



МГТУ имени Н.Э. Баумана

Кафедра ИУ-1 «Системы автоматического управления»

Методы вычислений

Численные методы интерполяции функций



Андрей Леонидович Масленников
amas@bmstu.ru

2023 г.

Интерполяция — это вычисление промежуточных значений функции $f(x)$ на сетке значений аргумента x для заданного дискретного набора $\{y, f(y)\}$ значений этой функции, где $x \in [a, b]$ и $y \in [a, b]$, а интервал $[a, b]$ определён как $[\min(y), \max(y)]$.

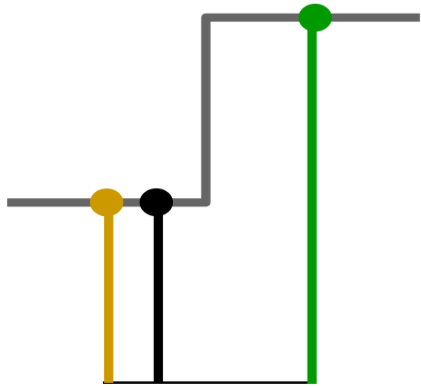
Экстраполяция — это вычисление промежуточных значений функции $f(x)$ на сетке значений аргумента x для заданного дискретного набора $\{y, f(y)\}$ значений этой функции, где $x \notin [a, b]$ и $y \in [a, b]$, а интервал $[a, b]$ определён как $[\min(y), \max(y)]$.

Виды методов интерполяции:

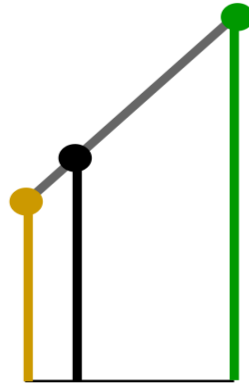
- интерполяция методом ближайшего соседа;
- полиномиальная интерполяция:
 - линейная интерполяция;
 - интерполяция полиномом Лагранжа;
 - интерполяция полиномом Ньютона вперед;
 - интерполяция полиномом Ньютона назад;
 - интерполяция кубическими сплайнами;
- интерполяция функции нескольких переменных:
 - билинейная интерполяция;
 - бикубическая интерполяция.
- рациональная интерполяция.

