



Московский государственный технический университет
Кафедра “Системы автоматического управления”



Моделирование систем управления

Андрей Леонидович Масленников



Вычисленные методы.

Амосов А.А., Дубинский Ю.А. Копченова Н.В.

И.: Лань, 2014, 672 с.



Введение в математическое моделирование.

Ашихмин В.Н., Гитван М.Б., Кэллер И.Э. и др.

И.: Логос, 2005, 407 с.



Численные методы.

Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.

И.: Бином. Лаборатория знаний, 2017, 640 с.



Управление в технических системах.

Деменков Н.П., Микрин Е.А.

И.: МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2017, 456 с.

-  Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры.
Самарский А.А., Михайлов А.П.
2-е издание. И.: Физматлит, 2006, 840 с.
-  Имитационное моделирование.
Строгалева В.П., Толкачева И.О.
2-е издание. И.: МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2015, 295 с.
-  Системы управления обратной связью.
Филлипс Ч.Л., Харбор Р.Д.
4-е издание. И.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001, 616 с.
-  Digital control system analysis and design.
Phillips C.L., Nagle H.T.
3th Edition. Prentice Hall Press, 1995, 685 p.

1. Моделирование как метод научного познания	4
1.1. Моделирование	5
1.2. Модели	18
2. Математическое моделирование непрерывных систем	29
3. Численные методы решения задачи Коши	69
4. Математическое моделирование дискретных систем	102
5. Имитационное моделирование	146

Моделирование

Метод научного познания, используемый для исследования сложных систем (объектов, процессов). Моделирование заключается в замене реально существующей или проектируемой сложной системы моделью, свойства, характеристики и поведение которой исследуется. Получаемые результаты принимаются характерными для исходной сложной системы.

Задача моделирования

Задача моделирования заключается в создании (построении через процедуру формализации) модели сложной системы с последующим построением и проведением эксперимента над моделью и анализом результатов.

- проектирование сложных систем;
(в качестве предварительного анализа работы будущей системы)
- в процессе эксплуатации сложных систем:
 - для контроля и тестирования;
(работа системы сравнивается с работой модели)
 - непосредственное участие;
(например, тренажеры подготовки летного состава)
- тестирование / экспериментирование;
(проведение научных экспериментов)
- поиск причины неисправности, поломки.
(моделируется критическая ситуация, вызвавшая поломку)

По характеру процессов, протекающих в системе:

- детерминированное / стохастическое;
- статическое / динамическое;
- непрерывное / дискретное / дискретно-непрерывное.

По используемому объекту моделирования:

- реальное;
(используется реальная физическая система, объект или процесс)
- мысленное.
(используется модель)

Детерминированное / стохастическое

Детерминированное моделирование предполагает исключительно наличие детерминированных процессов, протекающих в системе. При наличии любых случайных (стохастических) процессов или механизмов в работе системы, моделирование - стохастическое.

Статическое / динамическое

Статическое моделирование служит для описания системы в определенный момент времени, в то время как динамическое моделирование отражает поведение (изменение, динамику) системы во времени.

Непрерывное / дискретное / дискретно-непрерывное

Виды моделирования, которые зависят от характера изменения функции времени, что также касается исследуемой системы.

Реальное моделирование

Исследование физически существующей системы (объекта, процесса) или ее части, как правило, в специальных режимах работы.

Реальное моделирование классифицируется следующим образом:

- физическое:
 - в реальном масштабе времени;
 - в нереально масштабе времени.
- натурное:
 - комплексные испытания;
 - производственный эксперимент;
 - научный эксперимент.

Физическое моделирование

Физическое моделирование проводится на стендах, сохраняющих природу явлений и обладающих физическим подобием исследуемой системы. Как правило, исследуемая система является частью стенда.

В задачах физического моделирования особой важностью обладает вопрос масштаба времени, в следствии чего физическое моделирование может быть реализовано:

- в реальном масштабе времени;
- в нереальном масштабе времени.

Натурное моделирование

Натурное моделирование заключается в исследовании существующей системы (объекта, процесса, стенда) - проведении экспериментов с последующей обработкой результатов на основе теории подобия.

Виды натурального моделирования:

- комплексные испытания;
(заранее определенная серия тестов, направленная на комплексную диагностику или анализ исследуемой системы)
- производственный эксперимент;
(эксперимент, направленный на проверку работы системы в специальном режиме работы)
- научный эксперимент.
(направлен на получение новой информации о системе, как правило сопровождается большим объемом собираемых и обрабатываемых данных)

Мысленное моделирование

Используется тогда, когда эксперименты над исследуемой системой невозможно провести по ряду причин, среди которых, как правило, фигурируют следующие:

- **экономические;**

(например, испытание маневренности летательного аппарата в режимах, выходящих за рамки эксплуатационных норм)

- **временные;**

(например, исследование тренда изменения температуры атмосферы)

- **физические.**

(например, исследование происхождения Вселенной, механизмов формирования звезд и т.п.)

Мысленное моделирование подразделяется на:

- **наглядное:**

(формируется на основе понимания механизмов функционирования исследуемой системы)

- **гипотетическое;**

(модель в виде причинно-следственных связей между входом и выходом)

- **аналоговое;**

(модель на базе аналогий)

- **макетирование**

(например, уменьшенные копии продаваемых домов)

- **символическое:**

- **языковое;**

- **знаковое;**

- **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ.**

Символическое моделирование

Искусственный процесс создания логического объекта, моделирующего реальный объект, или его отношения с помощью определенной системы символов и знаков.

Символьное моделирование можно разделить на две категории:

- языковое;
(базируется на тезаурусе - словаре, который должен быть фиксирован и очищен от неоднозначностей)
- знаковое.

Математическое моделирование

Исследование системы (объекта, процесса) с предварительно полученной моделью, выраженной в некоторой математической форме записи.

Математическое моделирование подразделяется на три вида:

- аналитическое;
- имитационное;
- комбинированное.

Математическое моделирование является одним из основных методов при создании и исследовании различных как технических так и естественных физических систем, объектов и процессов.

Аналитическое моделирование

Исследование системы, заданной (описанной) с использованием: дифференциальных уравнений, интегро-дифференциальных уравнений, разностных уравнений, алгебраических уравнений и др.

Методы исследования систем аналитическим моделированием:

- **аналитический;**
(получение решения уравнений, описывающих систему в явном - символьном виде)
- **численный;**
(получение решения уравнений, описывающих систему в виде набора численных значений)
- **качественный.**
(оценка некоторых характеристик или свойств модели, без получения решения, например, оценка устойчивости динамических систем алгебраическими критериями)

Имитационное моделирование

Алгоритм имитационного моделирования воспроизводит процесс функционирования системы во времени. Применяется для решения сложных задач.

Виды имитационного моделирования:

- агентное моделирование;
- дискретно-событийное моделирование;
- системная динамика;
- методы Монте-Карло (стохастические).

Любая комбинация аналитического и имитационного моделирования есть ни что иное как комбинированное моделирование.

Система

Совокупность объектов, функционирующих друг с другом для достижения определенной (заданной) цели. Систему с множественными связями называют сложной.

Формализация

Задача формализации - получение математического описания, т.е. модели (с помощью различных видов преобразований) исследуемой системы (объекта, процесса).

Модель

Идеализированное представление, обладающее определенной (достаточной для решения задачи моделирования) степенью адекватности (подобия), исследуемой системы (объекта, процесса).

Для качественного моделирования модель должна быть адекватной

Адекватность модели

Основопологающее свойство для моделирования. Адекватность модели это степень соответствия модели (описания системы) поведению (изменению, динамики) исследуемой системы (объекта, процесса). Оценка адекватности, как правило, проводится по косвенным показателям, например, сравнением выхода моделируемой системы с выходом системы, полученным в ходе эксперимента, при условии одинаковости (на сколько это возможно) моделируемых условий проведения экспериментальным.

