

# МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

А. М. Ланге

## СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ В ОТКРЫТОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ПАРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ЧАСТИЦ

*Рассмотрена дискретная марковская модель системы с внешним источником и парным взаимодействием частиц. Найдены явные решения стационарного второго уравнения Колмогорова с использованием специальных функций. Получены асимптотики математического ожидания и дисперсии стационарного распределения, а также показана его асимптотическая нормальность при большой интенсивности поступления новых частиц.*

Во многих задачах современного естествознания при исследовании систем частиц используются модели, основанные на математическом аппарате теории вероятностей и теории случайных процессов. С помощью таких моделей исследуются флуктуации числа электронов или фотонов в ливне космических лучей; в физической и химической кинетике исследуются процессы превращения и взаимодействия молекул; в биологии и медицине изучаются процессы развития популяций и распространения эпидемий; в теории массового обслуживания рассматриваются потоки поступления и обслуживания заявок.

Первоначально такие системы исследовались в рамках детерминистского подхода, когда физический процесс рассматривается как изменение во времени макроскопических характеристик системы (концентраций, объемов и т.д.) [1]. При этом считается, что, располагая необходимыми начальными данными, можно с определенностью предсказывать поведение процесса в будущем. Однако детерминированные модели имеют ограниченное применение. В ряде случаев невозможно предсказать поведение процесса по начальным данным, что связано с наличием в системе невоспроизводимых флуктуаций. Детерминированная модель в этих случаях оказывается недостаточно адекватной, так как не учитывает случайного характера наблюдаемых физических явлений.

Вероятностные модели развивались при микроскопическом подходе к физическим процессам. Основная задача статистического метода изучения свойств физико-химических процессов формулируется следующим образом: зная законы взаимодействия частиц (молекул, атомов и т.п.), составляющих систему, необходимо установить при предельном переходе к большому числу частиц законы поведения макро-

скопического количества вещества (в первую очередь, феноменологические законы, устанавливающие связь между наблюдаемыми из опыта макроскопическими величинами [2, 3]).

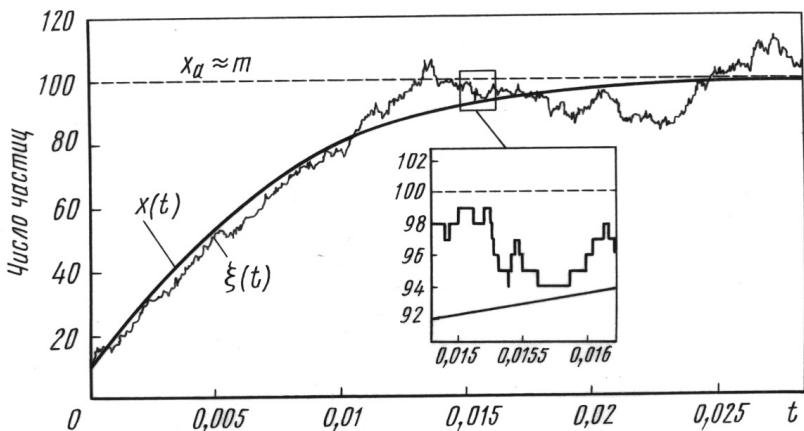
Часто в основе вероятностных моделей лежит предположение о том, что для каждого момента времени поведение системы не зависит от ее истории и зависит только от ее текущего состояния. Это приводит к использованию марковских случайных процессов. В работе [2] введена дискретная модель физико-химической системы с попарно сталкивающимися частицами в виде однородного во времени марковского процесса на множестве  $N^n$  всех  $n$ -мерных векторов с целыми неотрицательными компонентами; отмечается связь с детерминированным законом кинетики химических реакций — законом действующих масс. В работе [4] исследован марковский процесс в системе без взаимодействия с постоянным притоком частиц извне (открытая стохастическая система), не зависящим от числа имеющихся частиц. Подобные марковские процессы рождения и гибели на  $N^n$  исследовались во многих работах, посвященных различным задачам физической и химической кинетики [5], развитию популяций в экологических системах, теории массового обслуживания [6] и другим приложениям.

**Пример: детерминированная и стохастическая модели.** Рассмотрим детерминированную модель открытой физической системы с достаточно большим числом частиц  $x$  типа  $T$ , которое допустимо считать непрерывной функцией времени  $x(t)$ . Поскольку система открыта, в ней возможно появление новых частиц ( $0 \rightarrow T$ ), представляющее собой иммиграцию частиц извне или образование частиц в результате иных физических процессов. Кроме того, частицы могут участвовать в парном взаимодействии, приводящем к гибели одной из частиц:  $2T \rightarrow T$ . Гибель можно интерпретировать как участие в образовании частиц других типов, выход за пределы системы и т.п.

Предположим, что появление частиц происходит с определенной скоростью  $\lambda$ , которая постоянна и не зависит от  $x$ , а взаимодействие частиц выступает в качестве замедляющего фактора, который увеличивается с возрастанием  $x$ , и скорость замедления для одной частицы равна  $\mu x$ , где  $\mu$  — коэффициент пропорциональности. Наряду с описанием химических реакций, такая модель может использоваться для описания экосистемы с ограниченными ресурсами, в которой гибель особей  $2T \rightarrow T$  обусловлена внутривидовой конкуренцией [7]. Результирующая скорость роста популяции, таким образом, равна  $\lambda - \mu x^2$ , что соответствует дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = \lambda - \mu x^2 \quad (1)$$

с начальным условием  $x(0) = x_0$ .



**Рис. 1.** Стохастическая реализация марковского процесса  $\xi(t)$  и его детерминированное приближение  $x(t)$  при начальных условиях  $\xi(0) = 10$ ,  $x_0 = 10$  и значениях параметров  $\lambda = 10^4$ ,  $\mu = 1$

Решение уравнения (1) имеет вид логистической кривой с горизонтальной асимптотой  $x_a = \sqrt{\lambda/\mu}$  (рис. 1). Это означает, что при  $t \rightarrow \infty$  система приходит в состояние равновесия, которое наступает при числе частиц, близком к  $x_a$ .