Численные методы интерполяции функций

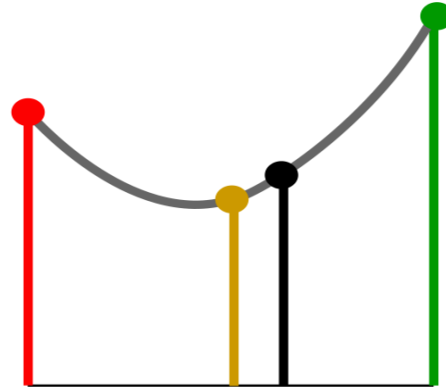
Виды численных методов интерполяции



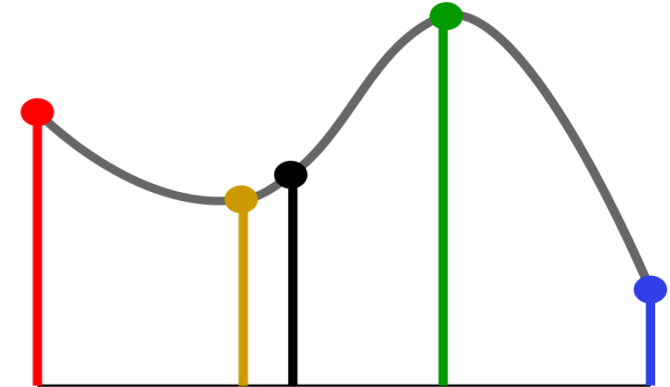
Одномерная по
ближайшему
соседу



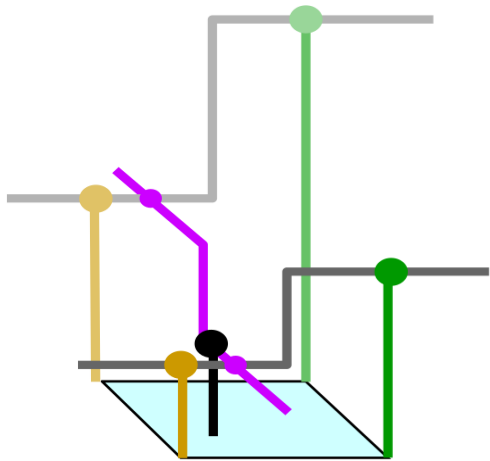
Линейная



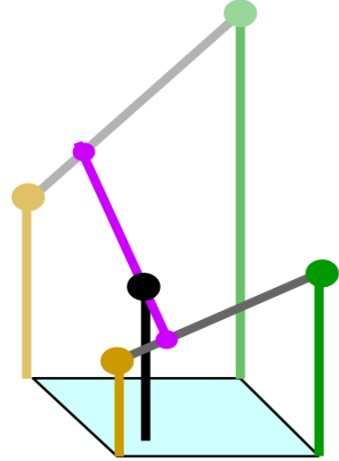
Квадратичная



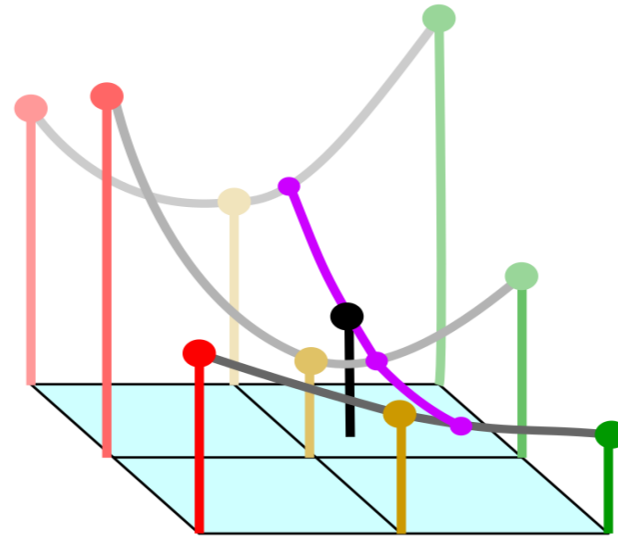
Кубическая



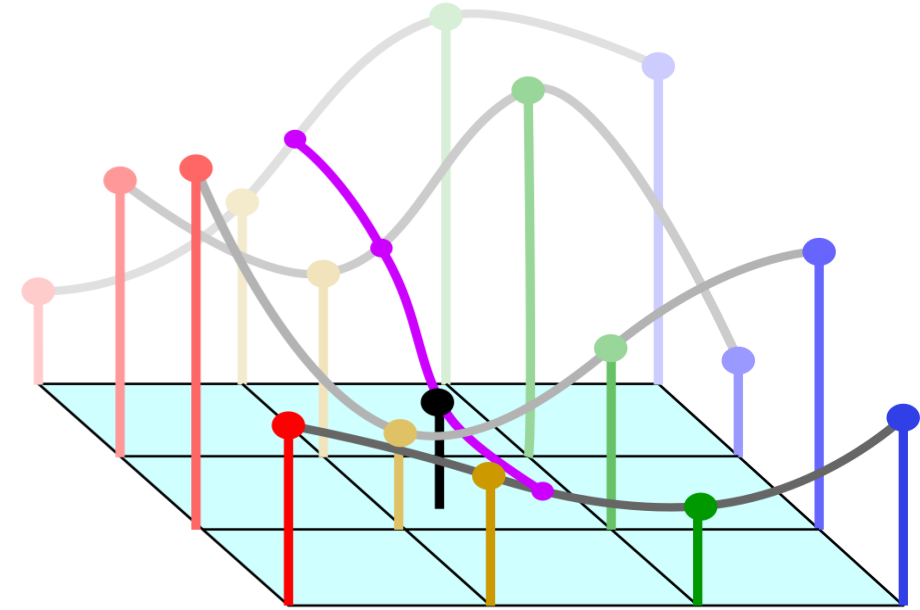
Двумерная по
ближайшему
соседу



Билинейная



Биквадратная



Бикубическая

Алгоритм метода

Для каждого x интерполяционной сетки

$$\Delta_1 = |x - y_k|$$

$$\Delta_2 = |x - y_{k+1}|$$

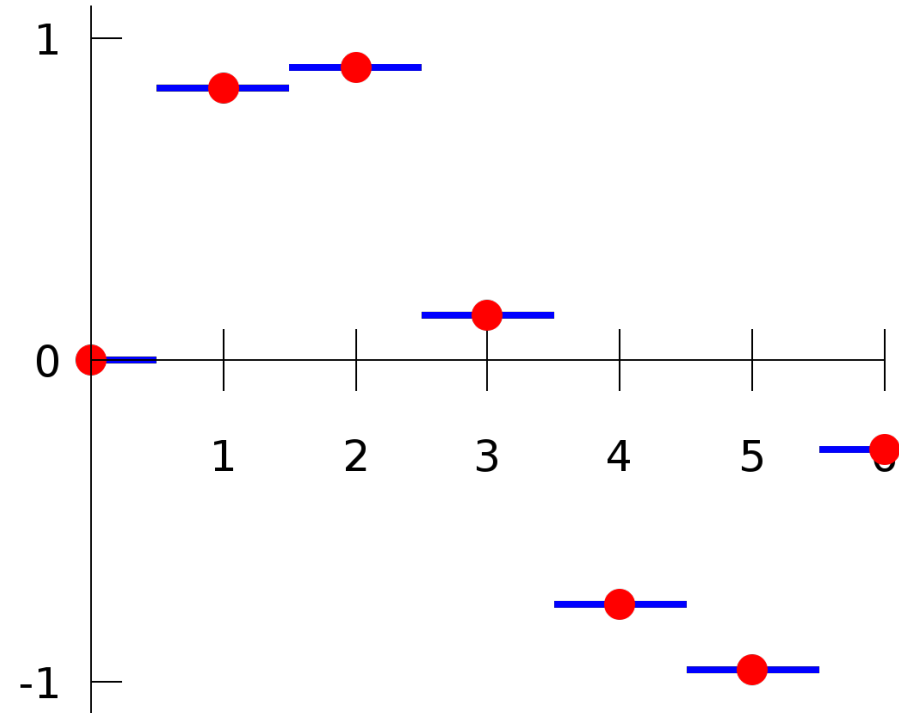
Присваиваем значение функции

$$f(x) = f(y_k)$$

и на каждом шаге проверяем условие $\Delta_2 \leq \Delta_1$
если оно выполняется, то

$$k = k + 1$$

где k — номер узла интерполяционной сетки



Алгоритм метода

Для каждого x интерполяционной сетки вычисляем значение функции

$$f(x) \approx f(y_k) + \frac{f(y_{k+1}) - f(y_k)}{y_{k+1} - y_k} (x - y_k)$$

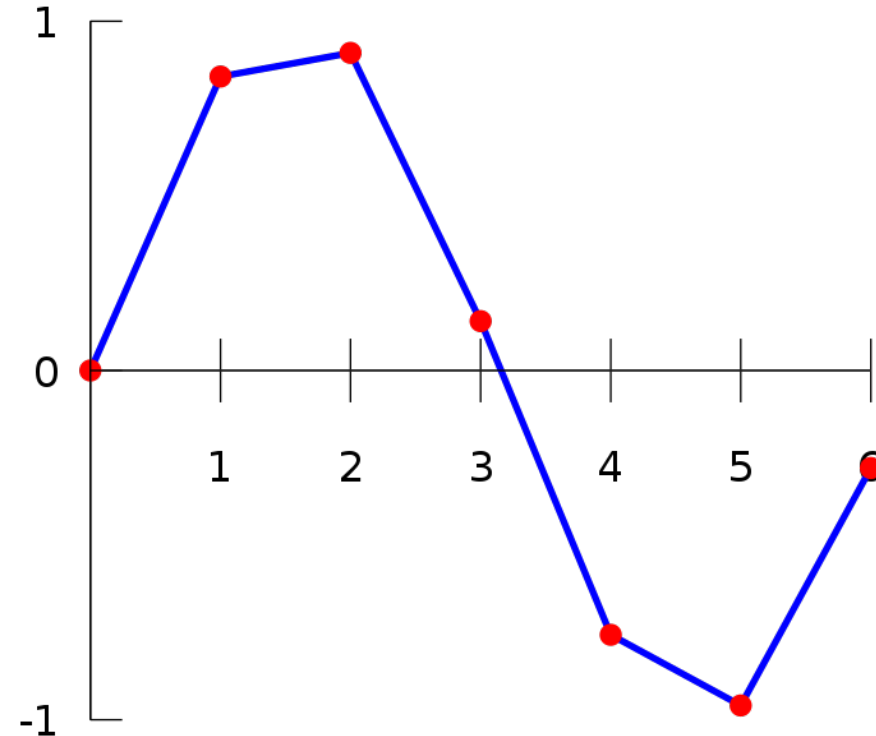
и на каждом шаге проверяем условие $x \geq y_{k+1}$ если оно выполняется, то

$$k = k + 1$$

где k — номер узла интерполяционной сетки.

