquad (4)$$

Абсолютная сходимость ряда (4) при любых z_1,z_2,z_3,s_1,s_2,s_3 и $t\in[0,\infty)$ очевидна. Далее потребуется функция $(x>0,\ y>0)$

$$H(x,y)=\int_0^\infty\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ux})J_0(2\sqrt{vy})\ {}_0F_2(1,1;-uv)\,du dv,$$

где $J_0(z)=\sum_{k=0}^\infty(-1)^k(z/2)^{2k}/k!k!$ — функция Бесселя порядка нуль, ${}_0F_2(1,1;z)=\sum_{k=0}^\infty z^k/(k!)^3$ — обобщенная гипергеометрическая функция.

Теорема 1. *Для марковского процесса $\xi(t)$ двойная производящая функция переходных вероятностей равна*

$$\mathscr{F}(t;z_1,z_2,z_3;s_1,s_2,s_3)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{z_1s_1e^{-(\mu_1x+\rho_1)t}+z_2s_2e^{-(\mu_2x+\rho_2)t}+z_3}$$
$$\times\Bigg\{e^{z_3(s_3-1)e^{-y}}+\sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty e^{-u+z_3(s_3-1)e^{-y-\frac{\mu_i}{\rho_i}u}}\sqrt{\frac{z_i}{u}\,(1-e^{-(\mu_ix+\rho_i)t})}$$
$$\times I_1\Big(2\sqrt{z_iu(1-e^{-(\mu_ix+\rho_i)t})}\Big)\,du$$
$$+\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-u-v+z_3(s_3-1)e^{-y-\frac{\mu_1}{\rho_1}u-\frac{\mu_2}{\rho_2}v}}$$
$$\times\sqrt{\frac{z_1z_2}{uv}\,(1-e^{-(\mu_1x+\rho_1)t})(1-e^{-(\mu_2x+\rho_2)t})}$$
$$\times I_1\Big(2\sqrt{z_1u(1-e^{-(\mu_1x+\rho_1)t})}\Big)$$
$$\times I_1\Big(2\sqrt{z_2v(1-e^{-(\mu_2x+\rho_2)t})}\Big)\,du\,dv\Bigg\}H(x,y)\,dx\,dy, \qquad (5)$$

где $I_1(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

Доказательство. Для получения решения (5) системы уравнений (2), (3) используется представление экспоненты (см. [14, ч. 2, (3.5); ч. 1, гл. 2, § 12])

$$e^{-(\alpha_1\mu_1+\alpha_2\mu_2)\alpha_3t}=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\alpha_1\mu_1+\alpha_2\mu_2)tx-\alpha_3y}\,H(x,y)\,dx\,dy. \qquad (6)$$

После подстановки (6) в (4) и перестановки знаков суммирования получаем (изменение порядка интегрирования и суммирования допустимо, так как интеграл сходится абсолютно)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(t; z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = &\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}\, e^{z_1\rho_1/(\mu_1\alpha_3+\rho_1)+z_2\rho_2/(\mu_2\alpha_3+\rho_2)+z_3} \\
&\times \left(s_1 - \frac{\rho_1}{\mu_1\alpha_3+\rho_1}\right)^{\alpha_1} \left(s_2 - \frac{\rho_2}{\mu_2\alpha_3+\rho_2}\right)^{\alpha_2} (s_3-1)^{\alpha_3}\, e^{-(\alpha_1\rho_1+\alpha_2\rho_2)t} \\
&\times \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\alpha_1\mu_1+\alpha_2\mu_2)tx-\alpha_3 y} H(x,y)\,dx\,dy \\
= &\int_0^\infty \int_0^\infty e^{z_3} \Bigg\{ \sum_{\alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_3^{\alpha_3}}{\alpha_3!}\, e^{z_1\rho_1/(\alpha_3\mu_1+\rho_1)+z_2\rho_2/(\alpha_3\mu_2+\rho_2)} \\
&\qquad \times (s_3-1)^{\alpha_3}\, e^{-\alpha_3 y} \Bigg\{ \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \left[\left(s_1 - \frac{\rho_1}{\mu_1\alpha_3+\rho_1}\right) e^{-(\mu_1 x+\rho_1)t}\right]^{\alpha_1} \\
&\qquad \times \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_2^{\alpha_2}}{\alpha_2!} \left[\left(s_2 - \frac{\rho_2}{\mu_2\alpha_3+\rho_2}\right) e^{-(\mu_2 x+\rho_2)t}\right]^{\alpha_2} \Bigg\}\Bigg\} H(x,y)\,dx\,dy \\
= &\int_0^\infty \int_0^\infty e^{z_1 s_1 e^{-(\mu_1 x+\rho_1)t} + z_2 s_2 e^{-(\mu_2 x+\rho_2)t} + z_3} \Bigg\{ \sum_{\alpha_3=0}^{\infty} \frac{[z_3(s_3-1)e^{-y}]^{\alpha_3}}{\alpha_3!} \\
&\qquad \times e^{z_1\rho_1(1-e^{-(\mu_1 x+\rho_1)t})/(\alpha_3\mu_1+\rho_1)+z_2\rho_2(1-e^{-(\mu_2 x+\rho_2)t})/(\alpha_3\mu_2+\rho_2)} \Bigg\} \\
&\qquad \times H(x,y)\,dx\,dy. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Для суммирования ряда в фигурных скобках воспользуемся формулами

