

РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ПЕРВОГО УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ЭПИДЕМИИ, РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ ПО СХЕМЕ $T_1 + T_2 \rightarrow T_1 + T_3$, $T_1 + T_3 \rightarrow T_1$, $T_1 \rightarrow 0$

Для трехмерного марковского процесса специального вида решено стационарное первое уравнение Колмогорова для переходных вероятностей. Получено интегральное представление для производящей функции финальных вероятностей. Найдены асимптотики для математического ожидания и дисперсии финального распределения и установлены предельные теоремы.

Определение марковского процесса. На множестве состояний $N^3 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0, 1, 2, \dots\}$ рассматривается однородный по времени марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$, $t \in [0, \infty)$, с переходными вероятностями $P_{(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\}$. Пусть при $\Delta t \rightarrow 0$ переходные вероятности имеют вид ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$)

$$\begin{aligned} P_{(\alpha_1, \alpha_2-1, \alpha_3+1)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(\Delta t) &= \lambda_1 \alpha_1 \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t), \\ P_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3-1)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(\Delta t) &= \lambda_2 \alpha_1 \alpha_3 \Delta t + o(\Delta t), \\ P_{(\alpha_1-1, \alpha_2, \alpha_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(\Delta t) &= \lambda_3 \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t), \\ P_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(\Delta t) &= 1 - (\lambda_1 \alpha_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_1 \alpha_3 + \lambda_3 \alpha_1) \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Определим производящие функции ($|s_1| \leq 1, |s_2| \leq 1, |s_3| \leq 1$)

$$F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3) = \sum_{\beta_1, \beta_2, \beta_3=0}^{\infty} P_{(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2} s_3^{\beta_3}.$$

Вторая (прямая) система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей равносильна уравнению в частных производных [2, 6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial t} &= \lambda_1(s_1 s_3 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \\ &+ \lambda_2(s_1 - s_1 s_3) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_3} + \lambda_3(1 - s_1) \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_1}, \quad (1) \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$F_\alpha(0; s_1, s_2, s_3) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} s_3^{\alpha_3}.$$

Введем экспоненциальную (двойную) производящую функцию [4, 5]

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} F_{\alpha}(t; s_1, s_2, s_3).$$

Первая (обратная) система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей процесса $\xi(t)$ приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} &= \lambda_1 z_1 z_2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_3} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_2} \right) + \lambda_2 z_1 z_3 \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_3} \right) + \\ &+ \lambda_3 z_1 \left(\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} \right), \quad \mathcal{F}(0, z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = e^{s_1 z_1 + s_2 z_2 + s_3 z_3}. \end{aligned} \quad (2)$$

Интерпретация процесса. Задача о финальных вероятностях. Марковский процесс $\xi(t)$ может быть интерпретирован как модель эпидемии [1, 2, 6], а именно как модель распространения инфекции с двумя стадиями заболевания. Процессу соответствует схема взаимодействий [2, 6]:

$$T_1 + T_2 \rightarrow T_1 + T_3, \quad T_1 + T_3 \rightarrow T_1, \quad T_1 \rightarrow 0, \quad (3)$$

где частицы типа T_1 — зараженные особи (источники инфекции); частицы типа T_2 — здоровые особи (восприимчивые к инфекции, не имевшие пока контактов с зараженными); частицы типа T_3 — особи, имевшие один контакт с зараженными (ставшие носителями инфекции). Здоровая особь после двух контактов с зараженным удаляется из популяции. Состояние $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ означает наличие α_1 частиц типа T_1 , α_2 частиц типа T_2 и α_3 частиц типа T_3 . Через случайное время τ_1 , с распределением вероятностей $\mathbf{P}\{\tau_1 < t\} = e^{-\alpha_1 \alpha_2 \lambda_1 t}$, пара частиц типа T_1 и типа T_2 взаимодействует и независимо от других частиц превращается в частицу типа T_1 и частицу типа T_3 . Процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1, \alpha_2 - 1, \alpha_3 + 1)$. Через случайное время τ_2 , с распределением вероятностей $\mathbf{P}\{\tau_2 < t\} = e^{-\alpha_1 \alpha_3 \lambda_2 t}$, пара частиц типа T_1 и типа T_3 взаимодействует и независимо от других частиц превращается в частицу типа T_1 . Процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - 1)$. Кроме того, через случайное время τ_3 , с распределением вероятностей $\mathbf{P}\{\tau_3 < t\} = e^{-\alpha_1 \lambda_3 t}$, частица типа T_1 умирает и процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \alpha_3)$. Случайные величины τ_1, τ_2 и τ_3 независимы, в состоянии $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ процесс находится случайное время $\tau = \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$.