Формула получена на основе пропорции

$$\frac{f(x) - f(y_k)}{f(y_{k+1}) - f(y_k)} = \frac{x - y_k}{y_{k+1} - y_k}$$



Алгоритм метода

Для каждого x интерполяционной сетки
вычисляем значение функции

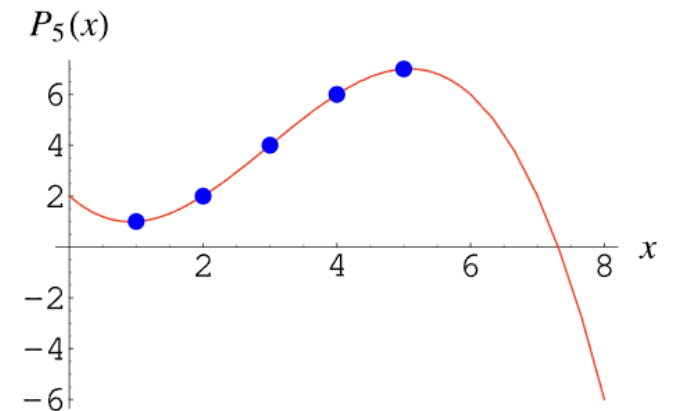
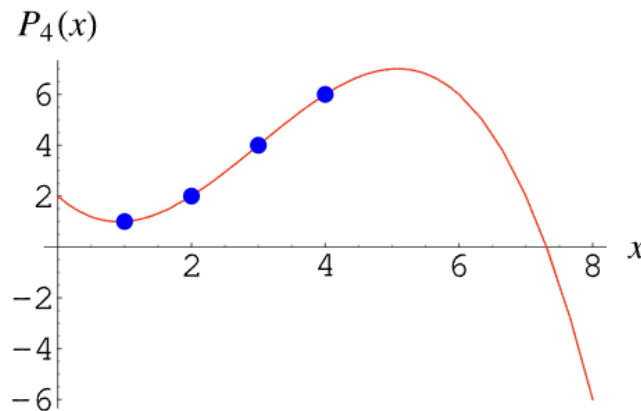
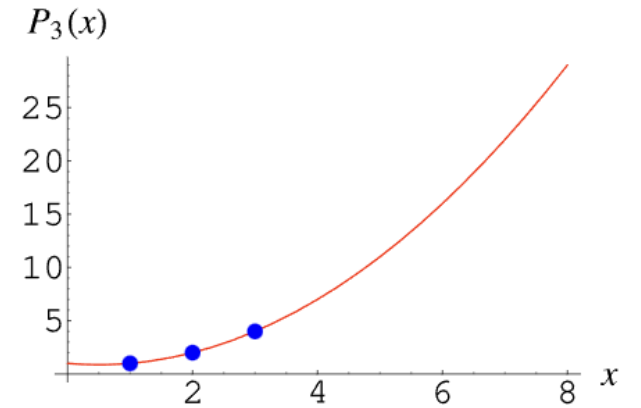
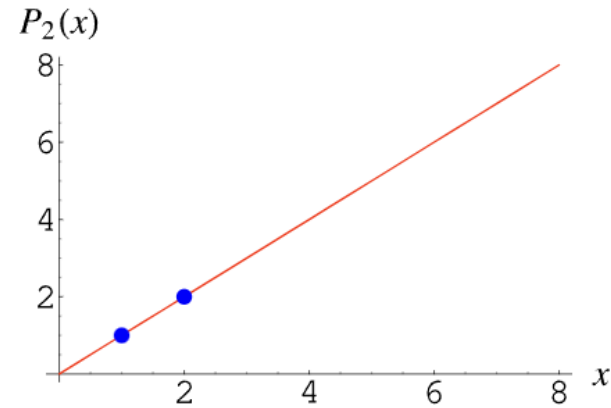
$$f(x) = L(x)$$

где $L(x)$ — полином Лагранжа порядка n

$$L(x) = \sum_{k=0}^n f(y_k) l_k(x)$$

где $l_k(x)$ — базисный полином

$$l_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - y_i}{y_k - y_i}$$

**Теорема о единственности полинома Лагранжа.**

Функция $f(x)$ на интервале $[a, b]$, состоящая из $n + 1$ точек дискретного набора $\{y, f(y)\}$ аппроксимируется единственным полиномом Лагранжа порядка не выше n .

Пусть задана таблично функция $f(x) = x^2$

k	0	1	2
y	1	2	3
$f(y)$	1	4	9

Полином Лагранжа второго порядка

$$L(x) = 1 \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 4 \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 9 \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = x^2$$

В результате получим точную аппроксимацию

Пусть задана таблично функция $f(x) = x^3$

k	0	1	2
y	1	2	3
$f(y)$	1	8	27

Полином Лагранжа второго порядка

$$L(x) = 1 \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 8 \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 27 \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = 6x^2 - 11x + 6 \neq x^3$$

В результате получим аппроксимацию с ошибкой, причиной этого, в данном случае, является недостаточность исходного дискретного набора данных

Пусть задана таблично функция $f(x) = \tan(x)$

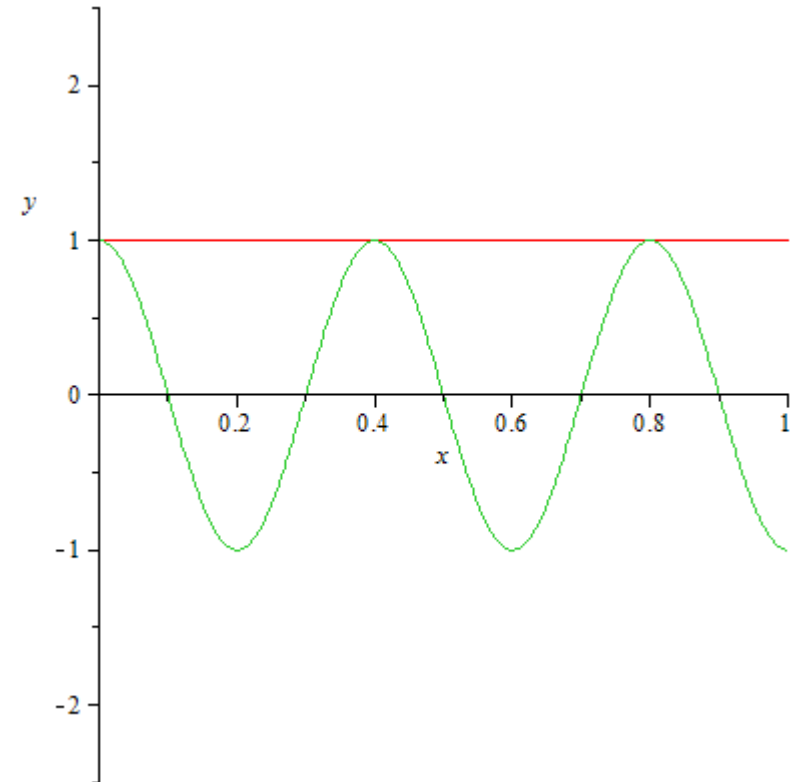
k	0	1	2	3	4
y	-1.5	-0.75	0	0.75	1.5
$f(y)$	-14.1	-0.93	0	0.93	14.1

Полином Лагранжа 5-го порядка

$$\begin{aligned}
 243L(x) &= f(x_0)x(2x-3)(4x-3)(4x+3) \\
 &\quad - 8f(x_1)x(2x-3)(2x+3)(4x-3) \\
 &\quad + 3f(x_2)(2x+3)(4x+3)(4x-3)(2x-3) \\
 &\quad - 8f(x_3)x(2x-3)(2x+3)(4x+3) \\
 &\quad + f(x_4)x(2x+3)(4x-3)(4x+3) \\
 &= 4.834848x^3 - 1.477474x
 \end{aligned}$$

Точная аппроксимация для не полиномиальной функции недостижима.

Пример интерполяции функции $f(x) = \cos(5\pi x)$



Алгоритм метода

Для каждого x интерполяционной сетки
вычисляем значение функции

$$f(x) = P(x)$$

где $P(x)$ — полином Ньютона порядка n , который может быть рассчитан как
по формуле «вперед»

$$P(x) = f_0 + q\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots +$$

$$+ \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

$$f_k = f(y_k)$$

$$h = y_1 - y_0$$

$$q = \frac{x - y_0}{h}$$

конечные прямые разности
1, 2 и n -го порядка

$$\Delta f_k, \Delta^2 f_k, \dots, \Delta^n f_k$$

и по формуле «назад»

$$P(x) = f_n + q\nabla f_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\nabla^2 f_{n-2} + \dots +$$