Для системы частиц со схемой взаимодействий  $0 \rightarrow T$ ,  $2T \rightarrow T$  рассмотрим стохастическую модель в виде однородного во времени марковского процесса  $\xi(t)$  со счетным множеством состояний  $N = \{0, 1, \dots\}$  и непрерывным временем  $t \in [0, \infty]$  [8]. Событие  $\{\xi(t) = i\}$  означает наличие в системе  $i$  частиц типа  $T$  в момент времени  $t$ . Время нахождения процесса в состоянии  $i$  случайно и длится либо до момента появления новой частицы, либо до момента взаимодействия пары частиц. Обозначим  $P_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j | \xi(0) = i\}$ ,  $i, j \in N$ , вероятности перехода процесса за время  $t$  из состояния  $i$  в состояние  $j$ . Будем считать, что вероятность  $P_{i,i+1}(\Delta t)$  образования одной частицы за достаточно малое время  $\Delta t$  равна  $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ , а вероятность  $P_{i,i-1}(\Delta t)$  взаимодействия пары частиц пропорциональна числу  $C_i^2$  сочетаний двух частиц из имеющихся  $i$  частиц и равна  $\mu i(i-1)\Delta t + o(\Delta t)$ , где  $\lambda$  и  $\mu$  — заданные коэффициенты пропорциональности. Вероятность рождения или гибели более одной частицы за время  $\Delta t$  равна  $o(\Delta t)$ . Тогда полная вероятность [9] перехода из состояния  $i$  в состояние  $j$  за время  $t + \Delta t$  с точностью до  $o(\Delta t)$  определяется равенствами

$$\begin{aligned} P_{00}(t + \Delta t) &= P_{00}(t)(1 - \lambda \Delta t), & P_{i0}(t) &\equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, \\ P_{ij}(t + \Delta t) &= P_{i,j-1}(t)\lambda \Delta t + P_{ij}(t)(1 - (\lambda + \mu j(j-1))\Delta t) + & (2) \\ &+ P_{i,j+1}(t)\mu j(j+1)\Delta t, & i &= 0, 1, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

основанными на следующих рассуждениях. Если в момент  $t + \Delta t$  число частиц равно  $j$ , то в момент  $t$  либо было  $j - 1$  частиц и за время  $\Delta t$  появилась одна новая частица, либо было  $j + 1$  частиц и одна частица погибла, либо было  $j$  частиц и за время  $\Delta t$  это число не изменилось. При этом состояние процесса  $\xi(t)$  в момент  $t + \Delta t$  зависит только от состояния в момент  $t$  и не зависит от состояний, предшествующих моменту  $t$ . Путем перестановки членов в равенствах (2) и деления на  $\Delta t$  получаем при заданном  $i$  и  $\Delta t \rightarrow 0$  вторую (прямую) систему дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей [10]:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{00}(t)}{dt} &= -P_{00}(t)\lambda, \\ \frac{dP_{ij}(t)}{dt} &= P_{i,j-1}(t)\lambda - P_{ij}(t)(\lambda + \mu j(j-1)) + P_{i,j+1}(t)\mu j(j+1), \quad (3) \\ i &= 0, 1, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

с начальными условиями  $P_{ii}(0) = 1$ ,  $P_{ij}(0) = 0$  при  $i \neq j$ .

Введем производящую функцию переходных вероятностей  $F_i(t; s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)s^j$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $|s| \leq 1$ . Тогда умножением  $j$ -го уравнения на  $s^j$  и суммированием по  $j$  получим из системы (3) равносильное уравнение в частных производных второго порядка [11]:

$$\frac{\partial F_i(t; s)}{\partial t} = \mu(s - s^2) \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} + \lambda(s - 1)F_i(t; s), \quad F_i(0; s) = s^i. \quad (4)$$

Поведение марковского процесса  $\xi(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  характеризуется стационарными вероятностями  $q_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$ , которые не зависят от начального состояния  $i$ . Из уравнения (4) следует стационарное уравнение для производящей функции  $f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j$ :

$$\mu s \frac{d^2 f(s)}{ds^2} - \lambda f(s) = 0. \quad (5)$$

Для функций  $F_i(t; s)$  и  $f(s)$  выполнены условия нормировки  $F_i(t; 1) \equiv 1$ ,  $f(1) = 1$ . Математическое ожидание  $m$  и дисперсия  $\sigma^2$  стационарного распределения  $\{q_j, j = 0, 1, \dots\}$  вычисляются по формулам [4]

$$m = \frac{df(1)}{ds}, \quad \sigma^2 = \frac{d^2 f(1)}{ds^2} + \frac{df(1)}{ds} - \left( \frac{df(1)}{ds} \right)^2. \quad (6)$$

В работе [8] получено решение уравнения (5)

$$f(s) = \sqrt{s} \frac{I_1 \left( 2 \sqrt{\frac{\lambda s}{\mu}} \right)}{I_1 \left( 2 \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} \right)}, \quad (7)$$

где  $I_1(s)$  — модифицированная функция Бесселя первого порядка. На основе выражения (7) при  $\lambda/\mu \rightarrow \infty$  найдены асимптотики стационарных математического ожидания  $m = \sqrt{\lambda/\mu}$  и дисперсии  $\sigma^2 = \sqrt{\lambda/(4\mu)}$ .

Таким образом, когда при больших  $t$  в стохастической системе устанавливается динамическое равновесие, число частиц  $\xi(t)$  колеблется около значения  $\sqrt{\lambda/\mu}$ , если это число достаточно велико (см. рис. 1). Следовательно, в состоянии равновесия при большом числе частиц детерминированная и вероятностная модели дают близкие результаты. Однако в вероятностной модели заметные отклонения от математического ожидания при большом числе частиц учитываются ростом дисперсии, что делает эту модель более адекватной по сравнению с детерминированной.

Рассмотренный марковский процесс  $\xi(t)$  относится к процессам рождения и гибели [10], для которых непосредственный переход из состояния  $i$  происходит только в состояние  $i - 1$  или  $i + 1$ . Для процессов рождения и гибели выражения для стационарных вероятностей известны [6, гл. 1, § 5, формулы (21), (22)], но малопригодны при асимптотическом исследовании. Выражение (7) для производящей функции  $f(s)$  определяет возможности изучения предельных свойств стационарного распределения и приближенного вычисления вероятностей. В работе [8] установлено, что распределение  $\{q_j\}$  асимптотически нормально при  $\lambda/\mu \rightarrow \infty$ , т.е. вероятность нахождения случайного процесса в пределах от  $j_1$  до  $j_2$  при больших  $t$  приближенно вычисляется следующим образом:

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} q_j \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{j_1}^{j_2} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}} dy.$$

В настоящей работе свойство асимптотической нормальности установлено для более общей марковской модели, не являющейся процессом рождения и гибели. При исследовании предельных свойств стационарного распределения используются асимптотические разложения для модифицированных функций Бесселя и вырожденных гипергеометрических функций, получаемые с помощью известных интегральных представлений [12]. Асимптотики вырожденных гипергеометрических функций получены с помощью метода перевала [13, 14], в том числе, когда критическая точка зависит от растущего параметра.

