ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Том 43 **И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ** **Выпуск 4**

1998

 *КАЛИНКИН А. В.**

ФИНАЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ЧАСТИЦ И ПРОЦЕСС ЭПИДЕМИИ

Предложенный в работах [6], [7] метод экспоненциальной производящей функции для решения стационарной первой (обратной) системы дифференциальных уравнений Колмогорова применяется к модели эпидемии Вейса и ее обобщению. Получены интегральные представления для производящих функций финальных вероятностей.

Ключевые слова и фразы: эпидемии процесс, ветвящийся процесс с взаимодействием частиц, гиперболическое уравнение для двойной производящей функции, метод Римана, точные решения.

1. Ветвящийся процесс с двумя типами частиц T_1, T_2 и двумя комплексами взаимодействия $\varepsilon^1=(1,0)$, $\varepsilon^2=(1,1)$ [5]. На множестве состояний $\mathbf{N}^2=\{(\alpha_1,\alpha_2),\ \alpha_1,\alpha_2=0,1,\ldots\}$ рассматривается однородный во времени марковский процесс $\mu(t)=(\mu_1(t),\mu_2(t))$, $t\in[0,\infty)$, с переходными вероятностями $P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)=\mathbf{P}\{\mu(t)=(\beta_1,\beta_2)\mid\mu(0)=(\alpha_1,\alpha_2)\}$. Пусть при $\Delta t\to 0$ переходные вероятности имеют вид ($\rho\geqslant 0$)

$$
\begin{aligned}
&P_{(\alpha_1,\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(\Delta t)=1-(\alpha_1\alpha_2+\rho\alpha_1)\Delta t+o\,(\Delta t),\\
&P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(\Delta t)=(p^2_{\beta_1-\alpha_1+1,\beta_2-\alpha_2+1}\alpha_1\alpha_2+p^1_{\beta_1-\alpha_1+1,\beta_2-\alpha_2}\rho\alpha_1)\,\Delta t+o\,(\Delta t),
\end{aligned}
$$

если $\alpha_1\neq\beta_1$ или $\alpha_2\neq\beta_2$. Здесь $p^i_{\gamma_1\gamma_2}\geqslant 0$, $\sum_{\gamma_1,\gamma_2=0}^{\infty}p^i_{\gamma_1\gamma_2}=1$, $i=1,2$; $p^1_{10}=0$, $p^2_{11}=0$. Введем производящие функции

$$
F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t;s_1,s_2)=\sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty}P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)\,s_1^{\beta_1}s_2^{\beta_2},
$$

$$
h_i(s_1,s_2)=\sum_{\gamma_1,\gamma_2=0}^{\infty}p^i_{\gamma_1\gamma_2}\,s_1^{\gamma_1}s_2^{\gamma_2},\quad i=1,2;\ |s_1|\leqslant 1,\ |s_2|\leqslant 1.
$$

Вторая (прямая) система дифференциальных уравнений Колмогорова для процесса $\mu(t)$ равносильна уравнению в частных производных (см. [5, теорема 1])

$$
\frac{\partial F_{(\alpha_1,\alpha_2)}}{\partial t}=\Bigl(h_2(s_1,s_2)-s_1s_2\Bigr)\frac{\partial^2F_{(\alpha_1,\alpha_2)}}{\partial s_1\partial s_2}+\rho\Bigl(h_1(s_1,s_2)-s_1\Bigr)\frac{\partial F_{(\alpha_1,\alpha_2)}}{\partial s_1}
$$

с начальным условием $F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(0;s_1,s_2)=s_1^{\alpha_1}s_2^{\alpha_2}$.

---

*Московский государственный технический университет, кафедра высшей математики, 2-я Бауманская ул., 5, 107005 Москва, Россия.