Ошибка моделирования

С практической точки зрения - количественная оценка отклонения результатов моделирования от полученных результатов в ходе эксперимента.

По назначению использования:

- **познавательные;**
(теоретические модели, описывают систему)
- **практические;**
(практические модели, описывают функционирование системы)
- **инструментальные**
(модель или средства построения моделей)

По степени абстрагирования от исследуемой системы:

- физические:

- натурные;
- квазинатурные / полунатурные;
- масштабные;
(отличаются размером от исследуемой системы)
- аналоговые;

- мысленные:

- знаковые;
 - **математические;**
 - символические;
 - визуальные и графические;
- интуитивные.
(не поддаются формализации, не моделируются)

Математическая модель

Описание исследуемой системы (объекта, процесса) одним из существующих математических аппаратов:

- дифференциальные уравнения;
- интегро-дифференциальные уравнения;
- разностные уравнения;
- алгебраические уравнения;
- вероятностные и статистические функции;
- нейронные сети;
- и др.

Математические модели применяются в теории управления для математического описания динамики исследуемой системы (динамических систем), объекта или процесса.

По принадлежности к иерархическому уровню:

- модели микроуровня;
(описывают состояние и динамику подсистем)
- модели макроуровня;
(описывают взаимодействие подсистем микроуровня)
- модели метауровня.
(описание информационных процессов в системе, абстрагирование от физики работы подсистем)

По характеру описываемых свойств системы:

- функциональные;
(представляются в виде некоторого функционала)
- структурные:
(представляются в виде различных структур и схем)
 - иерархические;
 - сетевые.

По способу представления свойств системы:

- аналитические;
- алгоритмические;
- имитационные.

По способу получения:

- теоретические;
- эмпирические;

(см. идентификация динамических систем)

По своим свойствам:

- детерминированные / стохастические;
- статические / динамические;
- непрерывные / дискретные / дискретно-непрерывные;
- линейные / нелинейные;
- с распределенными параметрами и без;
- автономные / неавтономные;
- и др.

При разработке математических моделей к ним предъявляется ряд требований, соблюдение которых упрощает и решение задачи формализации, и последующее моделирование.

Основные требования сформулированы следующим образом:

- **полнота;**
(должна позволять получать набор оценок характеристик системы с требуемой точностью и достоверностью)
- **гибкость;**
(возможность моделирования различных ситуаций)
- **длительность разработки / экономичность;**
- **блочная структура;**
(обеспечивается возможностью изменения отдельных частей модели, не переделявая всю модель)
- **эффективность для информационного и численного моделирования;**

Динамические системы

Объект или процесс, описываемый совокупностью некоторых величин (переменных), изменяющихся в процессе его работы по времени.

Непрерывные системы

Непрерывные системы представляют собой объекты или процессы, происходящие в окружающем нас мире. Математическое описание непрерывных систем строится на различных видах дифференциальных уравнений.

Дискретные системы

Системы, в которых изменение состояния объекта или процесса нельзя назвать непрерывным (как правило, обязательно присутствует дискретность по времени), являются дискретными. Математическое описание таких систем основывается на разностных уравнениях.

Виды динамических систем:

- линейные и нелинейные;
- стационарные и нестационарные;
- непрерывные, дискретные и смешанные;
- детерминистические и стохастические;
- системы со сосредоточенными и распределенными параметрами;
- адаптивные системы;
- автономные системы.

Математический аппарат описания моделей:

- дифференциальные уравнения; *(непрерывные системы)*
- разностные уравнения; *(дискретные системы)*
- переменные вход–выход; *(только линейные системы)*
- пространство состояний. *(только линейные системы)*

1. Моделирование как метод научного познания	4
2. Математическое моделирование непрерывных систем	29
2.1. Математическое описание непрерывных систем	30
2.2. Моделирование непрерывных систем	49
2.3. Анализ непрерывных систем	53
3. Численные методы решения задачи Коши	69
4. Математическое моделирование дискретных систем	102
5. Имитационное моделирование	146

Первое правило Кирхгофа

Сумма токов ветвей, сходящихся в одном узле равна нулю:

$$\sum_k i_k(t) = 0$$

Второе правило Кирхгофа

Сумма напряжений на резистивных элементах равна сумме ЭДС:

$$\sum_k E_k = \sum_k U_k = \sum_k R_k i_k$$

Второй закон Ньютона

В инерциальной системе отсчета справедливо, что сумма всех действующих на тело сил равняется произведению массы тела на ускорение (вторую производную по времени от перемещения):

$$\sum_k F_k = m a = m \ddot{x}$$

Принцип Д'Аламбера

Если к действующей на тело активной силе и реакции связи приложить дополнительную силу инерции, то тело будет находиться в равновесии (сумма всех сил, действующих в системе, дополненная главным вектором инерции, равна нулю):

$$F_i + N_i - J_i = 0$$

Уравнения Лагранжа второго рода:

В случае действия только потенциальных сил:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

В случае действия и потенциальных и непотенциальных сил:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^n$$

где:

$L(\cdot)$ - лагранжиан;

q_i - обобщенные координаты;

Q_i - обобщенные силы.

Динамические уравнения Эйлера

Получают из теоремы об изменении кинетического момента (в векторной форме):

$$\frac{dK}{dt} = L$$

где:

K - кинетический момент;

L - суммарный момент внешних сил.

Используя формулу Бура:

$$\left. \frac{dK}{dt} \right|_{ijk} = \left. \frac{dK}{dt} \right|_{xyz} + \omega \times K$$

Обобщенные динамические уравнения Эйлера

В этих уравнениях оси ijk - оси подвижной системы координат, а оси xyz - оси неподвижной системы координат.

$$\begin{cases} \frac{dK_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y = L_x \\ \frac{dK_y}{dt} + \omega_z K_x - \omega_x K_z = L_y \\ \frac{dK_z}{dt} + \omega_x K_y - \omega_y K_x = L_z \end{cases}$$

Динамические уравнения Эйлера

В этих уравнениях в качестве подвижной системы координат выбраны оси, связанные с телом и являющиеся главными осями инерции. Моменты инерции в этом случае не зависят от времени, а сами уравнения примут вид:

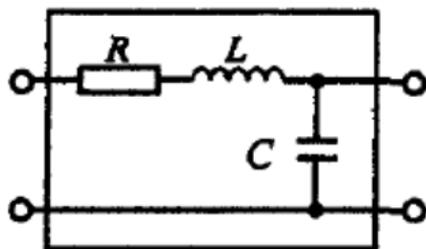
$$\begin{cases} J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z = L_x \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x = L_y \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y = L_z \end{cases}$$

Кинематические уравнения Эйлера

Определяют проекции вектора угловой скорости вращения тела на подвижные оси координат, связанные с телом через углы Эйлера и их производные по времени:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{cases}$$

RLC-цепочка:



Используя законы Кирхгофа:

$$i_R(t) = i_L(t) = i_C(t) = i(t)$$

$$u(t) + u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = 0$$

Получаем систему записанную в виде:

$$LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = -u(t)$$

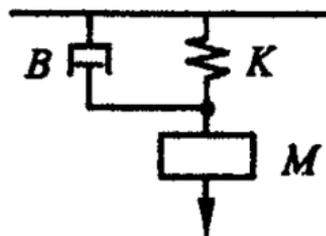
Напряжения:

$$u_R(t) = R i_R(t)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

Кинематическая схема:



Действующие силы:

$$f_M(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

$$f_B(t) = B \frac{dx(t)}{dt}$$

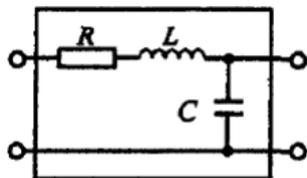
$$f_K(t) = K x(t)$$

Используя условия равновесия:

$$m \ddot{x} = \sum_i F_i \quad \text{и} \quad \sum_j M_j = 0$$

Используя условие равновесия получаем:

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + K x(t) = f(t)$$



Динамика непрерывной системы (электрика):

$$LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = -u(t)$$

Применяем преобразование Лапласа:

$$LC u_C(s) s^2 + RC u_C(s) s + u_C(s) = -u(s)$$

Выражаем $u_C(s)$:

$$u_C(s) [LC s^2 + RC s + 1] = -u(s)$$

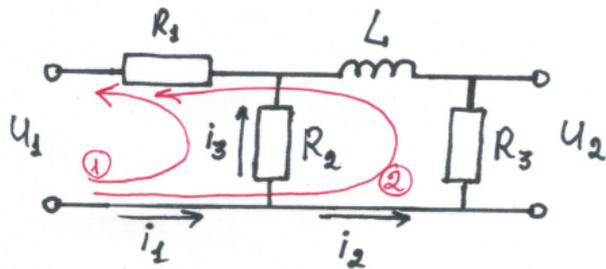
Передаточная функция $G(s)$ от входа к выходу:

$$G(s) = \frac{u_C(s)}{u(s)} = \frac{-1}{LC s^2 + RC s + 1}$$

Используя уравнения Кирхгофа:

$$(1) : -U_1 = R_1 i_1 + R_2 (i_1 - i_2)$$

$$(2) : -U_1 = R_1 i_1 + (R_3 + L s) i_2$$

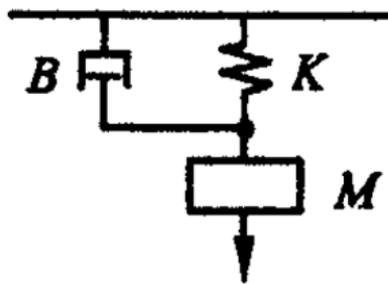


Определяем ток i_2 :

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -U_1 \\ R_1 & -U_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ R_1 & R_3 + L s \end{vmatrix}} = \frac{R_2 U_1}{L s (R_1 + R_2) + R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

Учитывая, что $U_2 = R_3 i_2$ получаем после подстановки:

$$W(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2 R_3}{L s (R_1 + R_2) + R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$



Динамика непрерывной системы (механика):

$$M \frac{d^2x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)$$

Применяя преобразование Лапласа:

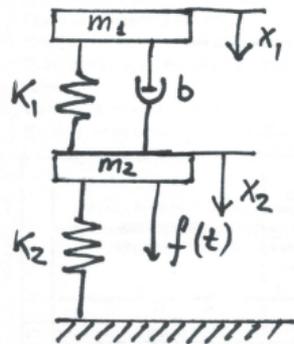
$$Ms^2x(s) + Bsx(s) + Kx(s) = f(s)$$

Выражаем $x(s)$:

$$x(s) [Ms^2 + Bs + K] = f(s)$$

Передаточная функция $W(s)$ от входа к выходу:

$$W(s) = \frac{x(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$$



Уравнения движения:

$$m_1 \ddot{x}_1 + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_1(x_2 - x_1) + k_2 x_2 = f(t)$$

Используя преобразование Лапласа записываем:

$$(1) : m_1 s^2 x_1 + b s(x_1 - x_2) + k_1(x_1 - x_2) = 0$$

$$(2) : m_2 s^2 x_2 + b s(x_2 - x_1) + k_1(x_2 - x_1) + k_2 x_2 = f(s)$$

Выражаем из (1) отношение x_1/x_2 :

$$(3) : \frac{x_1}{x_2} = \frac{b s + k_1}{m_1 s^2 + b s + k_1}$$

Делим уравнение (2) на x_1 :

$$(4) : \frac{x_2}{x_1} \left(m_2 s^2 + b s + k_1 + k_2 \right) - \frac{x_1}{x_1} \left(b s + k_1 \right) = \frac{f(s)}{x_1}$$

Получим два уравнения:

$$(3) : \frac{x_1}{x_2} = \frac{bs + k_1}{m_1 s^2 + bs + k_1}$$

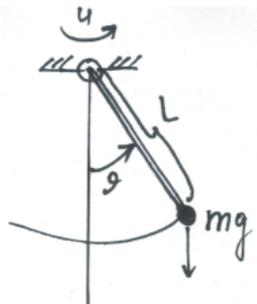
$$(4) : \frac{x_2}{x_1} (m_2 s^2 + bs + k_1 + k_2) - \frac{x_1}{x_1} (bs + k_1) = \frac{f(s)}{x_1}$$

Подставляем (3) в (4) и выражаем $\frac{x_1}{f(s)}$:

$$W_1(s) = \frac{x_1}{f(s)} = \frac{bs + k_1}{(m_1 s^2 + bs + k_1) (m_2 s^2 + bs + k_1 + k_2) - (bs + k_1)^2}$$

Аналогично, разделив (2) на x_2 и подставляя (3) получаем:

$$W_2(s) = \frac{x_2}{f(s)} = \frac{m_1 s^2 + bs + k_1}{(m_1 s^2 + bs + k_1) (m_2 s^2 + bs + k_1 + k_2) - (bs + k_1)^2}$$



Уравнение движения маятника:

$$m l^2 \ddot{\theta} = -m g l \sin(\theta) - k l^2 \dot{\theta} + u$$

Выражаем θ в старшей производной:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) - \frac{k}{m} \dot{\theta} + \frac{1}{m l^2} u$$

Делаем замену переменных:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 = \dot{\theta} \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{m l^2} u \end{bmatrix}$$

В итоге получаем в векторном виде описание системы в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

Динамика системы описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{ml^2} u \end{bmatrix}$$

Определим матрицу \mathbf{A} вычисляя ее в точке равновесия $(0, 0)$:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(x_1) & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}$$

Аналогично определим матрицу \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}^T$$

Выход системы $\mathbf{y}(t)$ задается через модель измерений $\mathbf{h}(\cdot)$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = x_1 \quad \leftarrow \quad \text{как пример}$$

Матрица выхода \mathbf{C} системы получается аналогично матрицам \mathbf{A} и \mathbf{B} :

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Система без feed-forward управления описывается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} \end{cases}$$

где:

$\dot{\mathbf{x}} = \dots$ - уравнение состояния;

$\mathbf{y} = \dots$ - уравнение выхода.

В общем виде описание системы в переменных состояния имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{G} \omega(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{H} v(t) \end{cases}$$

где:

- x** - вектор состояния;
- y** - вектор измерений (выхода);
- ω** - вектор входных стохастических сигналов;
- v** - вектор измерительных шумов;
- A** - матрица состояния;
- B** - матрица входа;
- C** - матрица выхода;
- D** - матрица прямой связи (feed-forward control), часто нулевая;
- H** - матрица входа стохастических сигналов;
- G** - матрица входа измерительных шумов.

Применяя линейное преобразование с невырожденной \mathbf{T} :

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{T} \mathbf{x}$$

Форма записи системы в переменных состояния примет вид:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{T} \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Получение различных реализаций:

$$\{ \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \} \xrightarrow{\boldsymbol{\eta} = \mathbf{T} \mathbf{x}} \{ \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}, \mathbf{T} \mathbf{B}, \mathbf{C} \mathbf{T}^{-1}, \mathbf{D} \}$$

Канонические формы - реализации с определенной структурой

Динамика непрерывной системы (электрика):

$$LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = -u(t)$$

Динамика непрерывной системы (механика):

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + K x(t) = f(t)$$

Моделирование заключается в решении задачи Коши, т.е. в данных конкретных примерах в получении в аналитическом виде:

$$u_C(t) = \dots \quad \text{или} \quad x(t) = \dots$$

с последующей записью полученных функций в виде операторов языка программирования и в подстановке значений времени t .