**Описание общей стохастической модели. Второе уравнение Колмогорова.** Рассматриваемая система частиц описывается кинетической схемой  $0 \rightarrow k_0 T$ ,  $2T \rightarrow k_2 T$ , в которой коэффициентам  $k_0$  и  $k_2$  соответствуют распределения вероятностей  $\{p_l^k \geq 0, \sum_{l=0}^{\infty} p_l^k = 1, p_k^k = 0\}, k = 0, 2$  [11]. Если в системе имеется  $i$  частиц типа  $T$ , то веро-

ятности каждого из переходов за время  $\Delta t \rightarrow 0$  соответственно равны  $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$  и  $\mu i(i-1)\Delta t + o(\Delta t)$ . Число  $k_0$  частиц, образующихся в результате перехода  $0 \rightarrow k_0 T$ , определяется распределением вероятностей  $\{p_{k_0}^0\}$ , а переход  $2T \rightarrow k_2 T$  с распределением вероятностей  $\{p_{k_2}^2\}$  приводит к замене пары частиц  $k_2$  новыми частицами. Вычисляя полную вероятность перехода из состояния  $i$  в состояние  $j$  за время  $\Delta t \rightarrow 0$ , представим переходные вероятности  $P_{ij}(\Delta t)$ ,  $i, j \in \mathbf{N}$ , в виде

$$P_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} (\lambda p_{j-i}^0 + \mu i(i-1)p_{j-i+2}^2)\Delta t + o(\Delta t) & \text{при } j > i, \\ 1 - (\lambda + \mu i(i-1))\Delta t + o(\Delta t) & \text{при } j = i, \\ \mu i(i-1)p_{j-i+2}^2\Delta t + o(\Delta t) & \text{при } i-2 \leq j < i, \\ o(\Delta t) & \text{при } j < i-2. \end{cases}$$

Таким образом, марковский процесс  $\xi(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , на множестве состояний  $N = \{0, 1, \dots\}$  задан плотностями распределения вероятностей переходов.

В состоянии  $i$  процесс  $\xi(t)$  находится случайное время, до тех пор, пока не произойдет один из указанных переходов. Переход  $0 \rightarrow k_0 T$  может произойти спустя случайное время  $\tau_i^0$ , имеющее распределение вероятностей  $P\{\tau_i^0 < t\} = 1 - e^{-\lambda t}$  [6, гл. 1, § 2], а переход  $2T \rightarrow k_2 T$  — спустя время  $\tau_i^2$ , имеющее распределение вероятностей  $P\{\tau_i^2 < t\} = 1 - e^{-\mu i(i-1)t}$ . Поскольку величины  $\tau_i^0$  и  $\tau_i^2$  независимы, то время  $\tau_i = \min(\tau_i^0, \tau_i^2)$  нахождения системы в состоянии  $i$  распределено по экспоненциальному закону,  $P\{\tau_i < t\} = 1 - e^{-(\lambda + \mu i(i-1))t}$ , а условные вероятности каждого из переходов (при условии, что какой-либо переход произошел) соответственно равны  $\lambda/(\lambda + \mu i(i-1))$  и  $\mu i(i-1)/(\lambda + \mu i(i-1))$ .

При помощи производящих функций

$$F_i(t; s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)s^j, \quad h_k(s) = \sum_{l=0}^{\infty} p_l^k s^l, \quad k = 0, 2, \quad |s| \leq 1,$$

вторая система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей марковского процесса  $\xi(t)$  записывается в виде уравнения в частных производных [11, теорема 1.3]

$$\frac{\partial F_i(t; s)}{\partial t} = \mu(h_2(s) - s^2) \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} + \lambda(h_0(s) - 1)F_i(t; s), \quad F_i(0; s) = s^i.$$

Соответствующее уравнение для производящей функции  $f(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} F_i(t; s)$  стационарных вероятностей принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка [11, теорема 3.2]

$$\mu(h_2(s) - s^2) \frac{d^2 f(s)}{ds^2} + \lambda(h_0(s) - 1)f(s) = 0. \quad (8)$$

В настоящей работе поведение процесса  $\xi(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  исследуется в случае  $h_0(s) = p_1^0 s + p_2^0 s^2$ ,  $h_2(s) = p_0^2 + p_1^2 s$ . Из условий  $p_1^0 + p_2^0 = 1$ ,  $p_0^2 + p_1^2 = 1$  имеем разложения на множители  $h_0(s) - 1 = (s - 1)(p_2^0 s + 1)$ ,  $h_2(s) - s^2 = (1 - s)(s + p_0^2)$ , и стационарное уравнение (8) сводится к уравнению, коэффициенты которого являются линейными функциями независимой переменной (см. уравнение Лапласа в работах [15, ч. 3, уравнение 2.145], [12, гл. 6, § 2]):

$$\mu(s + p_0^2) \frac{d^2 f(s)}{ds^2} - \lambda(p_2^0 s + 1)f(s) = 0. \quad (9)$$

Существование стационарного распределения следует из наличия нетривиального абсолютно суммируемого решения стационарной системы уравнений Колмогорова [10, гл. 3, § 6], [6, гл. 1, § 5, теорема 4], которое получаем как решение уравнения (9). При этом коэффициенты  $q_j$  разложения производящей функции в степенной ряд

$$f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j$$

составляют предельное стационарное распределение.

Уравнение (9) решено в явном виде при всех значениях параметров  $p_2^0$  и  $p_0^2$ . Предельные теоремы, приводимые далее, устанавливают асимптотическую нормальность найденного стационарного распределения при  $\lambda/\mu \rightarrow \infty$ .

**Решение стационарного уравнения в случае  $p_2^0 = 1, p_0^2 = 1$ .** Для рассматриваемого марковского процесса со схемой взаимодействий  $0 \rightarrow 2T$ ,  $2T \rightarrow 0$  класс сообщающихся состояний [10] зависит от начального состояния. Если начальное состояние четное, то имеем класс  $K^0 = \{0, 2, 4, \dots\}$ ; если нечетное, то имеем класс  $K^1 = \{1, 3, 5, \dots\}$ . Интенсивности вероятностей переходов указаны на рис. 2.

Уравнение (9) принимает вид уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\mu \frac{d^2 f(s)}{ds^2} - \lambda f(s) = 0.$$

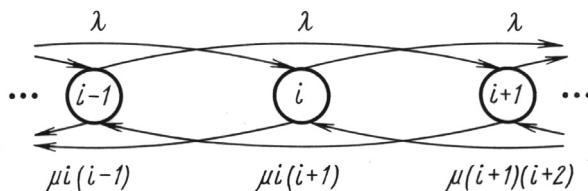


Рис. 2. Диаграмма переходов в случае  $p_2^0 = 1, p_0^2 = 1$

Общее решение  $f(s) = C_1 e^{-\nu s} + C_2 e^{\nu s}$ ,  $\nu = \sqrt{\lambda/\mu}$ , представим в виде степенного ряда

$$f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((-1)^j C_1 + C_2) \nu^j s^j}{j!}, \quad (10)$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные константы. Поскольку переход из состояния  $i$  в состояние  $i+1$  невозможен, то  $P_{i,i+1}(t) \equiv 0$ . Если процесс  $\xi(t)$  находится в классе состояний  $K^0$ , то ряд (10) содержит только четные степени  $s$ , и тогда  $C_1 = C_2$ ; если в классе состояний  $K^1$  — ряд (10) содержит только нечетные степени  $s$ , и тогда  $C_1 = -C_2$ . Определяя константы  $C_1$  и  $C_2$  из условия нормировки  $f(1) = 1$ , получаем для производящих функций выражения

$$f_0(s) = \frac{\text{ch}(\nu s)}{\text{ch}(\nu)}, \quad f_1(s) = \frac{\text{sh}(\nu s)}{\text{sh}(\nu)}. \quad (11)$$

Таким образом, распределения вероятностей [16]

$$\begin{aligned} q_{j,0} &= \frac{\nu^j}{j! \text{ch}(\nu)}, \quad j \in K^0, \\ q_{j,1} &= \frac{\nu^j}{j! \text{sh}(\nu)}, \quad j \in K^1, \end{aligned} \quad (12)$$

являются предельными стационарными распределениями в классах со-общающихся состояний  $K^0$  и  $K^1$  соответственно.