Событие $\{\mu(t) = (\alpha_1, \alpha_2)\}$ интерпретируется как наличие совокупности из α_1 частиц типа T_1 и α_2 частиц типа T_2. Можно полагать, что через случайное время $\tau^2_{(\alpha_1,\alpha_2)}$, $\mathbf{P}\{\tau^2_{(\alpha_1,\alpha_2)} < t\} = 1 - \exp(-\alpha_1\alpha_2 t)$, происходит взаимодействие частицы типа T_1 с частицей типа T_2. Эта пара частиц независимо от других частиц превращается в новую группу из γ_1 частиц типа T_1 и γ_2 частиц типа T_2 с распределением вероятностей $\{p^2_{\gamma_1\gamma_2}\}$; процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1 + \gamma_1 - 1, \alpha_2 + \gamma_2 - 1)$. Кроме того, через случайное время $\tau^1_{(\alpha_1,\alpha_2)}$, $\mathbf{P}\{\tau^1_{(\alpha_1,\alpha_2)} < t\} = 1 - \exp(-\rho\alpha_1 t)$, частица типа T_1 превращается в группу частиц с распределением вероятностей $\{p^1_{\gamma_1\gamma_2}\}$. Предполагается, что случайные величины $\tau^1_{(\alpha_1,\alpha_2)}$, $\tau^2_{(\alpha_1,\alpha_2)}$ независимы; в состоянии (α_1, α_2) процесс $\mu(t)$ находится случайное время $\tau_{(\alpha_1,\alpha_2)} = \min(\tau^1_{(\alpha_1,\alpha_2)}, \tau^2_{(\alpha_1,\alpha_2)})$.

2. Частные случаи. Задача о финальных вероятностях. Процесс $\mu(t)$ принадлежит классу ветвящихся процессов с взаимодействием частиц, определенных Б. А. Севастьяновым [5]. В. И. Дороговым и В. П. Чистяковым [3] ветвящийся процесс $\mu(t)$ определялся как модель цепной реакции размножения нейтронов (частицы типа T_1) с учетом ядер тяжелых элементов (частицы типа T_2); в [3] полагалось $h_1(s_1, s_2) = 1$, $h_2(s_1, s_2) = h_2(s_1)$.

Статья А. Н. Старцева [2] содержит подробный обзор работ по марковским моделям процессов распространения эпидемии, когда частицы типа T_1 интерпретируются как больные особи, частицы типа T_2 — как особи, восприимчивые к инфекционному заболеванию. При $h_1(s_1, s_2) = 1$, $h_2(s_1, s_2) = s_1^2$ получаем модель эпидемии Бартлетта–Мак-Кендрика [1], при $h_1(s_1, s_2) = 1$, $h_2(s_1, s_2) = s_1$ — модель эпидемии Вейса [2]. Для этих моделей известны (приведены в [2]) явные, но громоздкие выражения для финальных вероятностей попадания процесса $\mu(t)$ в одно из поглощающих состояний $(0, 0), (0, 1), \ldots, (0, \gamma_2), \ldots$,

$$q^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(0,\gamma_2)} = \lim_{t\to\infty} P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(0,\gamma_2)}(t). \tag{1}$$

В настоящей работе получено интегральное представление для финальных вероятностей (1) в случае $h_1(s_1, s_2) = 1$, $h_2(s_1, s_2) = p^2_{10}s_1 + p^2_{01}s_2 + p^2_{00}$.

3. Уравнение в частных производных для экспоненциальной производящей функции финальных вероятностей. Введем экспоненциальную производящую функцию

$$\mathscr{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1!\,\alpha_2!}\, F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2)$$

и линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами

$$h_i\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\ \frac{\partial}{\partial z_2}\right) = \sum_{\gamma_1,\gamma_2=0}^{\infty} p^i_{\gamma_1\gamma_2}\, \frac{\partial^{\gamma_1+\gamma_2}}{\partial z_1^{\gamma_1}\partial z_2^{\gamma_2}}, \quad i = 1, 2.$$

Первая (обратная) система дифференциальных уравнений Колмогорова для процесса $\mu(t)$ приводится к виду ([5, теорема 2]; ср. [6, теорема 1])

$$\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial t} = \left[z_1 z_2\left(h_2\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\ \frac{\partial}{\partial z_2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2}\right) + \rho z_1\left(h_1\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\ \frac{\partial}{\partial z_2}\right) - \frac{\partial}{\partial z_1}\right)\right]\mathscr{F},$$

с начальным условием $\mathscr{F}(0; z_1, z_2; s_1, s_2) = e^{z_1 s_1 + z_2 s_2}$.