Поиск решения аналитическими способами затруднен
На практике используются численные методы решения ДУ

Динамика непрерывной системы (механика):

$$W(s) = \frac{x(s)}{u(s)} = \frac{1}{M s^2 + B s + K}$$

Динамика непрерывной системы (электрика):

$$W(s) = \frac{u_c(s)}{u(s)} = \frac{-1}{LC s^2 + RC s + 1}$$

Моделирование заключается в аналитическом решении алгебраических уравнений относительно $x(s)$ или $U_c(s)$, например:

$$x(s) = W(s) u(s)$$

после чего с использованием обратного преобразования Лапласа получается решение относительно $x(t)$ или $U_c(t)$. Последующий подход моделирования аналогичен случаю с дифференциальными уравнениями.

Описание системы в переменных состояния имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{G} \omega(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{H} v(t) \end{cases}$$

Моделирование подобной системы заключается в решении классической задачи Коши для матричного дифференциального уравнения. Решение получается в следующем виде:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \dots \right) \mathbf{x}_0 = \Phi(t) \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \dots \leftarrow \text{получаем из уравнения выхода}$$

$\Phi(t)$ - фундаментальная матрица решений, вычисление которой весьма трудоемко для больших систем.

- `tf` - задание модели в переменных вход-выход;
- `ss` - задание модели в переменных состояния;
- `ss2tf` - перевод описание в переменных вход выход;
- `tfdata` - коэффициенты числителя и знаменателя $W(s)$;
- `series` - последовательное соединение;
- `parallel` - параллельное соединение;
- `feedback` - обратная связь.

В основе анализа динамических систем лежит построение основных графиков, которые наглядно отображают основные характеристики системы.

Временные характеристики:

- построение графика переходного процесса;
- построение графика импульсной переходной характеристики;

Частотные характеристики:

- вычисление частотной характеристики;
- построение диаграммы Боде; *(ЛАФЧХ)*
- построение годографа Найквиста; *(АФЧХ)*

Нули и полюса системы:

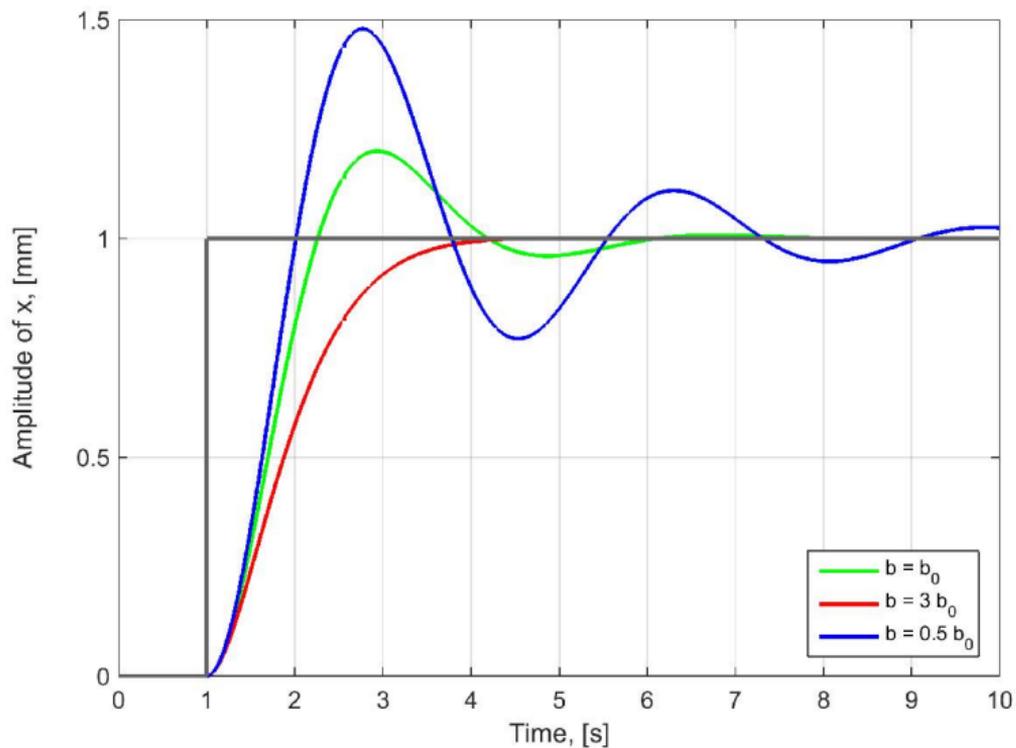
- построение карты нулей и полюсов;
- построение графика корневого годографа;

Переходной процесс

Переходной процесс - это реакция (т.е. изменяется выход $y(t)$) динамической системы на ступенчатое входное воздействие.

По графику переходного процесса определяют:

- устойчивость системы прямым методом;
- основные характеристики качества:
 - величину перерегулирования;
 - время установившегося процесса;
- величину статической ошибки;
- и ряд других второстепенных характеристик.

Time domain simulation
Step response

Импульсная переходная характеристика

Импульсная переходная характеристика - это реакция (т.е. изменяется выход $y(t)$) динамической системы на импульсное входное воздействие.

Входное импульсное воздействие для непрерывных систем описывается дельта-функцией Дирака. На практике величина импульса равная $+\infty$ недостижима, поэтому магнитуда импульса обладает конечным значением, как правило, при моделирование магнитуда импульса принимается равной единице.

Частотная характеристика

Частотная характеристика - это в общем случае комплексная функция частоты ω , показывающая как меняется амплитуда и фаза входного сигнала (на частоте ω) при его прохождении через систему.

Как правило, частотная характеристика определяется из описания системы в переменных вход-выход следующим образом:

$$W(j\omega) = W(s) \Big|_{s = j\omega}$$

На практике, речь идет о векторе комплексных значений $W(j\omega)$, вычисленных на заданных частотах в векторе ω .

Передаточная функция:

$$W(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

Получим частотную характеристику:

$$\begin{aligned} W(j\omega) = W(s) \Big|_{s=j\omega} &= \frac{1}{\tau j\omega + 1} = \frac{(\tau j\omega - 1)}{(\tau j\omega + 1)(\tau j\omega - 1)} \\ &= \frac{(\tau j\omega - 1)}{(\tau j\omega)^2 - 1^2} = \frac{(\tau j\omega - 1)}{-(\tau\omega)^2 - 1} \\ &= \frac{1}{(\tau\omega)^2 + 1} - j \frac{\tau\omega}{(\tau\omega)^2 + 1} = U(\omega) + j V(\omega) \end{aligned}$$

Подставляя значения ω в рад/сек, получаем вектор значений $W(j\omega)$

Амплитудно-частотная характеристика

Амплитудно-частотная характеристика - это, в общем случае, комплексная функция частоты ω , показывающая как меняется амплитуда входного сигнала (на частоте ω) при его прохождении через систему.

Зная $W(j\omega)$, можно вычислить АЧХ:

$$\text{АЧХ} := \left| W(j\omega) \right| = \sqrt{U(\omega)^2 + V(\omega)^2}$$

Как правило, график АЧХ строится в логарифмическом масштабе, как по частоте, так и по амплитуде. Для этого АЧХ преобразуется следующим образом:

$$\text{АЧХ} := 20 \log_{10} \left(\left| W(j\omega) \right| \right)$$

Фазо-частотная характеристика

Фазо-частотная характеристика - это в общем случае комплексная функция частоты ω , показывающая как меняется фаза входного сигнала (на частоте ω) при его прохождении через систему.