Рассмотрим случайные величины  $\eta_{\nu,0}$  и  $\eta_{\nu,1}$  с распределениями вероятностей (12). Из формул (6) получаем для математических ожиданий  $m_{\nu,0} = M\eta_{\nu,0}$ ,  $m_{\nu,1} = M\eta_{\nu,1}$  и дисперсий  $\sigma_{\nu,0}^2 = D\eta_{\nu,0}$ ,  $\sigma_{\nu,1}^2 = D\eta_{\nu,1}$  следующие выражения:

$$m_{\nu,0} = \nu \text{th}(\nu), \quad \sigma_{\nu,0}^2 = \nu^2(1 - \text{th}^2(\nu)) + \nu \text{th}(\nu), \quad (13)$$

$$m_{\nu,1} = \nu \text{cth}(\nu), \quad \sigma_{\nu,1}^2 = \nu^2(1 - \text{cth}^2(\nu)) + \nu \text{cth}(\nu). \quad (14)$$

**Утверждение 1.** При  $n = 0, 1$  и  $\nu \rightarrow \infty$  справедливы асимптотики

$$m_{\nu,n} \sim \nu, \quad \sigma_{\nu,n}^2 \sim \nu.$$

**Доказательство.** Из определения функций  $\text{th}(z)$  и  $\text{cth}(z)$  следуют асимптотические формулы при  $z \rightarrow +\infty$ :  $\text{th}(z) \sim 1$ ,  $\text{cth}(z) \sim 1$ ,  $1 - \text{th}^2(z) \sim 4e^{-2z}$ ,  $1 - \text{cth}^2(z) \sim -4e^{-2z}$ . Применение указанных формул к выражениям (13) и (14) завершает доказательство утверждения.

**Теорема 1.** При  $n = 0, 1, \nu \rightarrow \infty$  и фиксированном  $x \in (-\infty, +\infty)$  имеем

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\eta_{\nu,n} - m_{\nu,n}}{\sigma_{\nu,n}} \leq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

**Доказательство.** Для доказательства предельной теоремы используем стандартный метод характеристических функций [9, гл. 9]. Введем характеристическую функцию (здесь и далее мнимую единицу обозначим  $\omega$ ,  $\omega^2 = -1$ )

$$\varphi_{\nu,n}(\tau) = M \exp \left( \omega \tau \frac{\eta_{\nu,n} - m_{\nu,n}}{\sigma_{\nu,n}} \right)$$

нормированной случайной величины  $(\eta_{\nu,n} - m_{\nu,n})/\sigma_{\nu,n}$ . По определению математического ожидания имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{\nu,n}(\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} P \{ \eta_{\nu,n} = 2k + n \} \exp \left( \omega \tau \frac{2k + n - m_{\nu,n}}{\sigma_{\nu,n}} \right) = \\ &= \exp \left( -\omega \tau \frac{m_{\nu,n}}{\sigma_{\nu,n}} \right) f_n \left( \exp \left( \frac{\omega \tau}{\sigma_{\nu,n}} \right) \right). \end{aligned}$$

В соответствии с формулами (11) получаем

$$\varphi_{\nu,0}(\tau) = \exp \left( -\omega \tau \frac{m_{\nu,0}}{\sigma_{\nu,0}} \right) \frac{\text{ch} \left( \nu \exp \left( \frac{\omega \tau}{\sigma_{\nu,0}} \right) \right)}{\text{ch}(\nu)}, \quad (15)$$

$$\varphi_{\nu,1}(\tau) = \exp \left( -\omega \tau \frac{m_{\nu,1}}{\sigma_{\nu,1}} \right) \frac{\text{sh} \left( \nu \exp \left( \frac{\omega \tau}{\sigma_{\nu,1}} \right) \right)}{\text{sh}(\nu)}. \quad (16)$$

Покажем, что при  $\nu \rightarrow \infty$  характеристическая функция  $\varphi_{\nu,n}(\tau)$  стремится к характеристической функции  $e^{-\tau^2/2}$  случайной величины, распределенной по стандартному нормальному закону. Из определения функций  $\text{sh}(z)$  и  $\text{ch}(z)$  следуют асимптотические формулы  $\text{sh}(z) \sim e^z/2$ ,  $\text{ch}(z) \sim e^z/2$  при  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $|\arg z| \leq \pi/2 - \delta < \pi/2$  (здесь и далее  $\delta > 0$  сколь угодно мало и не зависит от  $z$ ), с помощью которых из выражений (15) и (16) получаем при  $\nu \rightarrow \infty$

$$\varphi_{\nu,n}(\tau) \sim \exp \left( \nu \left( \exp \left( \frac{\omega \tau}{\sigma_{\nu,n}} \right) - 1 \right) - \omega \tau \frac{m_{\nu,n}}{\sigma_{\nu,n}} \right).$$

Используя разложение по формуле Тейлора

$$\exp \left( \frac{\omega \tau}{\sigma_{\nu,n}} \right) = 1 + \frac{\omega \tau}{\sigma_{\nu,n}} - \frac{\tau^2}{2\sigma_{\nu,n}^2} + o(\sigma_{\nu,n}^{-2}),$$

приходим к асимптотике

$$\varphi_{\nu,n}(\tau) \sim \exp\left(\omega\tau \frac{\nu - m_{\nu,n}}{\sigma_{\nu,n}} - \frac{\nu\tau^2}{2\sigma_{\nu,n}^2}\right). \quad (17)$$

Согласно формулам  $1 - \text{th}(z) \sim 2e^{-2z}$ ,  $1 - \text{cth}(z) \sim -2e^{-2z}$  при  $z \rightarrow +\infty$  из выражений (13) и (14) имеем  $\nu - m_{\nu,n} = o(1)$ ,  $\nu \rightarrow \infty$ . Таким образом, первое слагаемое под знаком экспоненты в выражении (17) стремится к нулю. Отсюда, учитывая асимптотику для  $\sigma_{\nu,n}^2$  из утверждения 1, получаем окончательно

$$\varphi_{\nu,n}(\tau) \sim \exp\left(-\frac{\nu\tau^2}{2\sigma_{\nu,n}^2}\right) \sim e^{-\tau^2/2}.$$

Теорема доказана.

**Решение стационарного уравнения в случае  $p_2^0 = 0$ . Предельная теорема.** Имеем процесс со схемой взаимодействий  $0 \rightarrow T, 2T \rightarrow k_2T, k_2 = 0, 1$ , т.е. поступление в систему частиц можно интерпретировать как пуассоновский поток с интенсивностью  $\lambda$  [6, гл. 2, § 1]. Возможные переходы марковского процесса из одного состояния в другое и их интенсивности показаны на рис. 3.