Для финальных вероятностей (1) вводим функцию

$$\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2)}(s) = \sum_{\gamma_2=0}^{\infty} q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} s_2^{\gamma_2} \tag{2}$$

и двойную производящую функцию

$$\Phi(z_1, z_2; s) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1!\,\alpha_2!}\,\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2)}(s); \quad |s| \leqslant 1. \tag{3}$$

Заметим, что $\Phi(z_1, z_2; s)$ — функция, аналитическая по переменным z_1, z_2, так как

$$\Bigl|\Phi(z_1, z_2; s)\Bigr| \leqslant \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} \frac{|z_1|^{\alpha_1}|z_2|^{\alpha_2}}{\alpha_1!\,\alpha_2!} \Bigl|\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2)}(s)\Bigr| \leqslant e^{|z_1|+|z_2|}. \tag{4}$$

Аналогично теореме 2 работы [6] показывается, что

$$\Phi(z_1, z_2; s) = \lim_{t\to\infty} \mathscr{F}(t; z_1, z_2; s_1, s),$$

и $\Phi(z_1, z_2; s)$ удовлетворяет стационарному первому уравнению

$$\left[z_2\left(h_2\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\ \frac{\partial}{\partial z_2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2}\right) + \rho\left(h_1\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\ \frac{\partial}{\partial z_2}\right) - \frac{\partial}{\partial z_1}\right)\right]\Phi = 0. \tag{5}$$

Из равенств $q_{(0,\gamma_2)}^{(0,\gamma_2)} = 1$, $q_{(0,\alpha_2)}^{(0,\gamma_2)} = 0$ при $\alpha_2 \neq \gamma_2$ следует граничное условие $\Phi(0, z_2; s) = e^{z_2 s}$.

4. Вывод интегрального представления для $\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2)}(s)$ в случае $h_1(s_1, s_2) = 1$, $h_2(s_1, s_2) = s_1$. Уравнение (5) принимает вид

$$z_2\Phi_{z_1 z_2} + (\rho - z_2)\Phi_{z_1} - \rho\Phi = 0. \tag{6}$$

Линейные уравнения гиперболического типа, когда коэффициенты являются линейными функциями независимых переменных, рассматривались, например, в [9]. В настоящей работе для решения уравнения (6) применяется метод Римана [8], [9]. Возможно применение методов операционного исчисления.

Пусть процесс $\mu(t)$ находится в начальном состоянии $(\alpha_1, 0)$. Тогда происходит скачок процесса только в состояние $(\alpha_1 - 1, 0)$; следовательно, финальные вероятности равны: $q_{(0,0)}^{(\alpha_1,0)} = 1$ при $\alpha_1 = 0, 1, \ldots$, $q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,0)} = 0$ при $\gamma_2 = 1, 2, \ldots$ и $\alpha_1 = 0, 1, \ldots$. Отсюда $\Phi(z_1, 0; s) = e^{z_1}$. Таким образом, для линейного гиперболического уравнения (6) решаем задачу Гурса: заданы граничные условия на характеристиках $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$,

$$\Phi(0, z_2; s) = e^{z_2 s}, \qquad \Phi(z_1, 0; s) = e^{z_1}. \tag{7}$$

Функция Римана $R(z_1, z_2; z_1^0, z_2^0)$ определяется как решение уравнения, сопряженного с (6),

$$R_{z_1 z_2} - \left(\left(\frac{\rho}{z_2} - 1\right) R\right)'_{z_1} + \frac{\rho}{z_2}\, R = 0, \tag{8}$$

удовлетворяющее на характеристиках $z_1 = z_1^0$, $z_2 = z_2^0$ условиям

$$\begin{aligned} R(z_1^0, z_2; z_1^0, z_2^0) &= \exp \int_{z_2^0}^{z_2} \left(\frac{\rho}{t} - 1\right) dt = \left(\frac{z_2}{z_2^0}\right)^{\rho} e^{-(z_2 - z_2^0)}, \\ R(z_1, z_2^0; z_1^0, z_2^0) &= \exp \int_{z_1^0}^{z_1} 0\, dt = 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Подстановкой в уравнение (8) и проверкой условий (9) устанавливается, что функция Римана равна

$$R(z_1, z_2; z_1^0, z_2^0) = \left(\frac{z_2}{z_2^0}\right)^{\rho} e^{-(z_2 - z_2^0)} J_0\left(2\sqrt{-(z_1 - z_1^0)\rho \ln(z_2/z_2^0)}\right), \tag{10}$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя порядка нуль. Функция Римана находится изложенным в [9] методом представления в виде ряда

$$R(z_1, z_2; z_1^0, z_2^0) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j(z_1, z_2; z_1^0, z_2^0)\, \frac{(z_1 - z_1^0)^j (z_2 - z_2^0)^j}{j!\, j!}. \tag{11}$$

Ряд (11) подставляется в уравнение (8), для функций $v_j(z_1, z_2; z_1^0, z_2^0)$ решается рекуррентное дифференциальное соотношение.