$$+ \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\nabla^n f_0$$

$$f_k = f(y_k)$$

$$h = y_n - y_{n-1}$$

$$q = \frac{x - y_n}{h}$$

конечные обратные разности
1, 2 и n -го порядка

$$\nabla f_k, \nabla^2 f_k, \dots, \nabla^n f_k$$

Формула Ньютона (вперед) при $n = 1$

$$P(x) = f_0 + q\Delta f_0$$

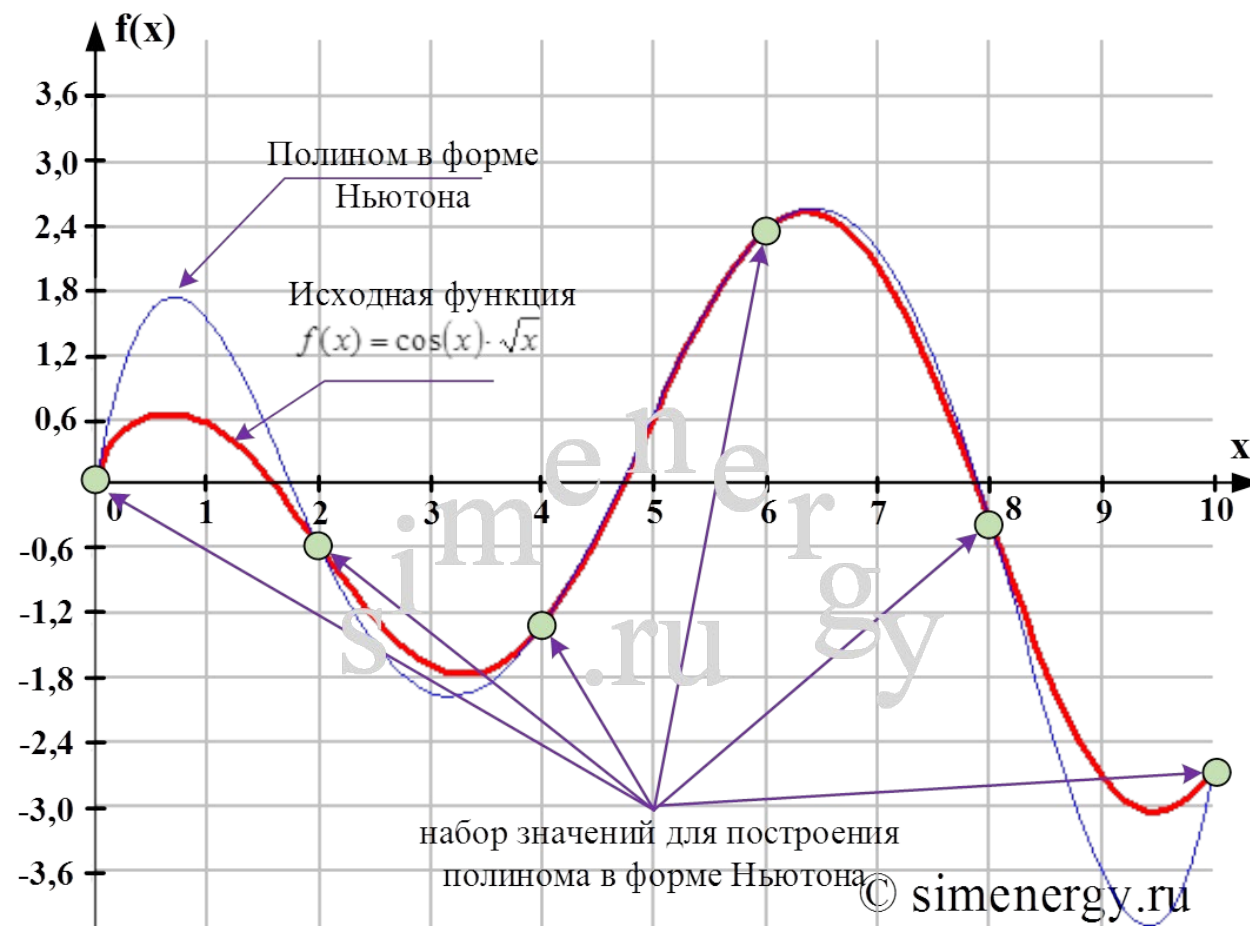
Формула Ньютона (вперед) при $n = 2$

$$P(x) = f_0 + q\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 f_0$$

Формула Ньютона (вперед) при $n = 3$

$$P(x) = f_0 + q\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

В отличие от интерполяции полиномом Лагранжа, при использовании полинома Ньютона порядок полинома n может быть любым и при добавлении новых точек данных не требуется перерасчет всей задачи



Прямые конечные разности

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$$

$$\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k$$

$$\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k$$

$$= \sum_{v=0}^n (-1)^v C_n^v f_{k+n-v}$$

Обратные конечные разности

$$\nabla f_k = f_k - f_{k-1}$$

$$\nabla^2 f_k = \nabla f_k - \nabla f_{k-1} = f_k - 2f_{k-1} + f_{k-2}$$

$$\nabla^n f_k = \nabla^{n-1} f_k - \nabla^{n-1} f_{k-1}$$

$$= \sum_{v=0}^n (-1)^v C_n^v f_{k-v}$$

$$C_n^v = \frac{n!}{v!(n-v)!}$$

Пример расчета прямых конечных разностей

$$f(x) = x^4 + x^2 + 1.77$$

$$y_0 = 0.385$$

$$h = 0.2$$

$$k = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$x = 0.885$$

k	y_k	f_k	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$
0	0.385	1.94	0.29	0.25	0.12
1	0.585	2.23	0.54	0.37	—
2	0.785	2.77	0.91	—	—
3	0.985	3.68	—	—	—

Исходные данные

$$f(x) = x^4 + x^2 + 1.77$$

$$y_0 = 0.385$$

$$h = 0.2$$

$$k = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$x = 0.885$$

k	y_k	f_k	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$
0	0.385	1.94	0.29	0.25	0.12
1	0.585	2.23	0.54	0.37	—
2	0.785	2.77	0.91	—	—
3	0.985	3.68	—	—	—

Интерполяция полиномом Ньютона—вперед

$$q = \frac{0.885 - 0.385}{0.2} = 2.5$$

$$P(x = 0.885) = 1.94 + 2.5 \cdot 0.29 + \frac{2.5(2.5-1)}{2!} 0.25 + \frac{2.5(2.5-1)(2.5-1)-1}{3!} 0.12 = 3.1713$$

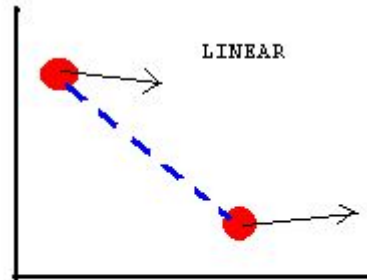
Интерполяция полиномом Ньютона—назад

$$q = \frac{0.885 - 0.985}{0.2} = -0.5$$

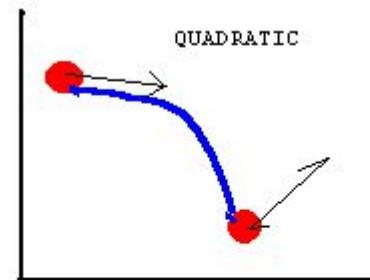
$$P(x = 0.885) = 3.68 + (-0.5)0.91 + \frac{(-0.5)(-0.5+1)}{2!} 0.37 + \frac{(-0.5)(-0.5+1)(-0.5+1+1)}{3!} 0.12 = 3.1713$$

Интерполяция скалярных функций функции

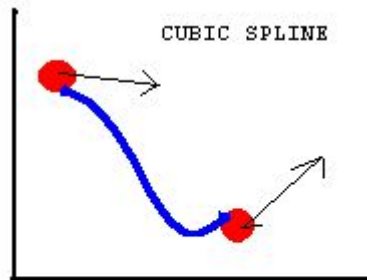
Интерполяция кубическими сплайнами



The path is unrealistic considering the initial velocity vector.



The path doesn't account for the final velocity.



Notice that the path accounts for initial and final velocities.