Предложенный марковский процесс рассмотрен в работе [2] в случае $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \mu$. В [2] методом преобразования Лапласа решено

уравнение (1). Определим финальные вероятности для поглощающих состояний $(0, \gamma_2, \gamma_3)$, $\gamma_2, \gamma_3 = 0, 1, 2, \dots$,

$$q_{(0, \gamma_2, \gamma_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{(0, \gamma_2, \gamma_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t), \quad \sum_{\gamma_2, \gamma_3=0}^{\infty} q_{(0, \gamma_2, \gamma_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = 1.$$

Для финальных вероятностей в [2] получено соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma_2=0}^{\alpha_2} \sum_{\gamma_3=0}^{\alpha_2 - \gamma_2} q_{(0, \gamma_2, \gamma_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} s_2^{\gamma_2} s_3^{\gamma_3} &= \sum_{\gamma_2=0}^{\alpha_2} \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\gamma_2 + \mu)^{\gamma_2 + \alpha_1}} \frac{\alpha_2!}{(\alpha_2 - \gamma_2)} (s_3 - 1)^{\gamma_2} \times \\ &\times \sum_{l_0=0}^{\gamma_2} \sum_{l_1=0}^{l_0} \dots \sum_{l_{\alpha_1-1}=0}^{l_{\alpha_1-2}} \frac{\left\{ (\gamma_2 + \mu) \left(\frac{s_2 - 1}{s_3 - 1} \right) \right\}^{l_{\alpha_1-1}}}{l_{\alpha_1-1}}. \end{aligned}$$

Однако это выражение малопригодно для исследования асимптотических свойств рассматриваемого марковского процесса.

В настоящей работе процесс $\xi(t)$ исследуется предложенным в работах [4, 5] методом экспоненциальной производящей функции. Получены интегральное представление для производящей функции финальных вероятностей, асимптотики для математического ожидания и дисперсии финального распределения при $\alpha_2 \rightarrow \infty$ и предельные теоремы. Такие теоремы “порогового” типа позволяют определить пороговую численность инфицированных особей, при превышении которой принято говорить о начале эпидемии [2, 6]. Согласно работе [2] исследован случай $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \mu$, случай $\lambda_1 \neq \lambda_2$ будет рассмотрен в работе, готовящейся к печати.

Стационарное первое уравнение Колмогорова. Вводим производящую функцию финальных вероятностей

$$\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(s_2, s_3) = \sum_{\gamma_2, \gamma_3=0}^{\infty} q_{(0, \gamma_2, \gamma_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} s_2^{\gamma_2} s_3^{\gamma_3}, \quad |s_2| \leq 1, |s_3| \leq 1,$$

и двойную производящую функцию

$$\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} \Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(s_2, s_3).$$

Аналитичность функции $\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(s_2, s_3)$ при $|s_2| < 1$, $|s_3| < 1$ устанавливаем, исходя из неравенства $|\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(s_2, s_3)| \leq 1$ в рассматриваемой области.