Уравнение (9) принимает вид

$$\mu(s + p_0^2) \frac{d^2 f(s)}{ds^2} - \lambda f(s) = 0. \quad (18)$$

После замены переменных  $z = 2\nu\sqrt{s + p_0^2}$  (здесь и далее под  $\sqrt{z}$  подразумевается главная ветвь),  $y(z) = z^{-1}f(s)$ , где  $\nu = \sqrt{\lambda/\mu}$ , уравнение (18) сводится к модифицированному уравнению Бесселя  $z^2y'' + zy' - (z^2 + 1)y = 0$  [17, гл. 7, § 2, уравнение (11)]. Следуя работе [17], имеем общее решение уравнения (18) в виде

$$f(s) = C_1 \sqrt{s + p_0^2} I_1(2\nu\sqrt{s + p_0^2}) + C_2 \sqrt{s + p_0^2} K_1(2\nu\sqrt{s + p_0^2}), \quad (19)$$

где  $I_1(z)$  и  $K_1(z)$  — модифицированные функции Бесселя первого порядка соответственно первого и второго рода;  $C_1, C_2$  — произвольные

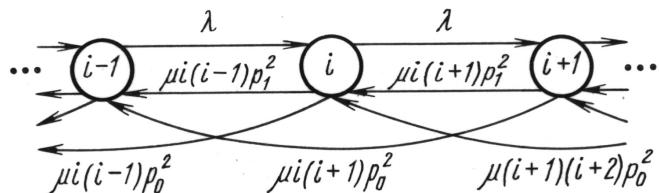


Рис. 3. Диаграмма переходов в случае  $p_2^0 = 0$

константы. Из представлений  $I_1(z)$  и  $K_1(z)$  в форме рядов [17, гл. 7, § 2, формулы (2) и (37)] следует, что первое слагаемое в выражении (19) — функция, аналитическая на всей комплексной плоскости  $s$ , а второе слагаемое — функция неаналитическая в точке  $s = -p_0^2$ . Если  $p_0^2 < 1$ , то  $C_2 = 0$ , так как производящая функция  $f(s)$  по определению является аналитической в круге  $|s| < 1$ . Если  $p_0^2 = 1$ , то  $C_2 = 0$ , так как в этом случае  $f(s) = C_1 \sqrt{s + p_0^2} I_1(2\nu \sqrt{s + p_0^2})$  представляет собой единственное (с точностью до множителя  $C_1 > 0$ ) решение уравнения (18), все коэффициенты которого при разложении в ряд по степеням  $s$  неотрицательны. Определяя константу  $C_1$  из условия  $f(1) = 1$ , приходим к выражению для производящей функции стационарного распределения

$$f(s) = \sqrt{\frac{s + p_0^2}{1 + p_0^2}} \frac{I_1(2\nu \sqrt{s + p_0^2})}{I_1(2\nu \sqrt{1 + p_0^2})}. \quad (20)$$

Случай  $p_0^2 = 1$  соответствует химической реакции  $A \rightarrow T$ ,  $2T \rightarrow B$  [18, гл. 9, § 1], в которой концентрации веществ  $A$  и  $B$  поддерживаются постоянными. Выражения для стационарных вероятностей  $q_j$  [18, гл. 9, § 1, формула (15)] следуют из разложения функции (20) в ряд по степеням  $s$ .

Рассмотрим случайную величину  $\eta_\nu$  на множестве  $N = \{0, 1, \dots\}$  с распределением, определяемым функцией (20). Дифференцируя выражение (20) с использованием соотношения для модифицированных функций Бесселя  $zI'_1(z) = zI_0(z) - I_1(z)$  [17, гл. 7, § 2, формула (54)], получим

$$f'(1) = \frac{\nu}{a} \frac{I_0(2a\nu)}{I_1(2a\nu)},$$

где  $a = \sqrt{1 + p_0^2}$ . Из уравнения (18) следует, что  $f''(1) = \nu^2/a^2$ . Представляя значения производных в формулы (6), получаем выражения для математического ожидания  $m_\nu = M\eta_\nu$  и дисперсии  $\sigma_\nu^2 = D\eta_\nu$ :

$$m_\nu = \frac{\nu}{a} \frac{I_0(2a\nu)}{I_1(2a\nu)}, \quad \sigma_\nu^2 = \frac{\nu^2}{a^2} \left(1 - \frac{I_0^2(2a\nu)}{I_1^2(2a\nu)}\right) + \frac{\nu}{a} \frac{I_0(2a\nu)}{I_1(2a\nu)}. \quad (21)$$

**Утверждение 2.** При  $\nu \rightarrow \infty$  справедливы асимптотики

$$m_\nu \sim \frac{\nu}{a}, \quad \sigma_\nu^2 \sim \left(1 - \frac{1}{2a^2}\right) \frac{\nu}{a}.$$

**Доказательство.** Воспользуемся асимптотиками для модифицированных функций Бесселя при  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $|\arg z| \leq \pi/2 - \delta < \pi/2$  [17, гл. 7, § 13, формула (5)]:

$$I_0(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left( 1 + \frac{1}{8z} + O(z^{-2}) \right), \quad (22)$$

$$I_1(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left( 1 - \frac{3}{8z} + O(z^{-2}) \right). \quad (23)$$

Суммируя и вычитая формулы (22) и (23), получим

$$I_0(z) + I_1(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} (2 + O(z^{-1})), \quad (24)$$

$$I_0(z) - I_1(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left( \frac{1}{2z} + O(z^{-2}) \right). \quad (25)$$

Из формул (22) и (23) следует также

$$\frac{I_0(z)}{I_1(z)} = 1 + o(1). \quad (26)$$

Перемножая формулы (24) и (25), получаем

$$1 - \frac{I_0^2(z)}{I_1^2(z)} = -\frac{1}{z} + o(z^{-1}). \quad (27)$$

Подстановка асимптотик (26) и (27) в формулы (21) завершает доказательство утверждения.