Условия для кубических сплайнов

- условия Лагранжа

$$s_k(y_{k-1}) = f(y_{k-1})$$

$$s_k(y_k) = f(y_k)$$

- условия непрерывности:

$$s_k^{(1)}(y_k) = s_{k+1}^{(1)}(y_k)$$

$$s_k^{(2)}(y_k) = s_{k+1}^{(2)}(y_k)$$

- условия естественности

$$s_k^{(2)}(y_0) = 0$$

$$s_n^{(2)}(y_n) = 0$$

Алгоритм метода

Для каждого k -ого интервала $[x_{k-1}, x_k]$ вычисляем коэффициенты $\{a_k, b_k, c_k, d_k\}$ сплайна $s_k(x)$

$$s_k(x) = a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3$$

$$h_k = x_k - x_{k-1}$$

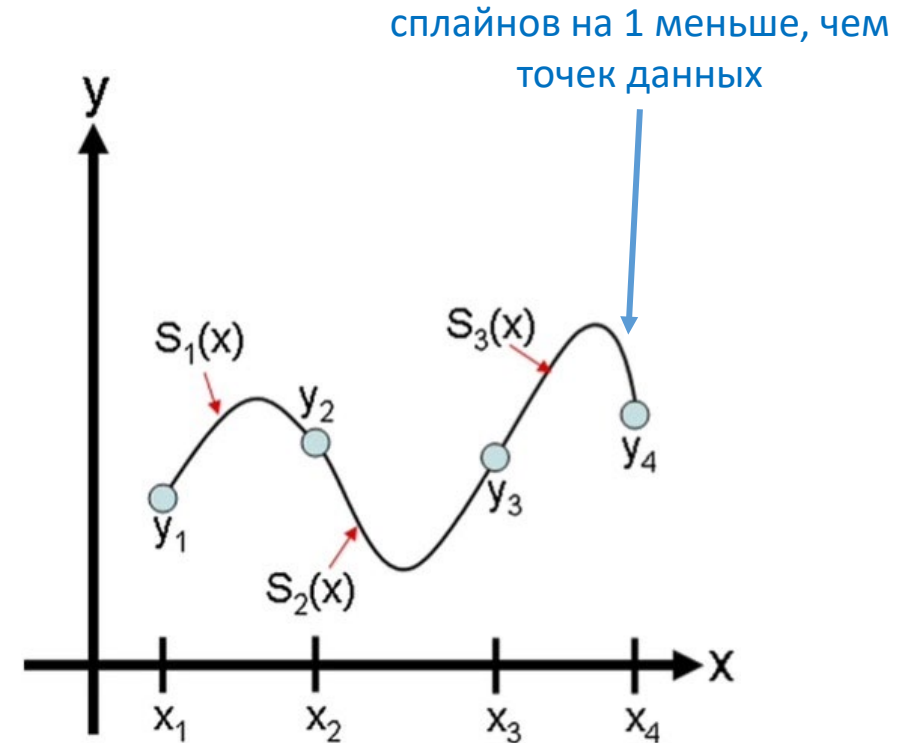
затем для каждого x интерполяционной сетки вычисляем значение функции

$$f(x) = s_k(x) = a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3$$

$$h_k = x - x_{k-1}$$

и на каждом шаге проверяем условие $x \geq x_k$ если оно выполняется, то переходим к следующему сплайну

$$k = k + 1$$

**Теорема Шенберга—Уитни.**

Для $\forall f(x)$ и \forall разбиения интервала $[a, b]$ существует единственный естественный сплайн $s(x)$, который на каждом участке $[x_{k-1}, x_k]$ является полиномом порядка ≤ 3 .

Инициализируем начальные значения

$$c_1 = c_{n+1} = K_1 = L_1 = 0$$

1. Итерационно для k интервалов вычисляем

$$h_k = x_k - x_{k-1}$$

$$h_{k-1} = x_{k-1} - x_{k-2}$$

$$F_k = 3 \left(\frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} - \frac{y_{k-1} - y_{k-2}}{h_{k-1}} \right)$$

$$V_k = 2(h_k + h_{k-1})$$

$$K_k = \frac{F_k - h_{k-1}K_{k-1}}{V_k - h_{k-1}L_{k-1}}$$

$$L_k = \frac{h_k}{V_k - h_{k-1}L_{k-1}}$$

2. Итерационно с n до 2 включительно

$$c_k = K_k - L_k c_{k+1}$$

3. Вычисляем остальные коэффициенты с 1 до n до

$$d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}$$

$$b_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} - c_k h_k - d_k h_k^2$$

$$a_k = y_{k-1}$$

Индексация сплайнов начинается с 1, а точек данных (значений функций и узлов) с 0

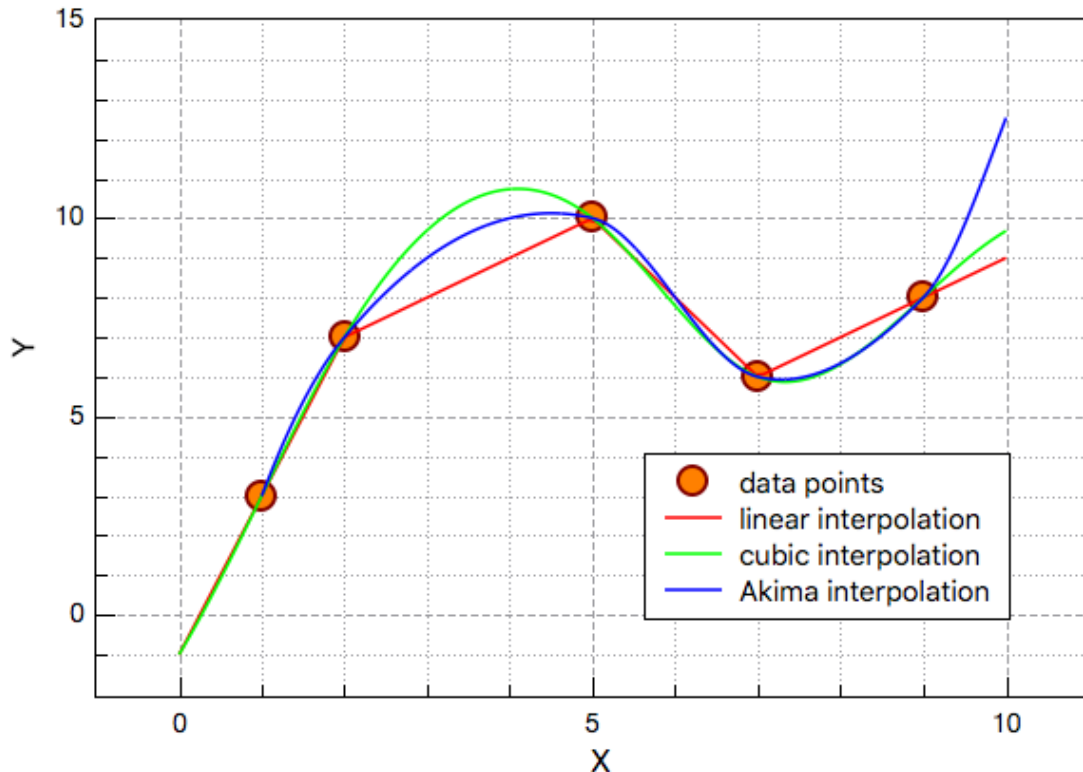
Сплайн Акимы

$$P_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

для которого должны выполняться условия

$$P(x_i) = y_i \quad P'(x_i) = s_i$$

$$P(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad P'(x_{i+1}) = s_{i+1}$$