Аналитичность функции $\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3)$ при любых z_1, z_2, z_3 следует из неравенства

$$\begin{aligned} |\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3)| &\leq \\ &\leq \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3=0}^{\infty} \frac{|z_1|^{\alpha_1}|z_2|^{\alpha_2}|z_3|^{\alpha_3}}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} |\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(s_2, s_3)| \leq e^{|z_1|+|z_2|+|z_3|}. \end{aligned}$$

Из первого уравнения (2) аналогично теореме 1.4 работы [5] получаем, что функция $\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$z_1 z_2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_3} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_2} \right) + z_1 z_3 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_3} \right) + \mu z_1 \left(\Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \right) = 0,$$

или, после преобразований,

$$(z_2 - z_3) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_3} - z_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_2} - (\mu - z_3) \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} + \mu \Phi = 0. \quad (4)$$

Получим граничные условия. Пусть $z_1 = 0$. Очевидно, что $q_{(0, \alpha_2, \alpha_3)}^{(0, \alpha_2, \alpha_3)} = 1$ и $q_{(0, \gamma_2, \gamma_3)}^{(0, \alpha_2, \alpha_3)} = 0$ при $\alpha_2 \neq \gamma_2$ или $\alpha_3 \neq \gamma_3$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi(0, z_2, z_3; s_2, s_3) &= \sum_{\alpha_2, \alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_2! \alpha_3!} \Phi_{(0, \alpha_2, \alpha_3)}(s_2, s_3) = \\ &= \sum_{\alpha_2, \alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_2! \alpha_3!} s_2^{\alpha_2} s_3^{\alpha_3} = e^{s_2 z_2 + s_3 z_3}. \end{aligned}$$

Пусть $z_2 = 0, z_3 = 0$. Для состояний $(\alpha_1, 0, 0), \alpha_1 = 0, 1, 2 \dots$, финальные вероятности определяются следующим образом: $q_{(0, 0, 0)}^{(\alpha_1, 0, 0)} = 1$ и $q_{(0, \gamma_2, \gamma_3)}^{(\alpha_1, 0, 0)} = 0$ при $\gamma_2 \neq 0$ или $\gamma_3 \neq 0$. Следовательно,

$$\Phi(z_1, 0, 0; s_2, s_3) = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \Phi_{(\alpha_1, 0, 0)}(s_2, s_3) = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} = e^{z_1}.$$

Итак, уравнение (4) рассматривается при условиях

$$\Phi(z_1, 0, 0; s_1, s_2, s_3) = e^{z_1}, \quad \Phi(0, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = e^{s_2 z_2 + s_3 z_3}. \quad (5)$$

В работе получено решение задачи (4), (5), удовлетворяющее условию аналитичности. Вопросы существования и единственности решений

уравнений вида (4) не являются целью настоящей работы, отметим лишь, что они сложны и мало изучены.

Замена переменных. Функция Римана. Поставленная задача решения уравнения (4) с тремя переменными и условиями (5) сводится к граничной задаче решения гиперболического уравнения с двумя переменными.

Рассмотрим замену переменной $x = z_1$, $y = e^{-z_3/z_2}$, $\zeta = z_2 e^{z_3/z_2}$. Тогда $z_1 = x$, $z_2 = \zeta y$, $z_3 = -\zeta y \ln y$. После вычислений получим уравнение в частных производных для функции $\tilde{\Phi}(x, y) = \Phi(x, \zeta y, -\zeta y \ln y; s_2, s_3)$:

$$\tilde{\Phi}_{xy} + \left(\frac{\mu}{y} + \zeta \ln y \right) \tilde{\Phi}_x - \frac{\mu}{y} \tilde{\Phi} = 0, \quad (6)$$

с условиями $\tilde{\Phi}(x, 0) = e^x$, $\tilde{\Phi}(0, y) = e^{\zeta y(s_2 - s_3 \ln y)}$. Запишем уравнение (6) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\Phi}_y + \left(\frac{\mu}{y} + \zeta \ln y \right) \tilde{\Phi} \right) - \frac{\mu}{y} \tilde{\Phi} = 0.$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\tilde{\Phi}_y + \left(\frac{\mu}{y} + \zeta \ln y \right) \tilde{\Phi} = 0,$$

приходим к замене $\tilde{\Phi}(x, y) = u(x, y) y^{-\mu} e^{-y\zeta(\ln y - 1)}$. Подставляя последнее выражение в уравнение (6), получаем для функции $u(x, y)$ уравнение

$$u_{xy} - \frac{\mu}{y} u = 0 \quad (7)$$

с граничными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, y) = y^\mu e^{y\zeta((s_2 - 1) - (s_3 - 1) \ln y)}. \quad (8)$$

Полученная задача Гурса (7),(8) решается методом Римана [7, 8].