$$
\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{b^\alpha}{\alpha!(\alpha+\mu)^k} = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty u^{k-1} e^{-\mu u + b e^{-u}}\,du, \qquad k = 1, 2, \ldots,
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{b^\alpha}{\alpha!(\alpha+\mu)^k(\alpha+\rho)^l} = &\frac{1}{(k-1)!(l-1)!} \\
&\times \int_0^\infty \int_0^\infty u^{k-1} v^{l-1} e^{-\mu u - \rho v + b e^{-u-v}}\,du\,dv,
\end{aligned}
$$

$k, l = 1, 2, \ldots$, и функцией Бесселя

$$
I_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}
$$

(делаем замену $a_1 = z_1\rho_1(1-e^{-(\mu_1 x+\rho_1)t})/\mu_1$, $a_2 = z_2\rho_2(1-e^{-(\mu_2 x+\rho_2)t})/\mu_2$, $b = z_3(s_3-1)e^{-y}$):

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\alpha_3=0}^{\infty} \frac{b^{\alpha_3}}{\alpha_3!}\, e^{a_1/(\alpha_3+\rho_1/\mu_1)+a_2/(\alpha_3+\rho_2/\mu_2)} \\
&\quad = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{a_1^k a_2^l}{k!l!} \sum_{\alpha_3=0}^{\infty} \frac{b^{\alpha_3}}{\alpha_3!(\alpha_3+\rho_1/\mu_1)^k(\alpha_3+\rho_2/\mu_2)^l}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha_3=0}^{\infty} \frac{b^{\alpha_3}}{\alpha_3!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1^k}{k!} \sum_{\alpha_3=0}^{\infty} \frac{b^{\alpha_3}}{\alpha_3!(\alpha_3+\rho_1/\mu_1)^k} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_2^l}{l!} \sum_{\alpha_3=0}^{\infty} \frac{b^{\alpha_3}}{\alpha_3!(\alpha_3+\rho_2/\mu_2)^l} \\
&\quad + \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{a_1^k a_2^l}{k!l!} \sum_{\alpha_3=0}^{\infty} \frac{b^{\alpha_3}}{\alpha_3!(\alpha_3+\rho_1/\mu_1)^k(\alpha_3+\rho_2/\mu_2)^l} \\
&= e^b + \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_i^k}{k!(k-1)!} \int_0^{\infty} u^{k-1}\, e^{-\frac{\rho_i}{\mu_i}u + be^{-u}}\, du \\
&\quad + \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{a_1^k}{k!(k-1)!}\, \frac{a_2^l}{l!(l-1)!} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{k-1}\, v^{l-1}\, e^{-\frac{\rho_1}{\mu_1}u - \frac{\rho_2}{\mu_2}v + be^{-u-v}}\, du\, dv \\
&= e^b + \sum_{i=1}^{2} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{a_i}{u}}\, I_1(2\sqrt{a_i u})\, e^{-\frac{\rho_i}{\mu_i}u + be^{-u}}\, du \\
&\quad + \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{a_1}{u}}\sqrt{\frac{a_2}{v}}\, I_1(2\sqrt{a_1 u})\, I_1(2\sqrt{a_2 v})\, e^{-\frac{\rho_1}{\mu_1}u - \frac{\rho_2}{\mu_2}v + be^{-u-v}}\, du\, dv. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Подставляя (8) в (7), получаем (5) (после замены переменных u, v). Теорема 1 доказана.