Алгоритм метода

Для каждого k -ого интервала $[x_{k-1}, x_k]$ вычисляем наклон кривой

$$m_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

затем вычисляем наклон сплайна

$$s_i = \frac{|m_{i+1} - m_i| m_{i-1} + |m_{i-1} - m_{i-2}| m_i}{|m_{i+1} - m_i| + |m_{i-1} - m_{i-2}|} \quad s_i = \frac{m_{i-1} + m_i}{2}$$

$=0$

для граничных точек

$$s_1 = m_1 \quad s_{n-1} = \frac{m_{n-2} + m_{n-1}}{2}$$

$$s_2 = \frac{m_1 + m_2}{2} \quad s_n = m_{n-1}$$

затем определяемы коэффициенты сплайна

$$a_i = y_i \quad b_i = s_i$$

$$c_i = \frac{3m_i - 2s_i - s_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \quad d_i = \frac{s_i + s_{i+1} - 2m_i}{(x_{i+1} - x_i)^2}$$

Алгоритм метода

Для каждого узла с координатами y_1 и y_2 линейно интерполируем в точках R_1 и R_2 по x

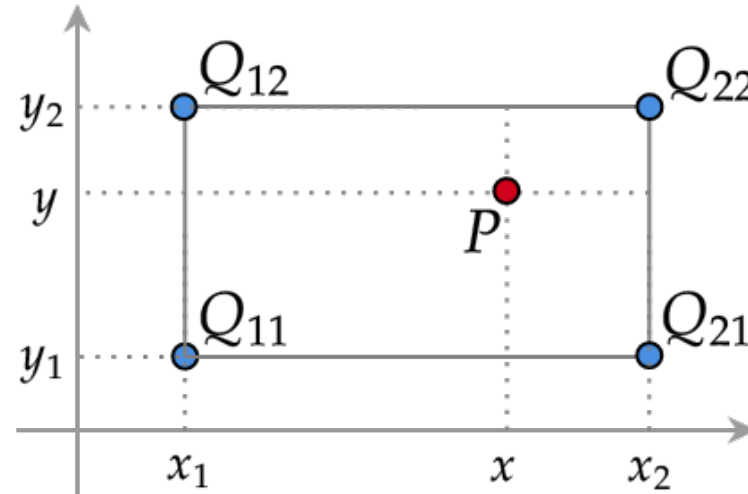
$$f(R_1) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} f(Q_{11}) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(Q_{21}),$$

$$f(R_2) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} f(Q_{12}) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(Q_{22})$$

по полученным значениям функции в точках R_1 и R_2 интерполируем в точке P с координатами $\{x, y\}$

$$f(P) = \frac{y_{j+1} - y}{y_{j+1} - y_j} f(R_1) + \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} f(R_2),$$

Затем переходим к следующему квадрату (следующему набору узлов), т.е. увеличиваем i и j (порядок прохождения узлов — произвольный)



$$\begin{aligned} Q_{11} &= (x_i, y_j) \\ Q_{12} &= (x_i, y_{j+1}) \\ Q_{21} &= (x_{i+1}, y_j) \\ Q_{22} &= (x_{i+1}, y_{j+1}) \\ R_1 &= (x, y_j) \\ R_2 &= (x, y_{j+1}) \\ P &= (x, y) \end{aligned}$$

Сначала интерполируем по x ,
затем по y , но можно и наоборот

Функция описывается полиномом вида

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j$$

нужно определить 16 коэффициентов a_{ij} по заданным 16 значениям функции

для этого формируем СЛАУ и решаем

$$\mathbf{M}\mathbf{a}^T = \boldsymbol{\gamma}^T$$

Для случая, когда узлы выходят за область $[0, 1]$

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} \bar{x}^i \bar{y}^j$$

$$\bar{x} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$\bar{y} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

где вектор коэффициентов

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{02} & a_{03} & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

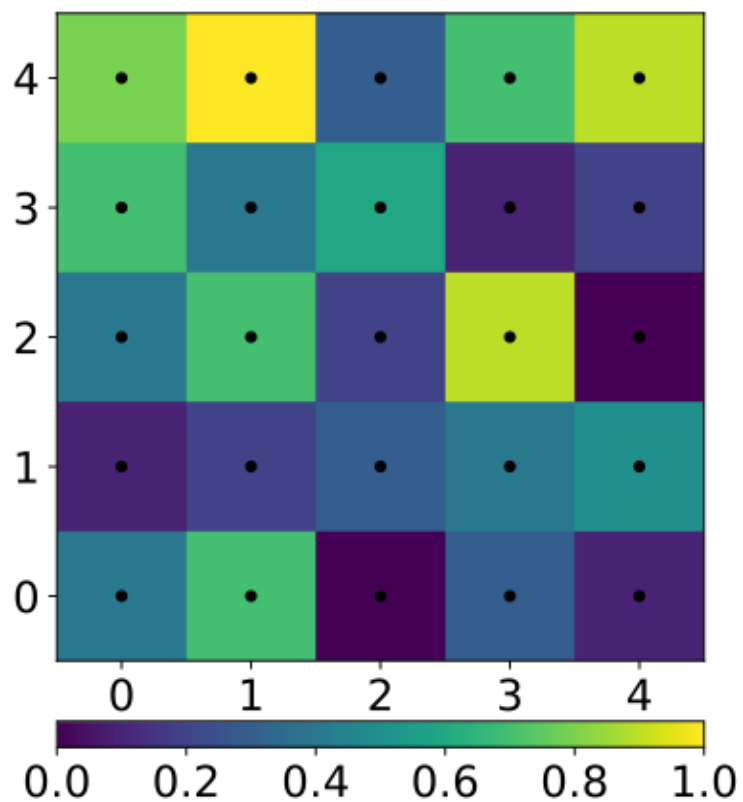
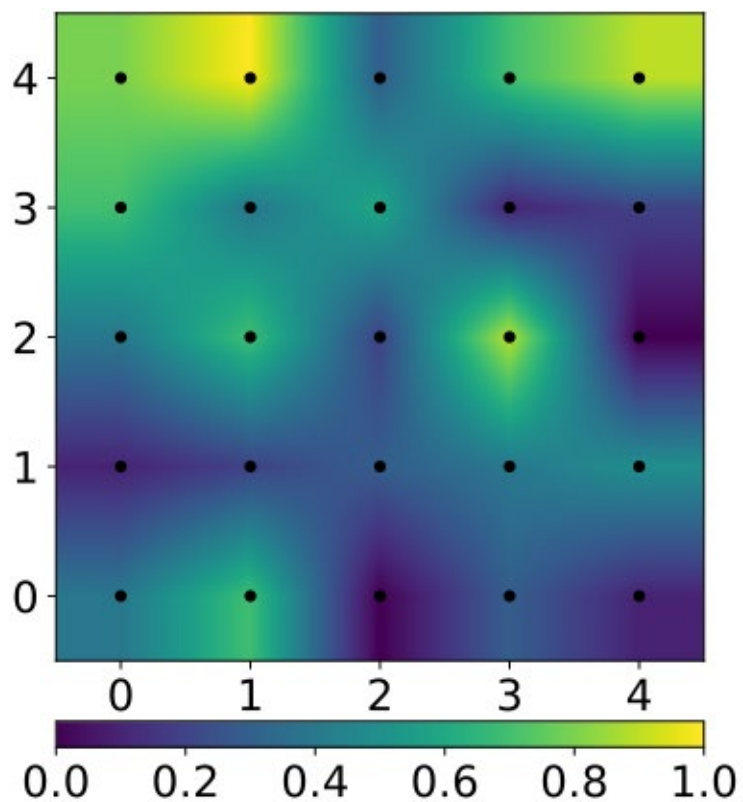
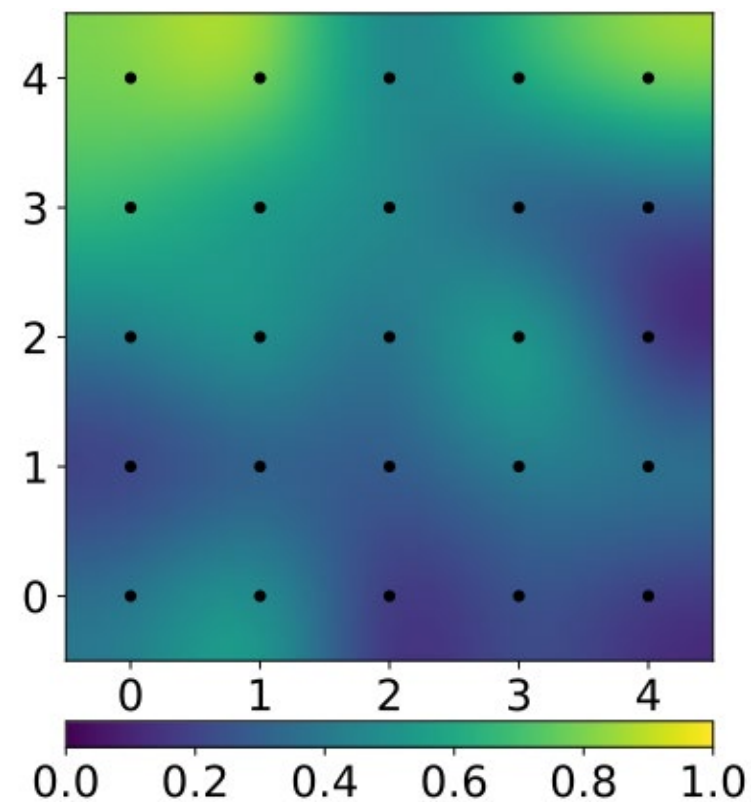
вектор значений функции