В общем случае для гиперболического уравнения $L(u) = u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$ решение граничной задачи $u(x, y_0) = \phi(x)$, $u(x_0, y) = \psi(y)$, $\phi(x_0) = \psi(y_0)$, дается формулой [7]

$$\begin{aligned} u(x, y) = & R(x, y_0; x, y)\phi(x) + R(x_0, y; x, y)\psi(y) - R(x_0, y_0; x, y)\phi(x_0) + \\ & + \int_{x_0}^x \left[b(t, y_0)R(t, y_0; x, y) - \frac{\partial}{\partial t}R(t, y_0; x, y) \right] \phi(t) dt + \\ & + \int_{y_0}^y \left[a(x_0, t)R(x_0, t; x, y) - \frac{\partial}{\partial t}R(x_0, t; x, y) \right] \psi(t) dt, \end{aligned} \quad (9)$$

где $R(x_0, y_0; x, y)$ — функция Римана. По определению функция Римана $R(x_0, y_0; x, y)$ является решением сопряженного уравнения $L^*(u) =$

$= u_{xy} - (au)_x - (bu)_y + cu = 0$ относительно переменных x и y . В случае уравнения (7) рассматриваемое уравнение совпадает с сопряженным. Кроме того, требуется выполнение следующих соотношений:

$$\begin{aligned} R_y(x_0, y_0; x_0, y) &= R_x(x_0, y_0; x, y_0) = \\ &= R_{x_0}(x_0, y; x, y) = R_{y_0}(x, y_0; x, y) = 0, \\ R(x, y; x, y) &= R(x_0, y_0; x_0, y_0) = 1. \end{aligned}$$

Лемма 1. Функция Римана для уравнения (7) имеет вид

$$R(x_0, y_0; x, y) = J_0\left(2\sqrt{-\mu(x - x_0) \ln \frac{y}{y_0}}\right), \quad (10)$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Доказательство. Функцию Римана для уравнения $L(u) = 0$ ищем в виде ряда [9]

$$R(x_0, y_0; x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v_j(x, y)(x - x_0)^j(y - y_0)^j}{j!j!}.$$

Нулевой коэффициент, следуя [9], находим из соотношения

$$\ln v_0(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (a dX + b dY) = 0,$$

таким образом, $v_0(x, y) = 1$. Интеграл берется по отрезку, соединяющему точки (x_0, y_0) и (x, y) ; в полярных координатах имеем $x = x_0 + r \cos \theta$, $y = y_0 + r \sin \theta$ для граничных точек и $X = x_0 + s \cos \theta$, $Y = y_0 + s \sin \theta$ для внутренних точек из этого отрезка, где $\theta = \text{const}$, $s \in [0, r]$. Рекуррентная формула для вычисления коэффициентов ряда получается при подстановке ряда в сопряженное уравнение и имеет вид [9]

$$v_j(x, y) = -\frac{j}{r^j} \int_0^r s^{j-1} L^*(v_{j-1}(X, Y)) ds.$$

Вычисление $v_1(x, y)$, $v_2(x, y)$ составляет основание индукции по j :