Для уравнения (6) решение задачи Гурса

$$\Phi(z_1^0, z_2; s) = e^{(z_2 - z_2^0)s}, \qquad \Phi(z_1, z_2^0; s) = e^{z_1 - z_1^0}$$

обозначим $\Phi^0(z_1, z_2; s)$. Решение дается формулой Римана, $z_1 > z_1^0 > 0$, $z_2 > z_2^0 > 0$,

$$\begin{aligned} \Phi^0(z_1, z_2; s) = {} & R(z_1, z_2^0; z_1, z_2)\, e^{z_1 - z_1^0} + R(z_1^0, z_2; z_1, z_2)\, e^{(z_2 - z_2^0)s} \\ & - R(z_1^0, z_2^0; z_1, z_2) - \int_{z_1^0}^{z_1} R_t(t, z_2^0; z_1, z_2)\, e^{t - z_1^0}\, dt \\ & + \int_{z_2^0}^{z_2} \left(\left(\frac{\rho}{\tau} - 1\right) R(z_1^0 \tau; z_1, z_2) - R_\tau(z_1^0, \tau; z_1, z_2)\right) e^{(\tau - z_2^0)s}\, d\tau. \end{aligned}$$

Вычисляя интегрированием по частям интегралы, содержащие частные производные, приходим к выражению

$$\begin{aligned} \Phi^0(z_1, z_2; s) = {} & R(z_1^0, z_2^0; z_1, z_2) + \int_{z_1^0}^{z_1} R(t, z_2^0; z_1, z_2)\, e^{t - z_1^0}\, dt \\ & + \int_{z_2^0}^{z_2} \left(\frac{\rho}{\tau} - 1 + s\right) R(z_1^0, \tau; z_1, z_2)\, e^{(\tau - z_2^0)s}\, d\tau. \end{aligned} \tag{12}$$

Из (10) следует, что

$$\begin{aligned} & \lim_{z_1^0 \to 0} R(z_1^0, \tau; z_1, z_2) = \left(\frac{\tau}{z_2}\right)^{\rho} e^{-(\tau - z_2)} J_0\left(2\sqrt{z_1 \rho \ln(\tau/z_2)}\right), \\ & \lim_{z_2^0 \to 0} R(t, z_2^0; z_1, z_2) = 0, \qquad \lim_{z_1^0 \to 0,\, z_2^0 \to 0} R(z_1^0, z_2^0; z_1, z_2) = 0. \end{aligned}$$

Соответственно, из (12) при $z_1^0 \to 0$, $z_2^0 \to 0$ получаем решение задачи (6) с условиями (7),

$$\Phi(z_1, z_2; s) = \int_0^{z_2} \left(\frac{\rho}{\tau} - 1 + s\right) \left(\frac{\tau}{z_2}\right)^{\rho} e^{-(\tau - z_2) + \tau s} J_0\left(2\sqrt{z_1 \rho \ln\left(\frac{\tau}{z_2}\right)}\right) d\tau$$

(сходимость несобственного интеграла очевидна; $\rho > 0$). После замены переменной интегрирования, $\tau = z_2\, e^{-x/\rho}$,

$$\Phi(z_1, z_2; s) = \int_0^\infty \left(1 + \frac{1}{\rho}(s-1)\, e^{-x/\rho} z_2\right) e^{-x + (1 - e^{-x/\rho} + s\, e^{-x/\rho}) z_2} \times J_0\left(2\sqrt{-z_1 x}\right) dx. \tag{13}$$

Совершенный выше предельный переход $z_1^0 \to 0$, $z_2^0 \to 0$ нуждается в обосновании; однако непосредственной подстановкой выражения (13) в уравнение (6) и проверкой условий (7) убеждаемся, что (13) является решением задачи (6), (7). Выполнено требование (4) — решение (13) является аналитической функцией переменных z_1, z_2; единственность решения (13) устанавливается, исходя из условия аналитичности решения (ср. [9]).