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} f(-1, -1) & f(0, -1) & f(1, -1) & f(2, -1) & f(-1, 0) & f(0, 0) \\ f(1, 0) & f(2, 0) & f(-1, 1) & f(0, 1) & f(1, 1) \\ f(2, 1) & f(-1, 2) & f(0, 2) & f(1, 2) & f(2, 2) \end{bmatrix}$$

Решение

$$\mathbf{a}^T = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -18 & 36 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -12 & 2 & 6 & 9 & -18 & 3 & -12 & -18 & 36 & -6 & 2 & 3 & -6 & 1 \\ -6 & -9 & 18 & -3 & 12 & 18 & -36 & 6 & -6 & -9 & 18 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 1 & -6 & -9 & 18 & -3 & 6 & 9 & -18 & 3 & -2 & -3 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -36 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 12 & 6 & 0 & -9 & 18 & -9 & 0 & 18 & -36 & 18 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 \\ 9 & -18 & 9 & 0 & -18 & 36 & -18 & 0 & 9 & -18 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 & 9 & -18 & 9 & 0 & -9 & 18 & -9 & 0 & 3 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 18 & -18 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 6 & -2 & 3 & -9 & 9 & -3 & -6 & 18 & -18 & 6 & 1 & -3 & 3 & -1 \\ -3 & 9 & -9 & 3 & 6 & -18 & 18 & -6 & -3 & 9 & -9 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & -1 & -3 & 9 & -9 & 3 & 3 & -9 & 9 & -3 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}^T$$

метод ближайшего соседа

метод билинейной
интерполяцииметод бикубической
интерполяции

$$f(x, y) = b_1 f(0, 0) + b_2 f(0, 1) + b_3 f(1, 0) + b_4 f(1, 1) + b_5 f(0, -1) + b_6 f(-1, 0) + b_7 f(1, -1) + b_8 f(-1, 1) + \\ + b_9 f(0, 2) + b_{10} f(2, 0) + b_{11} f(-1, -1) + b_{12} f(1, 2) + b_{13} f(2, 1) + b_{14} f(-1, 2) + b_{15} f(2, -1) + b_{16} f(2, 2)$$

$$b_1 = \frac{1}{4}(x-1)(x-2)(x+1)(y-1)(y-2)(y+1) \quad b_9 = \frac{1}{12}x(x-1)(x+1)(y-1)(y-2)(y+1)$$

$$b_2 = -\frac{1}{4}x(x+1)(x-2)(y-1)(y-2)(y+1) \quad b_{10} = \frac{1}{12}y(x-1)(x-2)(x+1)(y-1)(y+1)$$

$$b_3 = -\frac{1}{4}y(x-1)(x-2)(x+1)(y+1)(y-2) \quad b_{11} = \frac{1}{36}xy(x-1)(x-2)(y-1)(y-2)$$

$$b_4 = \frac{1}{4}xy(x+1)(x-2)(y+1)(y-2) \quad b_{12} = -\frac{1}{12}xy(x-1)(x+1)(y+1)(y-2)$$

$$b_5 = -\frac{1}{12}x(x-1)(x-2)(y-1)(y-2)(y+1) \quad b_{13} = -\frac{1}{12}xy(x+1)(x-2)(y-1)(y+1)$$

$$b_6 = -\frac{1}{12}y(x-1)(x-2)(x+1)(y-1)(y-2) \quad b_{14} = -\frac{1}{36}xy(x-1)(x+1)(y-1)(y-2)$$

$$b_7 = \frac{1}{12}xy(x-1)(x-2)(y+1)(y-2) \quad b_{15} = -\frac{1}{36}xy(x-1)(x-2)(y-1)(y+1)$$