Зная $W(j\omega)$, можно вычислить ФЧХ:

$$\text{ФЧХ} := \arg \left(W(j\omega) \right) = \arctan \left(\frac{U(\omega)}{V(\omega)} \right) + k\pi$$

Как правило, график ФЧХ строится в логарифмическом масштабе по частоте, а фаза отображается в градусах, для этого ФЧХ преобразуется следующим образом:

$$\text{ФЧХ} := \arg \left(W(j\omega) \right) \cdot \frac{180}{\pi}$$

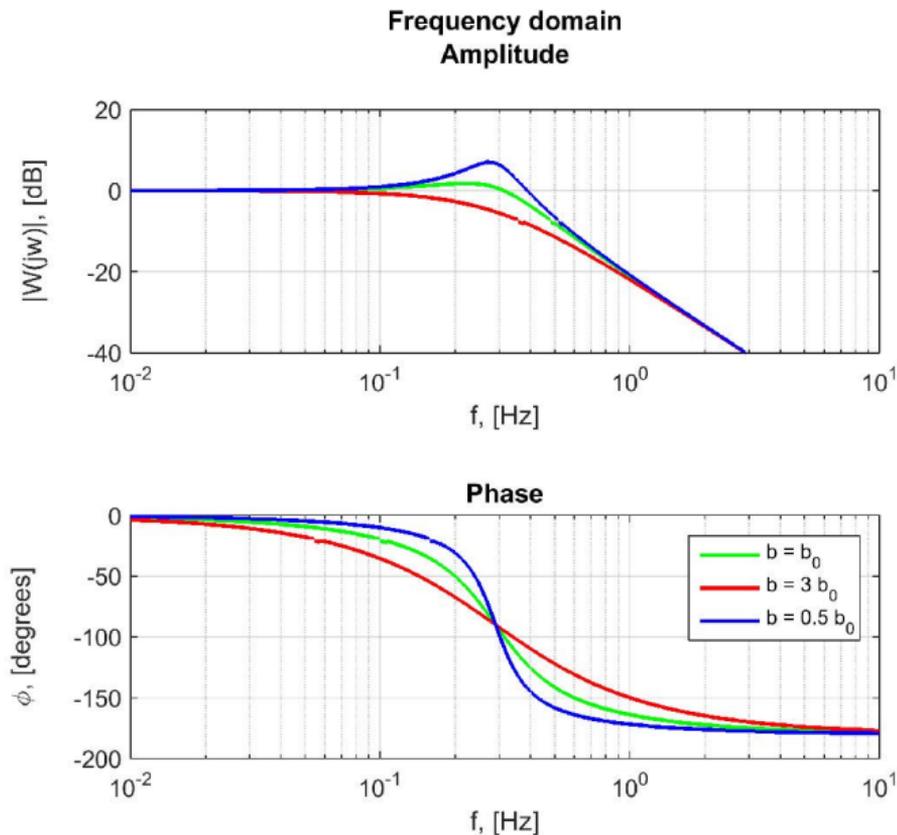
Диаграмма Боде

Диаграмма Боде (логарифмическая амплитудно-фазо-частотная характеристика) - это два графика, один из которых АЧХ, а другой ФЧХ, построенные по описанному ранее алгоритму.

Диаграмма Боде (ЛАФЧХ), по сути, графическое представление частотной характеристики, которое полностью характеризует то, как система изменяет входное воздействие на каждой частоте.

Диаграмма Боде используется для:

- анализа фильтрующих способностей системы;
- определения устойчивости замкнутых систем;
- определение запасов устойчивости по амплитуде и фазе;



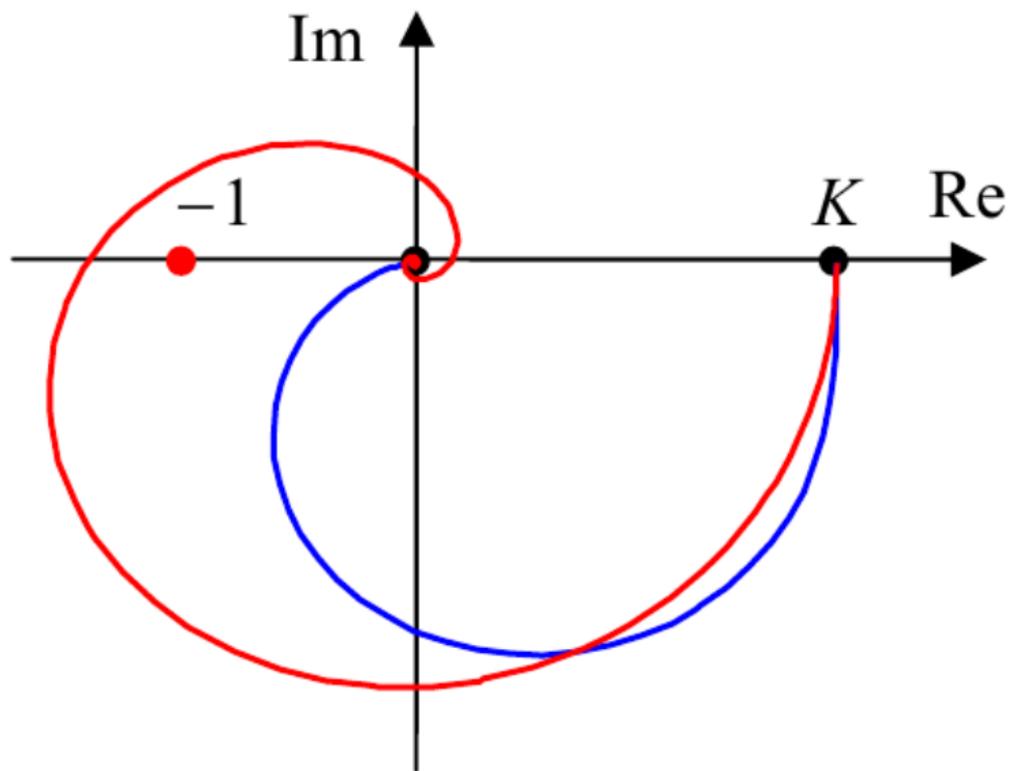
Годограф Найквиста

Годограф Найквиста (амплитудно-фазо-частотная характеристика - АФЧХ) - еще один вариант отображения частотной характеристики, который строится в комплексных осях.

Для каждого значения ω_j получаем одну точку на комплексной плоскости как $[U(\omega_j), V(\omega_j)]$. Соединяя точки от $\omega = 0$ до $\omega = +\infty$, получаем годограф Найквиста.

Годограф Найквиста используется для:

- определения устойчивости замкнутых систем;
- определение запасов устойчивости по амплитуде и фазе;



Передаточная функция динамической системы может быть представлена в виде отношения полиномов числителя $N(s)$ и знаменателя $D(s)$ следующим образом:

$$W(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Нули системы

Нули системы - это корни характеристического полинома числителя $N(s) = 0$ передаточной функции.

Полюса системы

Полюса системы - это корни характеристического полинома знаменателя $D(s) = 0$ передаточной функции. Именно полюса определяют основную динамику и устойчивость рассматриваемой системы.