Из определения экспоненциальной производящей функции (3) и равенства (13), учитывая разложения в ряды

$$e^z = \sum_{i=0}^\infty \frac{z^i}{i!}, \qquad J_0(z) = \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j (z/2)^{2j}}{j!\, j!},$$

получаем интегральное представление для $\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2)}(s)$,

$$\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2)}(s) = \frac{1}{\alpha_1!} \int_0^\infty x^{\alpha_1} \Big[(1 - e^{-x/\rho} + s\, e^{-x/\rho})^{\alpha_2} + \frac{1}{\rho}\alpha_2 (s-1) \times e^{-x/\rho} (1 - e^{-x/\rho} + s\, e^{-x/\rho})^{\alpha_2 - 1}\Big] e^{-x}\, dx. \tag{14}$$

Проинтегрируем второе слагаемое по частям; приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Производящая функция финальных вероятностей в случае* $h_1(s_1, s_2) = 1$, $h_2(s_1, s_2) = s_1$ *равна* ($\rho > 0$, $\alpha_1 \neq 0$)

$$\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2)}(s) = \frac{1}{(\alpha_1 - 1)!} \int_0^\infty x^{\alpha_1 - 1} (1 - e^{-x/\rho} + s\, e^{-x/\rho})^{\alpha_2}\, e^{-x}\, dx. \tag{15}$$

Формула (15) доказывается также непосредственными вычислениями. Из определения производящей функции (2) и (15) получаем

$$\begin{aligned} q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} &= \frac{1}{(\alpha_1-1)!} \int_0^\infty x^{\alpha_1 - 1} C_{\alpha_2}^{\gamma_2} (1 - e^{-x/\rho})^{\alpha_2 - \gamma_2} (e^{-x/\rho})^{\gamma_2} e^{-x}\, dx \\ &= \frac{C_{\alpha_2}^{\gamma_2}}{(\alpha_1 - 1)!} \sum_{i=0}^{\alpha_2 - \gamma_2} (-1)^i C_{\alpha_2 - \gamma_2}^i \int_0^\infty x^{\alpha_1 - 1}\, e^{-x(i/\rho + \gamma_2/\rho + 1)}\, dx \\ &= C_{\alpha_2}^{\gamma_2} \sum_{i=0}^{\alpha_2-\gamma_2} (-1)^i C_{\alpha_2-\gamma_2}^i \left(\frac{\rho}{i + \gamma_2 + \rho}\right)^{\alpha_1}, \quad \gamma_2 = 0, 1, \ldots, \alpha_2, \end{aligned} \tag{16}$$

что совпадает с приведенными в [2] явными выражениями для финальных вероятностей в модели эпидемии Вейса.

Сделаем в (15) замену переменной интегрирования $1 - e^{-x/\rho} = e^{-y}$. Получаем выражение для финальных вероятностей в виде преобразования Лапласа,

$$q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{\rho C_{\alpha_2}^{\gamma_2}}{(\alpha_1 - 1)!} \int_0^\infty e^{-(\alpha_2 - \gamma_2 + 1) y} (1 - e^{-y})^{\gamma_2 + \rho - 1} \Big(-\rho \ln(1 - e^{-y})\Big)^{\alpha_1 - 1} dy.$$

Выполнены условия применения тауберовой теоремы ([10, гл. 13, § 5]). Получаем

Следствие 1. *При* $\alpha_2 \to \infty$ *выполняется соотношение*

$$q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} \sim C \cdot \frac{(\ln \alpha_2)^{\alpha_1 - 1}}{\alpha_2^{\rho}}, \qquad C = \frac{\rho^{\alpha_1}\Gamma(\gamma_2 + \rho)}{(\alpha_1 - 1)!\,\gamma_2!},$$