$$\begin{aligned} L^*(v_0) &= -\frac{\mu}{y}, \quad v_1 = -\frac{1}{r} \int_0^r -\frac{\mu}{y} ds = \frac{\mu}{r} \int_0^r \frac{d(y_0 + s \sin \theta)}{(y_0 + s \sin \theta) \sin \theta} = \\ &= \frac{\mu}{r \sin \theta} \ln(y_0 + s \sin \theta) \Big|_0^r = \frac{\mu}{r \sin \theta} (\ln(y_0 + r \sin \theta) - \ln y_0) = \frac{\mu}{y - y_0} \ln \frac{y}{y_0}; \end{aligned}$$

$$L^*(v_1) = -\frac{\mu}{y} v_1 = -\frac{\mu^2}{(y-y_0)y} \ln \frac{y}{y_0} = -\frac{\mu^2}{s \sin \theta (y_0 + s \sin \theta)} \ln \frac{y_0 + s \sin \theta}{y_0},$$

$$v_2 = -\frac{2}{r^2} \int_0^r -\frac{s \mu^2}{s(y_0 + s \sin \theta) \sin \theta} \ln \frac{y_0 + s \sin \theta}{y_0} ds = \frac{\mu^2}{(y-y_0)^2} \ln^2 \frac{y}{y_0}.$$

Предположим, что коэффициент $v_j = \frac{\mu^j}{(y-y_0)^j} \ln^j \frac{y}{y_0}$ вычислен.

Определим v_{j+1} :

$$L^*(v_j) = -\frac{\mu^{j+1}}{(y-y_0)^j y} \ln^j \frac{y}{y_0} = -\frac{\mu^{j+1} \ln^j ((y_0 + s \sin \theta)/y_0)}{(y_0 + s \sin \theta)(s \sin \theta)^j},$$

$$v_{j+1} = -\frac{j+1}{r^{j+1}} \int_0^r -\frac{s^j \mu^{j+1} \ln^j ((y_0 + s \sin \theta)/y_0)}{s^j (y_0 + s \sin \theta) (s \sin \theta)^j} ds = \frac{\mu^{j+1}}{(y-y_0)^{j+1}} \ln^{j+1} \frac{y}{y_0}.$$

Окончательно, функция Римана имеет вид

$$\begin{aligned} R(x_0, y_0; x, y) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v_j(x, y)(x-x_0)^j(y-y_0)^j}{j!j!} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mu \ln(y/y_0)(x-x_0))^j}{j!j!} = J_0\left(2\sqrt{-\mu(x-x_0) \ln \frac{y}{y_0}}\right). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Интегральное представление для производящей функции $\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(s_2, s_3)$.

Теорема 1. Производящая функция финальных вероятностей имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(s_2, s_3) &= \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1 - 1)!} \int_0^\infty x^{\alpha_1-1} e^{-\mu x} \times \\ &\times \left[e^{-x} ((s_2 - 1) + x(s_3 - 1)) + 1 \right]^{\alpha_2} \left[e^{-x}(s_3 - 1) + 1 \right]^{\alpha_3} dx, \quad (11) \end{aligned}$$

где $\mu > 0, \alpha_1 \neq 0$.

Доказательство. Для уравнения (7) рассмотрим решение $u^0(x, y)$ задачи Гурса ($x_0 > 0, y_0 > 0$) с граничными условиями

$$u^0(x_0, y) = \psi(y), \quad u^0(x, y_0) = \phi(x),$$

где $\psi(y) = (y - y_0)^\mu e^{\zeta(y-y_0)((s_2-1)-(s_3-1)\ln(y-y_0))}$, $\phi(x) = 0$. Формула (9) приобретает вид

$$u^0(x, y) = \psi(y) - \int_{y_0}^y \frac{\partial}{\partial t} R(x_0, t; x, y) \psi(t) dt.$$