**Теорема 2.** При  $\nu \rightarrow \infty$  и фиксированном  $x \in (-\infty, +\infty)$  имеем

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\eta_\nu - m_\nu}{\sigma_\nu} \leq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

**Доказательство.** Обозначим  $\varphi_\nu(\tau)$  характеристическую функцию нормированной случайной величины  $(\eta_\nu - m_\nu)/\sigma_\nu$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} \varphi_\nu(\tau) &= M \exp \left( \omega \tau \frac{\eta_\nu - m_\nu}{\sigma_\nu} \right) = \exp \left( -\omega \tau \frac{m_\nu}{\sigma_\nu} \right) f \left( \exp \left( \frac{\omega \tau}{\sigma_\nu} \right) \right) = \\ &= \sqrt{1 + \frac{\gamma_\nu(\tau)}{a^2}} \exp \left( -\omega \tau \frac{m_\nu}{\sigma_\nu} \right) \frac{I_1(2\nu \sqrt{\gamma_\nu(\tau) + a^2})}{I_1(2a\nu)}, \end{aligned}$$

где  $\omega^2 = -1$ ;  $\gamma_\nu(\tau) = \exp(\omega\tau/\sigma_\nu) - 1$ . Согласно утверждению 2 имеем  $\sigma_\nu \rightarrow \infty$  и, следовательно,  $\gamma_\nu(\tau) \rightarrow 0$ . Используя главный член асимптотики (23), получаем при  $\nu \rightarrow \infty$

$$\varphi_\nu(\tau) \sim \exp \left( 2a\nu \left( \sqrt{1 + \frac{\gamma_\nu(\tau)}{a^2}} - 1 \right) - \omega \tau \frac{m_\nu}{\sigma_\nu} \right).$$

Используя разложение по формуле Тейлора

$$\sqrt{1 + \frac{\gamma_\nu(\tau)}{a^2}} = 1 + \frac{\omega\tau}{2a^2\sigma_\nu} + \frac{(1 - 2a^2)\tau^2}{8a^4\sigma_\nu^2} + o(\sigma_\nu^{-2}),$$

получим выражение

$$\varphi_\nu(\tau) \sim \exp\left(\omega\tau \frac{\nu/a - m_\nu}{\sigma_\nu} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2a^2}\right)\frac{\nu\tau^2}{a\sigma_\nu^2}\right). \quad (28)$$

Покажем, что первое слагаемое под знаком экспоненты в выражении (28) стремится к нулю. Действительно, из формул (23) и (25) следует

$$m_\nu - \frac{\nu}{a} = \frac{\nu}{a} \left( \frac{I_0(2a\nu) - I_1(2a\nu)}{I_1(2a\nu)} \right) \sim \frac{1}{4a^2},$$

откуда  $m_\nu - \nu/a = o(\sigma_\nu)$ . Учитывая асимптотику для  $\sigma_\nu^2$  в утверждении 2, получаем окончательно

$$\varphi_\nu(\tau) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2a^2}\right)\frac{\nu\tau^2}{a\sigma_\nu^2}\right) \sim e^{-\tau^2/2}.$$

Теорема доказана.

**Решение стационарного уравнения в случае  $p_2^0 > 0, p_2^0 p_0^2 < 1$ .**

**Предельная теорема.** Схема взаимодействий в данном случае принимает вид  $0 \rightarrow k_0 T, k_0 = 1, 2; 2T \rightarrow k_2 T, k_2 = 0, 1$ . Возможные переходы между состояниями марковского процесса  $\xi(t)$  показаны на рис. 4.

Введем обозначения  $\nu = \sqrt{\lambda p_2^0/\mu}$ ,  $a = (1 - p_2^0 p_0^2)/2p_2^0$ . С помощью замены переменных  $z = 2\nu(s + p_0^2)$ ,  $y(z) = (s + p_0^2)^{-1}e^{\nu s}f(s)$  стационарное уравнение (9) сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению  $zy'' + (2 - z)y' - (1 + a\nu)y = 0$  [12, гл. 6, § 1, уравнение (2)]. Аналитическое на всей комплексной плоскости решение этого уравнения имеет вид

$$y(z) = C\Phi(1 + a\nu, 2; z),$$

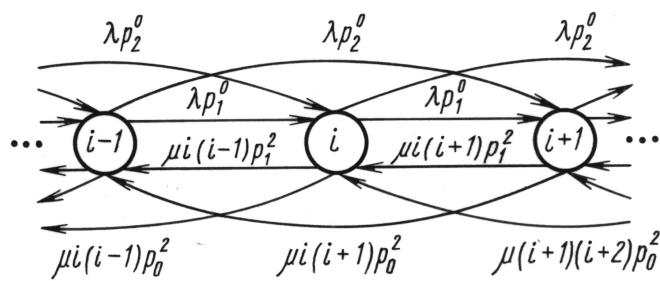


Рис. 4. Диаграмма переходов в случае  $p_2^0 > 0, p_2^0 p_0^2 < 1$

где  $\Phi(\alpha, \beta; z)$  — функция Куммера с параметрами  $\alpha, \beta$  [12];  $C$  — произвольная константа. Соответственно, аналитическое в круге  $|s| < 1$  решение уравнения (9) имеет вид  $f(s) = C(s + p_0^2)e^{-\nu s}\Phi(1 + a\nu, 2; 2\nu(s + p_0^2))$ . С помощью условия нормировки  $f(1) = 1$  приходим к выражению для производящей функции стационарного распределения:

$$f(s) = e^{\nu(1-s)} \left( \frac{s + p_0^2}{1 + p_0^2} \right) \frac{\Phi(1 + a\nu, 2; 2\nu(s + p_0^2))}{\Phi(1 + a\nu, 2; 2\nu(1 + p_0^2))}. \quad (29)$$

Обозначим  $\eta_\nu$  случайную величину на  $N = \{0, 1, \dots\}$  с распределением, соответствующим производящей функции (29). Математическое ожидание и дисперсия примут вид

$$m_\nu = \nu\phi_\nu + \frac{1}{b}, \quad (30)$$

$$\sigma_\nu^2 = \nu^2 \left( 1 + \frac{2a}{b} - \phi_\nu^2 \right) + \nu\phi_\nu \left( 1 - \frac{2}{b} \right) + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}, \quad (31)$$

где  $b = 1 + p_0^2$ ,

$$\phi_\nu = \frac{2\Phi'(1 + a\nu, 2; 2b\nu)}{\Phi(1 + a\nu, 2; 2b\nu)} - 1. \quad (32)$$

**Утверждение 3.** При  $\nu \rightarrow \infty$  справедливы асимптотики

$$m_\nu \sim \nu \sqrt{1 + \frac{2a}{b}}, \quad \sigma_\nu^2 \sim \nu \left( 1 - \frac{a}{b(2a + b)} \right) \sqrt{1 + \frac{2a}{b}}. \quad (33)$$

**Доказательство.** Воспользуемся интегральным представлением функции Куммера [12, гл. 6, § 11, формула (2)]:

$$\Phi(\alpha, \beta; z) = \frac{1}{2\pi\omega} \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha - \beta + 1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{(1+)} e^{zu} u^{\alpha-1} (u - 1)^{\beta-\alpha-1} du, \quad (34)$$

$\operatorname{Re} \alpha > 0$ . Здесь  $\Gamma(\alpha)$  — гамма-функция, а контуром интегрирования служит петля, которая начинается и заканчивается в точке  $u = 0$  и обходит точку  $u = 1$  в положительном направлении. Полученные далее асимптотики для выражений, содержащих функцию  $\Phi(1 + a\nu, 2; 2b\nu)$ , основаны на вычислении асимптотики при  $\nu \rightarrow \infty$  интеграла

$$\int_0^{(1+)} e^{\nu S(u)} h(u) du, \quad S(u) = 2bu + a \ln \frac{u}{u - 1} \quad (35)$$