Формула (5) позволяет вычислить математическое ожидание и дисперсию случайных процессов $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$ (ср. [12]).

4. Распределение финальных вероятностей и предельная теорема. Для финальных вероятностей (1) имеем производящие функции ($|s| \leqslant 1$)

$$
\begin{aligned}
\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s) &= \sum_{\gamma_3=0}^{\infty} q_{(0,0,\gamma_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} s^{\gamma_3};\ \Phi(z_1,z_2,z_3;s) \\
&= \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}\, \Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s), \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Вычисление предела $\Phi(z_1,z_2,z_3;s) = \lim_{t\to\infty} \mathcal{F}(t;z_1,z_2,z_3;s_1,s_2,s)$ из (5) приводит к представлению

$$
\begin{aligned}
\Phi(z_1,z_2,z_3;s) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{z_3} \Big\{ & e^{z_3(s-1)e^{-y}} + \sum_{i=1}^{2} \int_0^{\infty} e^{-u+z_3(s-1)\exp(-y-(\mu_i/\rho_i)u)} \\
& \times \sqrt{\frac{z_i}{u}}\, I_1(2\sqrt{z_i u})\, du \\
& + \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-u-v+z_3(s-1)\,\exp(-y-(\mu_1/\rho_1)u-(\mu_2/\rho_2)v)} \\
& \times \sqrt{\frac{z_1 z_2}{uv}}\, I_1(2\sqrt{z_1 u})\, I_1(2\sqrt{z_2 v})\, du\, dv \Big\} H(x,y)\, dx\, dy.
\end{aligned}
$$

Раскладывая последнее выражение в ряд по степеням z_1, z_2, z_3 — согласно (9), получаем после вычисления интегралов, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для марковского процесса $\xi(t)$ производящая функция финальных вероятностей равна* $(\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0)$

$$\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s) = \frac{1}{(\alpha_1-1)!(\alpha_2-1)!}\int_0^\infty\int_0^\infty u^{\alpha_1-1}\,v^{\alpha_2-1}$$
$$\times\,(1-e^{-(\mu_1/\rho_1)u-(\mu_2/\rho_2)v}+se^{-(\mu_1/\rho_1)u-(\mu_2/\rho_2)v})^{\alpha_3}\,e^{-u-v}\,du\,dv. \quad (10)$$

Раскладывая в ряд по степеням s выражение (10), получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Финальные вероятности для процесса эпидемии Беккера равны*

$$q^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(0,0,\gamma_3)} = C^{\gamma_3}_{\alpha_3}\sum_{i=0}^{\alpha_3-\gamma_3}(-1)^i C^i_{\alpha_3-\gamma_3}\Big(\frac{\rho_1}{\mu_1 i+\mu_1\gamma_3+\rho_1}\Big)^{\alpha_1}\Big(\frac{\rho_2}{\mu_2 i+\mu_2\gamma_3+\rho_2}\Big)^{\alpha_2}.$$

В частном случае $\rho_1 = \rho_2$ выражения для переходных и финальных вероятностей получены в [3] другими методами.

В рассматриваемом случае частицы типа T_3 называются *финальными* [7]. Обозначим $\eta^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$ случайное число частиц типа T_3, которые останутся после того, как процесс эпидемии остановится, т.е. не останется частиц типов T_1 и T_2. Случайная величина $\eta^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$ имеет вероятностное распределение $\{q^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(0,0,\gamma_3)},\ \gamma_3 = 0,\dots,\alpha_3\}$, которое определяется производящей функцией (10). Для математического ожидания получаем

$$\mathbf{E}\,\eta^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} = \Phi'_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1) = \alpha_3\Big(\frac{\rho_1}{\mu_1+\rho_1}\Big)^{\alpha_1}\Big(\frac{\rho_2}{\mu_2+\rho_2}\Big)^{\alpha_2}.$$