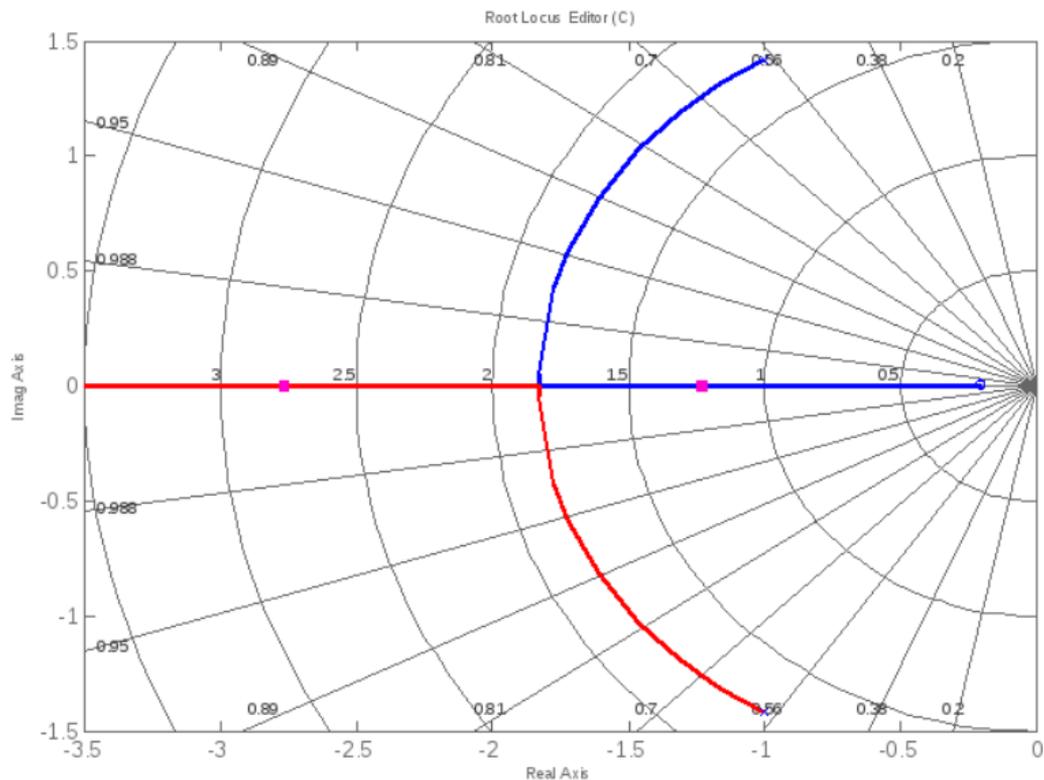
Карта нулей и полюсов системы

Карта нулей и полюсов системы - это графическое отображение значений нулей и полюсов системы на комплексной плоскости.

Корневой годограф

Корневой годограф - это графическое отображение значений нулей и полюсов системы на комплексной плоскости для замкнутой системы, как правило, при изменении коэффициента усиления в цепи обратной связи.

Карта нулей и полюсов - отображает только то, что есть в системе, а корневой годограф показывает как изменяются нули и полюса при изменении, как правило, усиления в цепи обратной связи



- `step` - построение переходного процесса;
- `impulse` - построение импульсной переходной характеристики;
- `lsim` - моделирование системы;
- `freqresp` - вычисление частотной характеристики;
- `bode` - построение диаграммы Боде;
- `nyquist` - построение годографа Найквиста;
- `zero` - определение нулей системы;
- `pole` - определение полюсов системы;
- `pzmap` - построение карты нулей и полюсов;
- `rlocus` - построение корневого годографа.

1. Моделирование как метод научного познания	4
2. Математическое моделирование непрерывных систем	29
3. Численные методы решения задачи Коши	69
3.1. Одношаговые методы	73
3.1.1. Явные методы Рунге-Кутты	78
3.1.2. Неявные методы Рунге-Кутты	82
3.2. Адаптивные методы	87
3.3. Многошаговые методы	94
3.3.1. Методы Адамса-Башфорта (явные)	94
3.3.2. Методы Адамса-Мульттона (неявные)	97
3.4. Устойчивость численных методов решения задачи Коши	100
4. Математическое моделирование дискретных систем	102
5. Имитационное моделирование	146

Задача Коши

Заключается в поиске решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

Для дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{cases} x^{(1)} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Для системы из n дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения n -ого порядка приводятся к системе n дифференциальных уравнений первого порядка, т.е. к форме Коши

Явные методы:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \text{sol}(\mathbf{x}_k)$$

Неявные методы:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \text{sol}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k)$$

Одношаговые методы:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \text{sol}(\mathbf{x}_k)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \text{sol}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k)$$

Многошаговые методы ($\rho > 0$ шагов):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \text{sol}(\mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_{k-\rho})$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \text{sol}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_{k-\rho})$$

- одношаговые методы:
 - метод Эйлера (прямой);
 - метод Эйлера-Коши;
 - метод Эйлера-Коши с итерационной обработкой;
 - метод Рунге-Кутты третьего порядка;
 - метод Рунге-Кутты четвертого порядка (классический);
 - метод Рунге-Кутты четвертого порядка (3/8);
- адаптивные методы (одношаговые):
 - метод Рунге-Кутты (4, 5);
 - метод Дормана-Принса;
- многошаговые методы:
 - методы Адамса-Башфорта (явные);
 - методы Адамса-Мультона (неявные);

Система дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Полагаем, что дискретное время смещается на шаг h :

$$t_{k+1} = t_0 + k h, \quad k = 0, 1, \dots$$

Первая производная аппроксимируется через конечную разность

$$\mathbf{x}^{(1)}(t_k) \approx \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{h}$$

В итоге исходное уравнение примет вид:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)$$

Это общий вид численного нахождения решения задачи Коши.
Предыдущий шаг + добавка (результат интегрирования)

Система дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Явный метод Эйлера-Коши:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + h \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \frac{h}{2} \left[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}, t_{k+1}) \right] \end{aligned}$$

где:

$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}$ - прогноз (оценка), на которую корректируется \mathbf{x}_{k+1} .

Неявный метод Эйлера-Коши:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{2} \left[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) \right]$$

Метод Эйлера-Коши с итерационной обработкой:

$$\mathbf{x}_{k+1,0} = \mathbf{x}_k + h \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)$$

$$\mathbf{x}_{k+1,i} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{2} \left[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1,i-1}, t_{k+1}) \right]$$

где:

i - счетчик итераций (нужны единицы).

Улучшенный метод Эйлера:

$$\mathbf{x}_{k+0.5} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+0.5}, t_{k+0.5})$$

Явные методы:

0				
c_2	a_{21}			
\vdots	\vdots	\ddots		
c_s	a_{s1}	\dots	$a_{s,s-1}$	
	b_1	\dots	b_{s-1}	b_s

Неявные методы:

c_1	a_{11}	\dots	a_{1s}
c_2	a_{21}	\dots	a_{2s}
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
c_s	a_{s1}	\dots	a_{ss}
	b_1	\dots	b_s

Альтернативная запись:

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & \mathbf{b}^\top \end{array}$$

Метод Эйлера (первый порядок):

$$K_1 = \mathbf{f} \left(\mathbf{x}_k, t_k \right)$$

Решение:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h K_1$$

Таблица Бутчера:

0	0
<hr/>	
	1

Метод Ралстона (второй порядок):

$$K_1 = \mathbf{f} \left(\mathbf{x}_k, t_k \right)$$

$$K_2 = \mathbf{f} \left(\mathbf{x}_k + 2/3 h K_1, t_k + 2/3 h \right)$$

Решение:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \left(1/4 K_1 + 3/4 K_2 \right)$$

Таблица Бутчера:

0	0	0
2/3	2/3	0
<hr/>		
	1/4	3/4

Явные методы Рунге-Кутты:

$$K_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k),$$

$$K_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + a_{21} h K_1, t_k + c_2 h),$$

$$\vdots$$

$$K_s = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + a_{s1} h K_1 + \dots + a_{s,s-1} h K_{s-1}, t_k + c_s h)$$

В общем случае вычисление K_i :

$$K_i = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j, t_k + c_i h\right)$$

Решение получается в виде:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \sum_{i=1}^s b_i K_i$$

Таблица Бутчера:

0			
1/2	1/2		
1/2	-1	2	
	1/6	2/3	1/6

Начальные условия:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$$

Вычисление коэффициентов:

$$K_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)$$

$$K_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + 1/2 h K_1, t_k + 1/2 h)$$

$$K_3 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k - h K_1 + 2 h K_2, t_k + 1/2 h)$$

Решение на каждом шаге:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \left(\frac{1}{6} K_1 + \frac{2}{3} K_2 + \frac{1}{6} K_3 \right)$$

Таблица Бутчера:

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

Начальные условия:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$$

Вычисление коэффициентов:

$$K_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)$$

$$K_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + 1/2 h K_1, t_k + 1/2 h)$$

$$K_3 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + 1/2 h K_2, t_k + 1/2 h)$$

$$K_4 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + h K_3, t_k + h)$$

Решение на каждом шаге:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

Таблица Бутчера:

0				
1/3	1/3			
2/3	-1/3	1		
1	1	-1	1	
	1/8	3/8	3/8	1/8

Начальные условия:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$$

Вычисление коэффициентов:

$$K_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)$$

$$K_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + 1/3 h K_1, t_k + 1/3 h)$$

$$K_3 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + (K_2 - 1/3 K_1) h, t_k + 2/3 h)$$

$$K_4 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + (K_1 - K_2 + K_3) h, t_k + h)$$

Решение на каждом шаге:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{8} (K_1 + 3K_2 + 3K_3 + K_4)$$

Неявные методы Рунге-Кутты:

$$K_i = \mathbf{f} \left(\mathbf{x}_k + \sum_{j=1}^s a_{ij} h K_j, t_k + c_i h \right)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \sum_{i=1}^s b_i K_i$$

Отличия от явных методов:

- матрица коэффициентов полная, а не нижняя треугольная;
- на каждом шаге решаем систему уравнений.

Условие применимости:

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i \quad \text{для } i = 2, \dots, s$$

Метод Radau IA 3-ого порядка:

0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$
<hr/>		
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Метод Radau IIA 3-ого порядка:

$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$
1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
<hr/>		
	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Метод Radau IA 5-ого порядка:

0	$\frac{1}{9}$	$\frac{-1 - \sqrt{6}}{18}$	$\frac{-1 + \sqrt{6}}{18}$
$\frac{3}{5} - \frac{\sqrt{6}}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{11}{45} + \frac{7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{11}{45} - \frac{43\sqrt{6}}{360}$
$\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{6}}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{11}{45} + \frac{43\sqrt{6}}{360}$	$\frac{11}{45} - \frac{7\sqrt{6}}{360}$
	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9} + \frac{\sqrt{6}}{36}$	$\frac{4}{9} - \frac{\sqrt{6}}{36}$

Метод Рadau IIA 5-ого порядка:

$\frac{2}{5} - \frac{\sqrt{6}}{10}$	$\frac{11}{45} - \frac{7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{37}{225} - \frac{169\sqrt{6}}{1800}$	$-\frac{2}{225} + \frac{\sqrt{6}}{75}$
$\frac{2}{5} + \frac{\sqrt{6}}{10}$	$\frac{37}{225} + \frac{169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{11}{45} + \frac{7\sqrt{6}}{360}$	$-\frac{2}{225} - \frac{\sqrt{6}}{75}$
1	$\frac{4}{9} - \frac{\sqrt{6}}{36}$	$\frac{4}{9} + \frac{\sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$
	$\frac{4}{9} - \frac{\sqrt{6}}{36}$	$\frac{4}{9} + \frac{\sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$

Метод простой итерации

Применяется для поиска решения в неявных методах Рунге-Кутты:

$$\mathbf{K} = [K_1 \quad K_2 \quad \dots \quad K_s]$$

На каждой k -ой итерации включается вложенный итерационный процесс вычисления \mathbf{K} , т.е.:

$$\mathbf{K}_{p+1} = \mathbf{f}(\mathbf{K}_p)$$

который продолжается пока:

$$\|\mathbf{K}_{p+1} - \mathbf{K}_p\| > \varepsilon \quad \text{и} \quad p < p_{\max}$$

Начальное приближение \mathbf{K}_0 на каждом k -ом шаге берется как решение \mathbf{K} , полученное на предыдущем $k - 1$ шаге.

Адаптивные численные методы решения задачи Коши

Адаптивным численным методом решения задачи Коши называется любой метод в котором значение шага h изменяется внутри самого метода для повышения точности вычислений.

Существуют два принципиальных подхода реализации адаптивных методов:

- При вычислении \mathbf{x}_{k+1} шаг h постоянно уменьшается до h^* , пока не будет достигнута требуемая точность. Следующий шаг начинается с момента времени $t_k + h^*$.
(перерасчет решения на каждом шаге)
- При вычислении \mathbf{x}_{k+1} определяется удовлетворяет ли решение заданной точности и если нет, то шаг h для следующей итерации, \mathbf{x}_{k+2} уменьшается, а значение \mathbf{x}_{k+1} принимается таким, каким есть.
(без перерасчета решения на каждом шаге)

Как правило, если точность удовлетворительная, то в методах предусматривается увеличение шага в целях повышения быстродействия.

Контроль точности на каждом шаге:

- вычисляем \mathbf{x}_{k+1} с шагом h и с шагом $2h$;
- оцениваем погрешность решения как:

$$E = \frac{\|\mathbf{x}_{k+1}^h - \mathbf{x}_{k+1}^{2h}\|}{2^s - 1}$$

- при $E < \varepsilon$ продолжаем вычисления с тем же шагом;
- при $E \geq \varepsilon$ уменьшаем шаг h и повторяем вычисления с t_k .

Грубый контроль точности (для метода 4-го порядка) на k -ом шаге:

$$\theta^k = \left\| \frac{K_2 - K_3}{K_1 - K_2} \right\|$$

$\theta^k > 0.01$ - уменьшаем h ,

$\theta^k < 0.001$ - увеличиваем h .

Таблица Бутчера:

0						
1/4	1/4					
3/8	3/32	9/32				
12/13	1932/2197	-7200/2197	7296/2197			
1	439/216	-8	3680/513	-845/4104		
1/2	-8/27	2	-3544/2565	1859/4104	-11/40	
	16/135	0	6656/12825	28561/56430	-9/50	2/55
	25/216	0	1408/2565	2197/4104	-1/5	0

На одной итерации считаются два решения, их разница сравнивается с ε , затем принимается решение об изменении шага h , до тех пор, пока разница решений не удовлетворит точности

Таблица Бутчера:

0							
1/5	1/5						
3/10	3/40	9/40					
4/5	44/45	- 56/15	32/9				
8/9	19372/6561	- 25360/2187	64448/6561	- 212/729			
1	9017/3168	- 355/33	46732/5247	49/176	- 5103/18656		
1	35/384	0	500/1113	125/192	- 2187/6784	11/84	
	35/384	0	500/1113	125/192	- 2187/6784	11/84	0
	5179/57600	0	571/16695	393/640	- 92097/339200	187/2100	1/40

```
function [X, T] = ode(f, t_begin, t_end, h0, eps1, eps2)
    ... инициализация X, T, k = 1, h = h0 ...
    t_k = t_begin;
    while t_k < t_end
        ... вычисление K_i, x_1, x_2 ...
        t_k = t_k + h;
        X(:, k+1) = x_2;
        T(k+1) = t_k;
        k = k + 1;
        if norm(x_1 - x_2) > eps1
            h = h / 2;
        elseif norm(x_1 - x_2) < eps2
            h = h * 2;
        end
    end
end
end
```

```
function [X, T] = ode(f, t_begin, t_end, h0, eps1, eps2)
    ... инициализация X, T, k = 1, h = h0 ...
    t_k = t_begin;
    while t_k < t_end
        ... вычисление K_i, x_1, x_2 ...
        if norm(x_1 - x_2) > eps1
            h = h / 2;
        else
            t_k = t_k + h;
            X(:, k+1) = x_2;
            T(k+1) = t_k;
            k = k + 1;
            if norm(x_1 - x_2) < eps2
                h = h * 2;
            end
        end
    end
end
end
```

```
function [X, T] = ode(f, t_begin, t_end, h0, eps1, eps2)
    ...
    while t_k < t_end
        if t_k + h > t_end
            h = t_end - t_k;
        end
        ...
    end
end
```

Экстраполяционные методы (Адамса-Башфорта, явные):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \sum_{\lambda=0}^k u_{-\lambda} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-\lambda}, t_{k-\lambda})$$

В случае методов Адамса-Башфорта количество переменных K_i определяется порядком метода, равным количеству точек решения, которые необходимо предварительно рассчитать (включая начальные условия).