(под значением логарифма подразумевается главная ветвь), где  $h(u)$  — функция, аналитическая в области  $\operatorname{Re} u > 0$ . Указанная асимптотика

находится с помощью метода перевала [13, 14]. Функция  $S(u)$  является однозначной аналитической функцией в области  $\operatorname{Re} u > 0$  с разрезом по отрезку  $[0, 1]$  и имеет простую точку перевала  $u_0$ , определяемую из условия  $S'(u_0) = 0$ . Дифференцируя функцию  $S(u)$ , находим

$$u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2a}{b}}, \quad S''(u_0) = \frac{4b^2}{a} \sqrt{1 + \frac{2a}{b}},$$

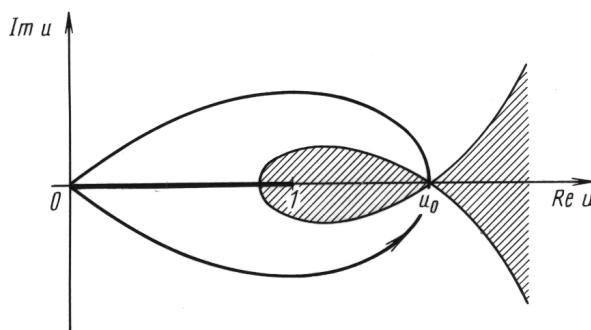
$$S'''(u_0) = -\frac{8b^2}{a} \left(3 + \frac{2b}{a}\right), \quad S^{(4)}(u_0) = \frac{96b^4}{a^3} \left(1 + \frac{a}{b}\right) \sqrt{1 + \frac{2a}{b}}.$$

Контур интегрирования может быть деформирован в петлю, проходящую через точку  $u_0$  и лежащую при  $u \neq u_0$  в области  $\operatorname{Re} S(u) < \operatorname{Re} S(u_0)$  (рис. 5). В рассматриваемом случае выполнены условия теоремы 7.1 из работы [14, гл. 4]. Согласно этой теореме асимптотика интеграла (35) с точностью до второго члена определяется выражением

$$\int_0^{(1+)} e^{\nu S(u)} h(u) du \sim \omega \sqrt{\frac{2\pi}{\nu S''(u_0)}} e^{\nu S(u_0)} \left( h(u_0) - \frac{1}{4\nu S''(u_0)} \times \right. \\ \times \left. \left( 2h''(u_0) - \frac{2S'''(u_0)h'(u_0)}{S''(u_0)} + \left( \frac{5(S'''(u_0))^2}{6(S''(u_0))^2} - \frac{S^{(4)}(u_0)}{2S''(u_0)} \right) h(u_0) \right) \right). \quad (36)$$

Введем обозначение

$$R_\nu = \frac{e^{\nu S(u_0)}}{a\nu \sqrt{2\pi\nu S''(u_0)}}.$$



**Рис. 5. Контур интегрирования в области  $\operatorname{Re} S(u) < \operatorname{Re} S(u_0)$  (область  $\operatorname{Re} S(u) > \operatorname{Re} S(u_0)$  заштрихована)**

Учитывая равенства  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ ,  $\Gamma(1) = 1$ , получаем с помощью выражения (36) следующие асимптотические формулы:

$$\Phi(1 + a\nu, 2; 2b\nu) = \frac{1}{2\pi\omega a\nu} \int_0^{(1+)} e^{\nu S(u)} du \sim R_\nu, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} 2\Phi'(1 + a\nu, 2; 2b\nu) - \Phi(1 + a\nu, 2; 2b\nu) &= \\ &= \frac{1}{2\pi\omega a\nu} \int_0^{(1+)} e^{\nu S(u)} (2u - 1) du \sim R_\nu \sqrt{1 + \frac{2a}{b}}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} 2\Phi'(1 + a\nu, 2; 2b\nu) - \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2a}{b}}\right) \Phi(1 + a\nu, 2; 2b\nu) &= \\ &= \frac{1}{2\pi\omega a\nu} \int_0^{(1+)} e^{\nu S(u)} \left(2u - 1 - \sqrt{1 + \frac{2a}{b}}\right) du \sim -\frac{3a + 2b}{2b(2a + b)} \frac{R_\nu}{\nu}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} 2\Phi'(1 + a\nu, 2; 2b\nu) - \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2a}{b}}\right) \Phi(1 + a\nu, 2; 2b\nu) &= \\ &= \frac{1}{2\pi\omega a\nu} \int_0^{(1+)} e^{\nu S(u)} \left(2u - 1 + \sqrt{1 + \frac{2a}{b}}\right) du \sim 2R_\nu \sqrt{1 + \frac{2a}{b}}. \end{aligned} \quad (40)$$

При выводе формул (37), (38) и (40) в асимптотической формуле (36) используется только главный член, а при выводе формулы (39) используется все выражение (36).

Из выражений (32), (37) и (38) получаем

$$\phi_\nu \sim \sqrt{1 + \frac{2a}{b}}. \quad (41)$$

Из формул (39) и (40) следует, что

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{2a}{b}} - \phi_\nu &\sim \frac{3a + 2b}{2b(2a + b)\nu}, \\ \sqrt{1 + \frac{2a}{b}} + \phi_\nu &\sim 2\sqrt{1 + \frac{2a}{b}}. \end{aligned} \quad (42)$$

Перемножая последние формулы, получаем

$$1 + \frac{2a}{b} - \phi_\nu^2 \sim \frac{3a + 2b}{b(2a + b)\nu} \sqrt{1 + \frac{2a}{b}}. \quad (43)$$

Применяя асимптотики (41) и (43) к выражениям для математического ожидания (30) и дисперсии (31), завершаем доказательство утверждения.

**Теорема 3.** При  $\nu \rightarrow \infty$  и фиксированном  $x \in (-\infty, +\infty)$  имеем

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\eta_\nu - m_\nu}{\sigma_\nu} \leq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

**Доказательство.** Характеристическая функция случайной величины  $(\eta_\nu - m_\nu)/\sigma_\nu$  равна

$$\begin{aligned} \varphi_\nu(\tau) &= M \left( \omega \tau \frac{\eta_\nu - m_\nu}{\sigma_\nu} \right) = \exp \left( -\omega \tau \frac{m_\nu}{\sigma_\nu} \right) f \left( \exp \left( \frac{\omega \tau}{\sigma_\nu} \right) \right) = \\ &= \left( 1 + \frac{\gamma_\nu(\tau)}{b} \right) \exp \left( -\nu \gamma_\nu(\tau) - \omega \tau \frac{m_\nu}{\sigma_\nu} \right) \frac{\Phi(1 + a\nu, 2, 2\nu(\gamma_\nu(\tau) + b))}{\Phi(1 + a\nu, 2, 2b\nu)}, \end{aligned}$$