где $\Gamma(x)$ *— гамма-функция.*

В рассматриваемом специальном случае ветвящегося процесса с взаимодействием частиц частицы типа T_2 называются финальными [4]. Обозначим $\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ число финальных частиц, которые останутся после того, как процесс выродился, т. е. не останется частиц типа T_1. Случайная величина $\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ имеет распределение $\{q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)},\ \gamma_2 = 0, \ldots, \alpha_2\}$, которое определяется производящей функцией (15). Из (15) получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\,\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)} &= \Phi'_{(\alpha_1,\alpha_2)}(1) = \alpha_2 \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{\alpha_1}, \\
\mathbf{E}\,\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)}\Big(\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)} - 1\Big) &= \Phi''_{(\alpha_1,\alpha_2)}(1) = \alpha_2(\alpha_2 - 1)\left(\frac{\rho}{2+\rho}\right)^{\alpha_1}; \\
\mathbf{D}\,\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)} &= \Phi''_{(\alpha_1,\alpha_2)}(1) + \Phi'_{(\alpha_1,\alpha_2)}(1) - \Big(\Phi'_{(\alpha_1,\alpha_2)}(1)\Big)^2 \\
&\sim \alpha_2^2 \left(\left(\frac{\rho}{2+\rho}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{2\alpha_1}\right)
\end{aligned}$$

при $\alpha_2 \to \infty$. Используя выражение (15), стандартным образом применив метод характеристических функций (см. [4, гл. 5, § 5]; [7]), получаем

Следствие 2. *Пусть* $x \in [0,1]$. *Тогда*

$$\lim_{\alpha_2 \to \infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)}}{\alpha_2} \leqslant x\right\} = \frac{1}{(\alpha_1 - 1)!}\int_{-\rho \ln x}^{\infty} y^{\alpha_1 - 1} e^{-y}\,dy.$$

В частности, при $\alpha_1 = 1$

$$\lim_{\alpha_2 \to \infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\eta^{(1,\alpha_2)}}{\alpha_2} \leqslant x\right\} = x^{\rho}.$$

В работе [2] установлен ряд предельных теорем для числа финальных частиц, исходя из явного выражения (16), и его обобщения на одну немарковскую модель эпидемии.

5. Интегральное представление для $\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2)}(s)$ в случае $h_1(s_1, s_2) = 1$, $h_2(s_1,s_2) = p_{10}^2 s_1 + p_{01}^2 s_2 + p_{00}^2$. Уравнение (5) принимает вид

$$z_2 \Phi_{z_1 z_2} + (\rho - p_{10}^2 z_2)\,\Phi_{z_1} - p_{01}^2 z_2 \Phi_{z_2} - (\rho + p_{00}^2 z_2)\,\Phi = 0 \tag{17}$$

с граничными условиями $\Phi(0, z_2; s) = e^{z_2 s}$, $\Phi(z_1, 0; s) = e^{z_1}$. Функция Римана находится методом представления в виде (11),

$$\begin{aligned}
R(z_1, z_2; z_1^0, z_2^0) = {} & \left(\frac{z_2}{z_2^0}\right)^{\rho} e^{-p_{01}^2(z_1 - z_1^0) - p_{10}^2(z_2 - z_2^0)} \\
& \times J_0\left(2\sqrt{-(1 - p_{01}^2)(z_1 - z_1^0)\Big((1 - p_{10}^2)(z_2 - z_2^0) + \rho \ln(z_2/z_2^0)\Big)}\right).
\end{aligned}$$

Аналогично п. 4 приходим к обобщению формулы (13).

Теорема 2. *Двойная производящая функция финальных вероятностей в случае* $h_1(s_1, s_2) = 1$, $h_2(s_1, s_2) = p_{10}^2 s_1 + p_{01}^2 s_2 + p_{00}^2$ *равна* $(\rho > 0)$

$$\Phi(z_1, z_2; s) = \int_0^\infty \left(1 + \frac{1}{\rho}(s - p_{10}^2)\, e^{-x/\rho} z_2\right) e^{-x + p_{01}^2 z_1 + (p_{10}^2(1 - e^{-x/\rho}) + s\, e^{-x/\rho}) z_2}$$
$$\times J_0\left(2\sqrt{(1 - p_{01}^2) z_1 \Big((1 - p_{10}^2)\,(e^{-x/\rho} - 1) z_2 - x\Big)}\right) dx. \qquad (18)$$