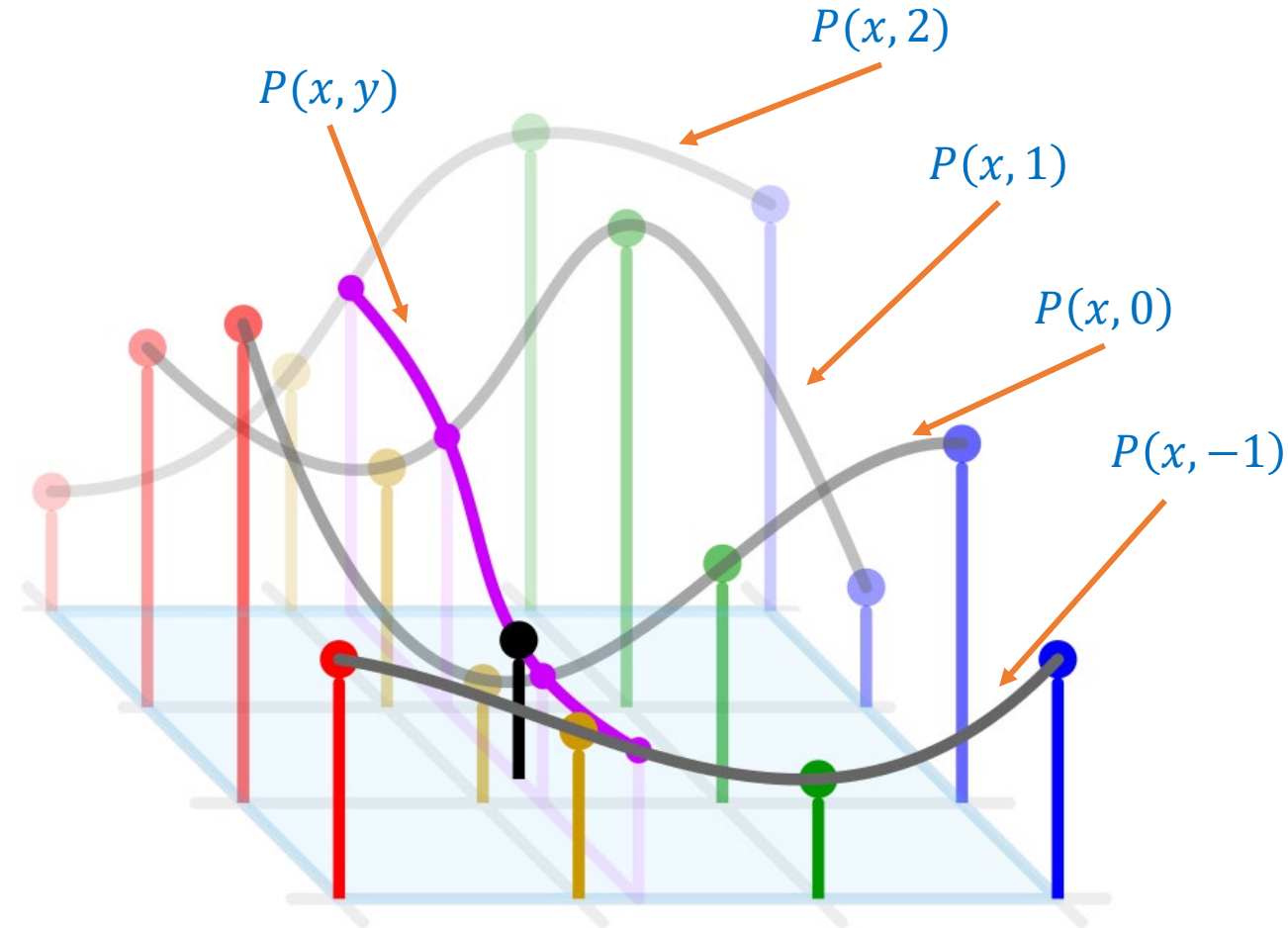
$$b_8 = \frac{1}{12}xy(x+1)(x-2)(y-1)(y-2) \quad b_{16} = \frac{1}{36}xy(x-1)(x+1)(y-1)(y+1)$$

Функция $f(x)$ с известными $f(-1), f(0), f(1), f(2)$ описывается кубическим сплайном

$$P(x) = \sum_{i=0}^3 b_i x^i = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \frac{1}{3} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & -1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} f(-1) \\ f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{bmatrix}$$

Рассчитываем $P(x, -1), P(x, 0), P(x, 1), P(x, 2)$ для фиксированного x

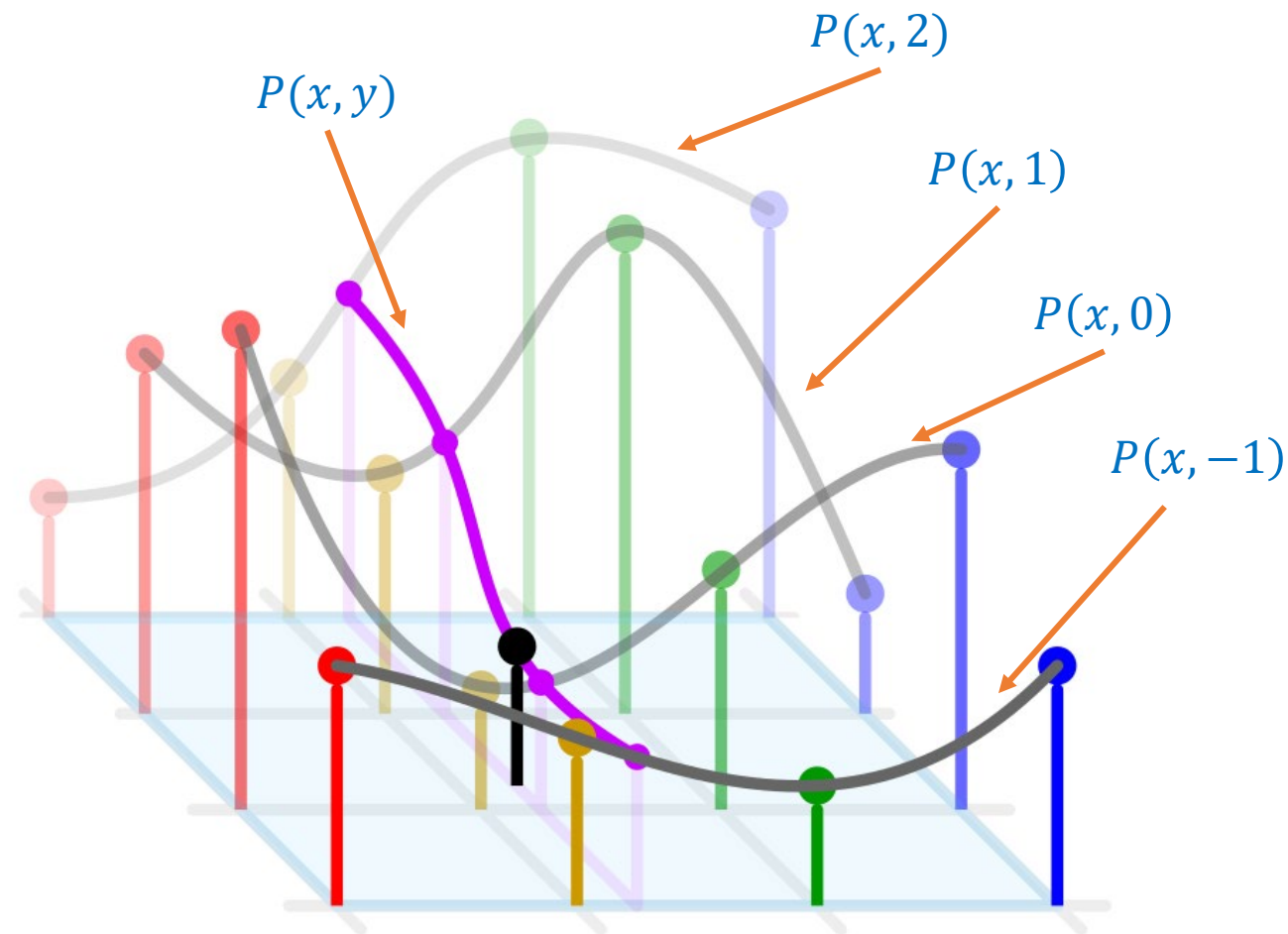


Интерполяция идет как в билинейной, сначала по одной координате, потом по другой

Рассчитываем значение $P(x, y)$ в заданной y

$$P(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & y & y^2 & y^3 \end{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{F} \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(-1, -1) & f(-1, 0) & f(-1, 1) & f(-1, 2) \\ f(0, -1) & f(0, 0) & f(0, 1) & f(0, 2) \\ f(1, -1) & f(1, 0) & f(1, 1) & f(1, 2) \\ f(2, -1) & f(2, 0) & f(2, 1) & f(2, 2) \end{bmatrix}$$



Подход обеспечивает непрерывность самой функции и её вторых производных на границе ячеек, но не обеспечивает непрерывности первой производной

Для непрерывности первой производной коэффициенты сплайна будут иметь вид:

$$P(x) = \sum_{i=0}^3 b_i x^i = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{-1}} \begin{bmatrix} f(-1) \\ f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$