Используя метод интегрирования по частям и учитывая равенства $R(x_0, y_0; x, y) = J_0(0) = 1$, получим

$$\begin{aligned} u^0(x, y) &= \psi(y) - \psi(t) R(x_0, t; x, y) \Big|_{y_0}^y + \int_{y_0}^y \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} R(x_0, t; x, y) dt = \\ &= \int_{y_0}^y \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} R(x_0, t; x, y) dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим предел при $x_0 \rightarrow 0, y_0 \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^y \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} R(0, t; x, y) dt = \int_0^y t^\mu e^{-\zeta t((s_2-1)-(s_3-1)\ln t)} \times \\ &\quad \times \left[\mu + t\zeta((s_2-1) - (s_3-1)(\ln t + 1)) \right] \times \\ &\quad \times J_0\left(2\sqrt{\mu x \ln \frac{t}{y}}\right) dt. \quad (12) \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменным z_1, z_2, z_3 и функции $\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3) = u(z_1, e^{z_3/z_2}) e^{\mu z_3/z_2 + z_2 + z_3}$, получаем выражение для экспоненциальной производящей функции

$$\begin{aligned} \Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3) &= \\ &= \int_0^{e^{-z_3/z_2}} \tau^{\mu-1} e^{\mu z_3/z_2 + z_2 e^{z_3/z_2} \tau ((s_2-1)-(s_3-1)\ln \tau) + z_2 + z_3} \times \\ &\quad \times \left[\mu + \tau z_2 e^{z_3/z_2} ((s_2-1) - (s_3-1)(\ln \tau + 1)) \right] J_0\left(2\sqrt{z_1 \mu \left(\ln \tau + \frac{z_3}{z_2}\right)}\right) d\tau. \end{aligned}$$

После замены $\tau = e^{-z_3/z_2 - x}$ получаем

$$\begin{aligned} \Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3) &= \\ &= \int_0^\infty e^{-\mu x + z_2(e^{-x}(s_2-1) + x(s_3-1) + 1) + z_3(e^{-x}(s_3-1) + 1)} \times \end{aligned}$$

$$\times \left[\mu + z_2(e^{-x}((s_2-1)+(x-1)(s_3-1))) + z_3 e^{-x}(s_3-1) \right] J_0\left(2\sqrt{-\mu x z_1}\right) dx. \quad (13)$$

Совершенный выше предельный переход нуждается в обосновании; однако непосредственной подстановкой выражения (13) в уравнение (4) и проверкой условий (5) убеждаемся, что (13) является решением задачи (4), (5). Единственность устанавливается, исходя из аналитичности решения (ср. [9, 5]).

Учитывая определение производящей функции $\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3)$ и разложения в ряды

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad J_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (z/2)^{2j}}{j! j!},$$

запишем разложение подынтегральной функции в ряд по z_1 и z_3 . Имеем

$$\begin{aligned} \Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3) &= \\ &= \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \mu^{\alpha_1} \frac{z_1^{\alpha_1}}{\alpha_1! \alpha_1!} \sum_{\alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_3^{\alpha_3}}{\alpha_3!} \int_0^{\infty} x^{\alpha_1} e^{-\mu x + z_2(e^{-x}(s_2-1)+x(s_3-1)+1)} \times \\ &\times \left[\mu + z_2(e^{-x}((s_2-1)+(x-1)(s_3-1)))(e^{-x}(s_3-1)+1)^{\alpha_3} + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_3(e^{-x}(s_3-1))(e^{-x}(s_3-1)+1)^{\alpha_3-1} \right] dx. \end{aligned}$$

Далее, разбивая интеграл на сумму двух интегралов соответственно слагаемым, стоящим в квадратных скобках, и производя интегрирование по частям во втором интеграле, получаем

$$\begin{aligned} \Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3) &= \sum_{\alpha_1, \alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_3^{\alpha_3} \mu^{\alpha_1}}{\alpha_1! (\alpha_1-1)! \alpha_3!} \times \\ &\times \int_0^{\infty} x^{\alpha_1-1} e^{-\mu x + z_2(e^{-x}(s_2-1)+x(s_3-1)+1)} (e^{-x}(s_3-1)+1)^{\alpha_3} dx. \end{aligned}$$

Представляя экспоненту под интегралом в виде ряда по z_2 , получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. При начальном состоянии процесса $(\alpha_1, 0, \alpha_3)$ имеем марковский процесс эпидемии Вейса со схемой взаимодействий [3]

$$T_1 + T_3 \rightarrow T_1, \quad T_1 \rightarrow 0.$$

Соответственно, при $\alpha_2 = 0$ выражение (11) совпадает с производящей функцией финальных вероятностей процесса эпидемии Вейса [5].