Доказательство теоремы состоит в подстановке выражения (18) в уравнение (17) и проверке граничных условий. Заменим в (18) функцию Бесселя интегралом

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{0+} e^{z(u - 1/u)/2}\, \frac{du}{u}.$$

После преобразований, аналогично п. 4, получаем обобщение интегрального представления (14),

$$\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2)}(s) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{0+} \varphi^{\alpha_1}(u) \left[\Big((1 - e^{-x/\rho})\, \psi(u) + s\, e^{-x/\rho}\Big)^{\alpha_2} + \frac{1}{\rho}\, \alpha_2 (s - p_{10}^2)\right.\right.$$
$$\left.\times\, e^{-x/\rho} \Big((1 - e^{-x/\rho})\, \psi(u) + s e^{-x/\rho}\Big)^{\alpha_2 - 1}\right]$$
$$\left.\times\, e^{xu}\, \frac{du}{u}\right) e^{-x}\, dx,$$

где $\varphi(u) = p_{01}^2 + (1 - p_{01}^2)/u$, $\psi(u) = p_{10}^2 + (1 - p_{10}^2)\, u$. Вычисление двукратного интеграла приводит к громоздким выражениям для финальных вероятностей $q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$, $\gamma_2 = 0, 1, \ldots, \alpha_2$.

6. Случай $h_1(s_1, s_2) = p_2^1 s_1^2 + p_0^1$, $h_2(s_1, s_2) = p_{20}^2 s_1^2 + p_{02}^2 s_2^2 + p_{10}^2 s_1 + p_{01}^2 s_2 + p_{00}^2$. Для линейного уравнения в частных производных второго порядка (5) решается задача Дарбу–Пикара: заданы граничные условия

$$\Phi(0, z_2; s) = e^{z_2 s}, \qquad \Phi(z_1, 0; s) = e^{z_1 q}, \qquad (19)$$

где q — ближайший к нулю корень уравнения $p_2^1 s_1^2 + p_0^1 = s_1$. Функция Римана находится методом разложения в ряд (11); применение формулы Римана в случае условий (19) на нехарактеристических кривых приводит к незамкнутому представлению для функции $\Phi(z_1, z_2; s)$ в виде интеграла от ряда по функциям Бесселя целого порядка. В случае $\rho = 0$ такое решение сведено к простому замкнутому интегральному представлению [11]; можно полагать, что при $\rho > 0$ существует замкнутое интегральное представление для производящей функции финальных вероятностей $\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2)}(s)$. Вывод данного в [11] решения уравнения (5) при $\rho = 0$ и $h_2(s_1, s_2) = p_{20}^2 s_1^2 + p_{02}^2 s_2^2 + p_{10}^2 s_1 + p_{01}^2 s_2 + p_{00}^2$ будет изложен в отдельной статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эпидемии процесс. Математическая энциклопедия, т. 5. М.: Советская энциклопедия, 1985, с. 1008.
2. *Старцев А. Н.* О распределении размера эпидемии в одной немарковской модели. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 4, с. 827–839.
3. *Дорогов В. И.*, *Чистяков В. П.* Вероятностные модели превращения частиц. М.: Наука, 1988. 112 с.
4. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971. 436 с.
5. *Севастьянов Б. А.*, *Калинкин А. В.* Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц. — Докл. АН СССР, 1982, т. 264, в. 2, с. 306–308.
6. *Калинкин А. В.* Вероятность вырождения ветвящегося процесса с взаимодействием частиц. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. 27, в. 1, с. 192–197.
7. *Калинкин А. В.* Финальные вероятности для ветвящегося случайного процесса с взаимодействием частиц. — Докл. АН СССР, 1983, т. 269, в. 6, с. 1309–1312.
8. *Бицадзе А. В.*, *Калиниченко Д. Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1985, 312 с.
9. *Copson E. T.* Partial Differential Equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1975. 280 p.
10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. т. 2. М.: Мир, 1984. 752 с.
11. *Калинкин А. В.* Двуполая проблема. — Обозрение прикл. промышл. матем., сер. вероятн. и статист., 1997, т. 4, в. 3, с. 348–349. (Четвертая Всеросс. школа-коллоквиум по стохаст. методам. Тезисы докладов. Уфа, 29 августа–3 сентября 1997 г.)

Поступила в редакцию
25.XI.1997