где  $\gamma_\nu(\tau) = \exp(\omega\tau/\sigma_\nu) - 1$ . Согласно формуле (34) имеем интегральное представление

$$\Phi(1 + a\nu, 2; 2\nu(\gamma_\nu + b)) = \frac{1}{2\pi\omega a\nu} \int_0^{(1+)} e^{\nu S(u, \nu)} du,$$

где  $S(u, \nu) = 2(\gamma_\nu + b)u + a \ln(u/(u - 1))$ . Асимптотика интеграла при  $\nu \rightarrow \infty$  находится с помощью метода перевала, причем определяемая из условия  $S'_u(u, \nu) = 0$  критическая точка  $u_0(\nu)$  зависит от параметра  $\nu$  [13, гл. 5, § 21]. Нетрудно получить соотношения

$$S(u_0, \nu) - S(u_0) = 2u_0\gamma_\nu, \quad S'_u(u_0, \nu) = 2\gamma_\nu, \quad S''_{uu}(u_0, \nu) = S''(u_0), \quad (44)$$

где  $S(u)$  и  $u_0$  определены при доказательстве утверждения 3. Поскольку  $\gamma_\nu \rightarrow 0$ , то  $S(u, \nu) \rightarrow S(u)$  и  $u_0(\nu) \rightarrow u_0$ . При этом выполнены условия теоремы Фабера [13, теорема 21.3], согласно которой главный член асимптотики определяется выражением

$$\int_0^{(1+)} e^{\nu S(u, \nu)} du \sim \omega \sqrt{\frac{2\pi}{\nu S''_{uu}(u_0, \nu)}} \exp \left( \nu S_u(u_0, \nu) - \frac{\nu(S'_u(u_0, \nu))^2}{2S''_{uu}(u_0, \nu)} \right), \quad (45)$$

в котором  $u_0$  — приближенная точка перевала. Из выражения (45) с учетом формул (37) и (44) получаем асимптотику

$$\frac{\Phi(1 + a\nu, 2; 2\nu(\gamma_\nu + b))}{\Phi(1 + a\nu, 2; 2b\nu)} \sim \exp\left(2u_0\nu\gamma_\nu - \frac{2\nu\gamma_\nu^2}{S''(u_0)}\right).$$

Следовательно, для характеристической функции при  $\nu \rightarrow \infty$  имеем

$$\begin{aligned} \varphi_\nu(\tau) &\sim \exp\left((2u_0 - 1)\nu\gamma_\nu(\tau) - \frac{2\nu\gamma_\nu^2(\tau)}{S''(u_0)} - \omega\tau\frac{m_\nu}{\sigma_\nu}\right) = \\ &= \exp\left(\nu\gamma_\nu(\tau)\sqrt{1 + \frac{2a}{b}} - \frac{a\nu\gamma_\nu^2(\tau)}{2b(2a + b)}\sqrt{1 + \frac{2a}{b}} - \omega\tau\frac{m_\nu}{\sigma_\nu}\right). \end{aligned}$$

Используя разложения по формуле Тейлора

$$\gamma_\nu(\tau) = \frac{\omega\tau}{\sigma_\nu} - \frac{\tau^2}{2\sigma_\nu^2} + o(\sigma_\nu^{-2}), \quad \gamma_\nu^2(\tau) = -\frac{\tau^2}{\sigma_\nu^2} + o(\sigma_\nu^{-2}),$$

получим выражение

$$\varphi_\nu(\tau) \sim \exp\left(\omega\tau\frac{\nu\sqrt{1 + 2a/b} - m_\nu}{\sigma_\nu} - \left(1 - \frac{a}{b(2a + b)}\right)\sqrt{1 + \frac{2a}{b}}\frac{\nu\tau^2}{2\sigma_\nu^2}\right). \quad (46)$$

Заметим (см. формулу (42)), что

$$m_\nu - \nu\sqrt{1 + \frac{2a}{b}} = \frac{a}{2b(2a + b)} + o(1),$$

откуда следует, что первое слагаемое под знаком экспоненты в выражении (46) стремится к нулю. Далее, используя асимптотику для  $\sigma_\nu^2$  в утверждении 3, при  $\nu \rightarrow \infty$  получаем окончательно

$$\varphi_\nu(\tau) \sim \exp\left(-\left(1 - \frac{a}{b(2a + b)}\right)\sqrt{1 + \frac{2a}{b}}\frac{\nu\tau^2}{2\sigma_\nu^2}\right) \sim e^{-\tau^2/2}.$$

Теорема доказана.

**Заключение.** Применение аналитических методов позволило исследовать асимптотические свойства стационарного распределения для процессов со схемами вида  $0 \rightarrow k_0T$ ,  $2T \rightarrow k_2T$ . Доказательства предельных теорем следуют из интегральных представлений решений уравнения Колмогорова. Предложенные в работе методы обобщаются для процессов со схемами вида  $0 \rightarrow k_0T$ ,  $T \rightarrow k_1T$ ,  $2T \rightarrow k_2T$ . Переход  $T \rightarrow 2T$  характерен для автокаталитической химической реакции, а переход  $2T \rightarrow 3T$  учитывает возможность размножения в

популяции индивидуумов [18]. Факт асимптотической нормальности стационарного распределения является новым для рассматриваемого класса стохастических моделей систем с взаимодействием частиц.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э м а н у э ль Н. М., К н о р р е Д. Г. Курс химической кинетики. – М.: Высшая школа, 1974. – 400 с.
2. Л е о н т о в и ч М. А. Основные уравнения кинетической теории газов с точки зрения теории случайных процессов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1935. – Т. 5. – Вып. 3. – С. 211–230.
3. М о р о з о в А. Н. Необратимые процессы и броуновское движение. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 332 с.
4. С е в а с т ѿ н о в Б. А. Ветвящиеся процессы. – М.: Наука, 1971. – 436 с.
5. Н и к о л и с Г., П р и г о ж и н И. Самоорганизация в неравновесных системах. – М.: Мир, 1979. – 512 с.
6. Б о ч а р о в П. П., П е ч и н к и н А. В. Теория массового обслуживания. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
7. Б а з ы к и н А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. – М.: Наука, 1985. – 182 с.
8. Л а н г е А. М. Об одном ветвящемся процессе с иммиграцией и взаимодействием частиц // Обозрение прикладной и промышленной математики. Сер. “Вероятность и статистика”. – 2001. – Т. 8. – Вып. 2. – С. 783–784.
9. С е в а с т ѿ н о в Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
10. Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
11. К а л и н к и н А. В. Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57. – Вып. 2. – С. 23–84.
12. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. – М.: Наука, 1973. – 296 с.
13. Р и е к с т и нь ш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Т. 2. – Рига: Зинатне, 1977. – 464 с.
14. О л в е р Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. – М.: Наука, 1978. – 376 с.
15. К а м к е Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
16. К а л и н к и н А. В. Стационарное распределение системы взаимодействующих частиц с дискретными состояниями // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 268. – Вып. 6. – С. 1362–1364.
17. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1974. – 296 с.
18. В а н К а м п е н Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии. – М.: Высшая школа, 1990. – 376 с.

Статья поступила в редакцию 18.05.2004