Асимптотические свойства финального распределения. Для марковского процесса $\xi(t)$ частицы типов T_2 и T_3 называются финальными [10]. Обозначим $\eta_2^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}, \eta_3^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}$ случайные числа финальных частиц, которые останутся после того, как процесс выродится, т.е. не останется частиц типа T_1 . Совместное вероятностное распределение величин $\eta_2^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}, \eta_3^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}$ определяется производящей функцией (13). Одномерные распределения финальных вероятностей случайных величин $\eta_2^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}$ и $\eta_3^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}$ задаются производящими функциями вероятностей $\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(s_2, 1)$ и $\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(1, s_3)$. Для факториальных моментов из формулы (11) при $\alpha_2 \rightarrow \infty$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\eta_2^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} &= \frac{\partial \Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(1, 1)}{\partial s_2} = \alpha_2 \left(\frac{\mu}{\mu + 1} \right)^{\alpha_1}, \\ \mathbf{M}\eta_3^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} &= \frac{\partial \Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(1, 1)}{\partial s_3} \sim \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\mu + 1} \left(\frac{\mu}{\mu + 1} \right)^{\alpha_1}, \\ \frac{\partial^2 \Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(1, 1)}{\partial s_2^2} &= \alpha_2 (\alpha_2 - 1) \left(\frac{\mu}{\mu + 1} \right)^{\alpha_1}, \\ \frac{\partial^2 \Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(1, 1)}{\partial s_3^2} &\sim \frac{\alpha_2 (\alpha_2 - 1) \alpha_1 (\alpha_1 + 1)}{\mu + 2} \left(\frac{\mu}{\mu + 2} \right)^{\alpha_1}, \\ \mathbf{D}\eta_2^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} &= \frac{\partial^2 \Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(1, 1)}{\partial s_2^2} + \frac{\partial \Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(1, 1)}{\partial s_2} - \\ &- \left(\frac{\partial \Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(1, 1)}{\partial s_2} \right)^2 \sim (\alpha_2)^2 \left[\left(\frac{\mu}{\mu + 2} \right)^{\alpha_1} - \left(\frac{\mu}{\mu + 1} \right)^{2\alpha_1} \right], \\ \mathbf{D}\eta_3^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} &\sim \alpha_1 (\alpha_2)^2 \left[\frac{\alpha_1 - 1}{(\mu + 2)^2} \left(\frac{\mu}{\mu + 2} \right)^{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{(\mu + 1)^2} \left(\frac{\mu}{\mu + 1} \right)^{2\alpha_1} \right]. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть $x \in [0, 1]$. Тогда

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\eta_2^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}}{\alpha_2} \leq x \right\} = x^\mu \sum_{n=0}^{\alpha_1-1} \frac{(-\mu \ln x)^n}{n!}.$$

Доказательство. Преобразование Лапласа от функции распределения случайной величины $\eta_2^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} / \alpha_2$ имеет вид [11]

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(e^{-\lambda \eta_2^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} / \alpha_2}) &= \Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(e^{-\lambda/\alpha_2}, 1) = \\ &= \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1 - 1)!} \int_0^\infty x^{\alpha_1-1} e^{-\mu x} \left(e^{-x} ((e^{-\lambda/\alpha_2} - 1) + 1) \right)^{\alpha_2} dx. \end{aligned}$$

При $\alpha_2 \rightarrow \infty$ получаем

$$\begin{aligned}\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(e^{-\lambda/\alpha_2}, 1) &\sim \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1 - 1)!} \int_0^\infty x^{\alpha_1-1} e^{-\mu x} \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha_2} e^{-x}\right)^{\alpha_2} dx \sim \\ &\sim \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1 - 1)!} \int_0^\infty x^{\alpha_1-1} e^{-\mu x} e^{-\lambda e^{-x}} dx.\end{aligned}$$