Вычисление дисперсии $\mathbf{D}\eta^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} = \Phi''_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1)+\Phi'_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1) - (\Phi'_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1))^2$ приводит к асимптотической формуле при $\alpha_3\to\infty$,

$$\mathbf{D}\eta^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} \sim \alpha_3^2\bigg(\Big(\frac{\rho_1}{2\mu_1+\rho_1}\Big)^{\alpha_1}\Big(\frac{\rho_2}{2\mu_2+\rho_2}\Big)^{\alpha_2}-\Big(\frac{\rho_1}{\mu_1+\rho_1}\Big)^{2\alpha_1}\Big(\frac{\rho_2}{\mu_2+\rho_2}\Big)^{2\alpha_2}\bigg).$$

Используя интегральное представление (10) для производящей функции вероятностного распределения на N, применив стандартным образом метод характеристических функций для вывода предельных теорем [7], получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $x\in[0,1]$. Тогда* $(\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0)$

$$F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(x) = \lim_{\alpha_3\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\eta^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}}{\alpha_3}\leqslant x\right\} = 1-\frac{1}{(\alpha_1-1)!(\alpha_2-1)!}$$
$$\times\int_0^{-(\rho_1/\mu_1)\ln x}\int_0^{-(\rho_2/\mu_2)\ln x-(\mu_1\rho_2/\rho_1\mu_2)u} u^{\alpha_1-1}\,v^{\alpha_2-1}\,e^{-u-v}\,du\,dv.$$

В частности, имеем при $\mu_1\rho_2 \neq \mu_2\rho_1$ *или* $\mu_1\rho_2 = \mu_2\rho_1$ *соответственно*

$$F_{(1,1)}(x) = \frac{\mu_1\rho_2 x^{\rho_1/\mu_1} - \mu_2\rho_1 x^{\rho_2/\mu_2}}{\mu_1\rho_2 - \mu_2\rho_1} \quad \text{или} \quad F_{(1,1)}(x) = x^{\rho_1/\mu_1}(1 - \frac{\rho_1}{\mu_1}\ln x).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эпидемии процесс. Математическая энциклопедия, т. 5. М.: Советская энциклопедия, 1985б с. 1008.
2. *Weiss G.* On the spread of epidemics by carries. — Biometrics, 1965, v. 21, №2, p. 481–490.
3. *Becker N. G.* Interacnions between species: some comparisons between deterministic and stochastic models. — Rocky Mountain J. Math., 1973, v. 4, №1, p. 53–68.
4. *Старцев А. Н.* О распределении размера эпидемии в одной немарковской модели. — Теория вероятн. и ее примен., 1996. т. 41, №4, с. 827–839.
5. *Мирзаев М.*, *Старцев А. Н.* Предельные теоремы для одной модели с взаимодействием частиц двух типов, обобщающей процесс эпидемии Бартлетта–Мак-Кендрика. — Теория вероятн. и ее примен., 2006. т. 51, № 2б с. 385–391.
6. *Колмогоров А. Н.*, *Севастьянов Б. А.* Вычисление финальных вероятностей для ветвящихся случайных процессов. — Докл. АН СССР, 1947, т. 56, №5, с. 783–786.
7. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
8. *Севастьянов Б. А.*, *Калинкин А. В.* Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц. — Докл. АН СССР, 1982, т. 264, №2, с. 306–308.
9. *Калинкин А. В.* Финальные вероятности ветвящегося процесса с взаимодействием частиц и процесс эпидемии. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, №4, с. 773–780.
10. *Калинкин А. В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. — Успехи матем. наук, 2002, т. 57, №2, с. 23–84.
11. *Калинкин А. В.*, *Мастихин А. В.* Марковский процесс эпидемии Вейса и ветвящиеся процессы. — Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана, сер. ««Естественные науки»», 2006, №2, с. 3–17.
12. *Калинкин А. В.*, *Мастихин А. В.* Метод разделения переменных для уравнения марковских процессов гибели. — Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана, сер. ««Естественные науки»», 2007, №2, с. 45–64.
13. *Мастихин А. В.* Финальное распределение для марковского процесса эпидемии Ганию — Матем. заметки, 2007, т. 82, № 6, с. 873-884.
14. *Диткин В. А.*, *Прудников А. П.* Операционное исчисление по двум переменым и его приложения. М.: Физматгиз, 1958, 180 с.

Исправленный вариант
28.IV.2011