После замены $y = e^{-x}$ имеем

$$\frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1 - 1)!} \int_0^1 (-\ln y)^{\alpha_1-1} y^{\mu-1} e^{-\lambda y} dy.$$

Полученное выражение является преобразованием Лапласа плотности распределения $f(y) = \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1 - 1)!} (-\ln y)^{\alpha_1-1} y^{\mu-1}$ для случайной величины, распределенной на отрезке $[0, 1]$. По теореме непрерывности [11] имеем сходимость функций распределений

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\eta_2^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}}{\alpha_2} \leq x \right\} = \int_0^x f(y) dy.$$

Далее вычисляем

$$\frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1 - 1)!} \int_0^x (-\ln y)^{\alpha_1-1} y^{\mu-1} dy = x^\mu \sum_{n=0}^{\alpha_1-1} \frac{(-\mu \ln x)^n}{n!}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $x \in [0, 1]$. Тогда

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\eta_3^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}}{\alpha_2} \leq x \right\} = \int_0^x f_1(y) dy,$$

где преобразование Лапласа от плотности распределения вероятностей $f_1(y)$ при $\lambda \geq 0$ имеет вид

$$\int_0^\infty e^{-\lambda y} f_1(y) dy = \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1 - 1)!} \int_0^\infty x^{\alpha_1-1} e^{-\mu x} e^{-\lambda x e^{-x}} dx.$$

Теорема 4. Пусть $x_1, x_2 \in [0, 1]$. Тогда

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\eta_2^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}}{\alpha_2} \leq x_1, \frac{\eta_3^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}}{\alpha_2} \leq x_2 \right\} = \\ = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} f_2(y_1, y_2) dy_1 dy_2,$$

где двойное преобразование Лапласа [12] от двумерной плотности распределения вероятностей $f_2(y_1, y_2)$ имеет вид ($\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$)

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2} f_2(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \\ = \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1 - 1)!} \int_0^{\infty} x^{\alpha_1 - 1} e^{-\mu x} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{-x}} dx.$$

Доказательство теорем 3 и 4 аналогично доказательству теоремы 2. Явный вид для плотностей вероятностей $f_1(y_1)$ и $f_2(y_1, y_2)$ может быть найден в виде рядов по специальным функциям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эпидемии и процесс // Математическая энциклопедия. Т. 5. – М.: Советская энциклопедия, 1985. – Кол. 1008.
2. Gani J. Approaches to the Modelling of Aids // Lecture notes in biomathematics. V. 86. Stochastic processes in epidemic theory. – Heidelberg: Springer, 1990. – P. 145–154.
3. Weiss G. On the spread of epidemics by carriers // Biometrics. – 1965. – V. 21, № 2. – P. 481–490.
4. Севастянов Б. А., Калинкин А. В. Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 264, вып. 2. – С. 306–308.
5. Калинкин А. В. Финальные вероятности ветвящегося процесса с взаимодействием частиц и процесс эпидемии // Теория вероятн. и ее примен. – 1998. – Т. 43, вып. 4. – С. 773–780.
6. Калинкин А. В. Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием // УМН. – 2002. – Т. 57, вып. 2. – С. 23–84.
7. Бицадзе А. В., Калинченко Д. Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1985. – 312 с.
8. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964.
9. Сорсон Е. Т. Partial Differential Equation. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1975. – 280 р.
10. Севастянов Б. А. Ветвящиеся процессы. – М.: Наука, 1971. – 436 с.
11. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. – М.: Мир, 1984.
12. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. – М.: Физматгиз, 1958.
13. Мастихин А. В. Функция Римана для стационарного уравнения марковской эпидемии // Обозрение прикл. промышл. матем. Сер. вероятн. и статист. – 2003. – Т. 10, № 2. – С. 502.

Статья поступила в редакцию 17.02.2005