Интерполяционные методы (Адамса-Мульттона, неявные):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \sum_{\lambda=-1}^{k-1} v_{-\lambda} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-\lambda}, t_{k-\lambda})$$

Методы Адамса-Башфорта:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)$$

$$\mathbf{x}_{k+2} = \mathbf{x}_{k+1} + h \left(\frac{3}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) - \frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) \right)$$

$$\mathbf{x}_{k+3} = \mathbf{x}_{k+2} + h \left(\frac{23}{12} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+2}, t_{k+2}) - \frac{16}{12} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) + \frac{5}{12} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) \right)$$

$$\mathbf{x}_{k+4} = \mathbf{x}_{k+3} + h \left(\frac{55}{24} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+3}, t_{k+3}) - \frac{59}{24} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+2}, t_{k+2}) \right. \\ \left. + \frac{37}{24} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) - \frac{9}{24} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) \right)$$

Начальные условия:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$$

Вычисление коэффициентов:

$$K_1 = 1901/720 \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+4}, t_{k+4})$$

$$K_2 = -1387/360 \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+3}, t_{k+3})$$

$$K_3 = 109/30 \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+2}, t_{k+2})$$

$$K_4 = -637/360 \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1})$$

$$K_5 = 251/720 \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+0}, t_{k+0})$$

Решение на каждом шаге:

$$\mathbf{x}_{k+5} = \mathbf{x}_{k+4} + h(K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5)$$

Первые $n - 1$ значений \mathbf{f} можно вычислить любым явным методом

Примеры методов Адамса-Мултона:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{1}{2} h \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) \right)$$

$$\mathbf{x}_{k+2} = \mathbf{x}_{k+1} + h \left(\frac{5}{12} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+2}, t_{k+2}) + \frac{2}{3} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) - \frac{1}{12} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) \right)$$

$$\mathbf{x}_{k+3} = \mathbf{x}_{k+2} + h \left(\frac{3}{8} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+3}, t_{k+3}) + \frac{19}{24} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+2}, t_{k+2}) \right.$$

$$\left. - \frac{5}{24} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) + \frac{1}{24} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) \right)$$

$$\mathbf{x}_{k+4} = \mathbf{x}_{k+3} + h \left(\frac{251}{720} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+4}, t_{k+4}) + \frac{646}{720} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+3}, t_{k+3}) - \frac{264}{720} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+2}, t_{k+2}) \right.$$

$$\left. + \frac{106}{720} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) - \frac{19}{720} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) \right)$$

Метод прогноза-коррекции

Применяется для поиска решения в методах Адамса-Мультонна. Суть метода в формировании прогноза неизвестного значения \mathbf{x}_{k+1} и последующей коррекции уже при непосредственном вычислении \mathbf{x}_{k+1} , т.е., например для метода Адамса-Мультонна 2 порядка:

Прогноз:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+2} = \mathbf{x}_{k+1} + h \left(\frac{3}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) - \frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) \right)$$

Коррекция:

$$\mathbf{x}_{k+2} = \mathbf{x}_{k+1} + h \left(\frac{5}{12} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k+2}, t_{k+2}) + \frac{2}{3} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) - \frac{1}{12} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) \right)$$

Метод прогноза-коррекции

Существует несколько схем прогноза-коррекции, в том числе и с использованием итерационного процесса.

Коррекция по правилу трапеций (требуется вывод формул корректора для более оптимального количества вычислений):

$$\mathbf{x}_{k+2} = \mathbf{x}_{k+1} + h \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) + \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k+2}, t_{k+2})}{2}$$

A-устойчивость

Численный метод решения задачи Коши A-устойчив, если при фиксированном шаге h для дифференциального уравнения

$$\dot{x} = kx, \quad \text{при} \quad x(0) = 1 \quad \text{и} \quad \Re(k) < 0$$

получаемое решение стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Другими словами A-устойчивость - абсолютная устойчивость.

Функция устойчивости

Для методов Рунге-Кутты функция устойчивости имеет вид:

$$\varphi(z) = \frac{\det \mathbf{I} - z \mathbf{A} + z \mathbf{e} \mathbf{b}^T}{\det \mathbf{I} - z \mathbf{A}}$$

где \mathbf{e} - единичный вектор.

L-устойчивость

Численный метод решения задачи Коши L-устойчив, если он A-устойчив (кроме метода трапеций) и:

$$|\varphi(z)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty$$

- ode45 - использует алгоритм Dormand-Prince;
- ode23 - использует алгоритм Bogacki–Shampine;
- ode113 - многошаговые методы Адамса (явные и неявные).

1. Моделирование как метод научного познания	4
2. Математическое моделирование непрерывных систем	29
3. Численные методы решения задачи Коши	69
4. Математическое моделирование дискретных систем	102
4.1. Математическое описание дискретных систем	103
4.2. Моделирование дискретных систем	108
4.3. Системы с дискретизацией данных	111
4.4. Анализ дискретных систем	139
5. Имитационное моделирование	146

Импульсные системы

Системы, в которых присутствует хотя бы один импульсный элемент, входной и/или выходной сигнал которого представляет собой последовательность импульсов, полученных в результате, например, АИМ, ШИМ, ЧИМ или ФИМ, являются импульсными системами. Информация заключена в магнитуде импульсов.

Цифровые системы

Системы, в которых информация заключена в числах, хранящихся в памяти вычислителя, называются цифровыми.

Системы с дискретизацией данных (sampled data system)

Системы, в которых управление непрерывным объектом осуществляется через цифровую систему. Оцифровка сигналов осуществляется аналогово-цифровыми преобразователями, а восстановление непрерывного сигнала - цифро-аналоговыми преобразователями.

Передаточная функция $W(z^{-1})$:

$$W(z^{-1}) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

Передаточная функция $W(z)$:

$$W(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$

где:

$u(z)$ - входной сигнал;

$y(z)$ - выходной сигнал.

Передаточные функции $W(z^{-1})$ и $W(z)$ приведенные

Передаточная функция $W(z)$:

$$W(z) = \frac{c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$

имеет порядок:

$$\frac{z^m}{z^n} = z^{m-n} = z^\phi$$

Нереализуемые системы (non-causal systems)

При $\phi > 0$ динамика системы зависит от будущих значений дискретного сигнала. Такие системы физически нереализуемы.

Реализуемые системы (causal systems)

При $\phi \leq 0$ динамика системы зависит только от предыдущих значений дискретного сигнала. Такие системы физически реализуемы.

В общем виде описание системы в переменных состояния имеет вид:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{G} \omega(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{H} v(k) \end{cases}$$

где:

- $\mathbf{x}(k)$ - вектор состояния;
- $\mathbf{y}(k)$ - вектор измерений (выхода);
- $\omega(k)$ - вектор входных стохастических сигналов;
- $v(k)$ - вектор измерительных шумов;
- \mathbf{A} - матрица состояния;
- \mathbf{B} - матрица входа;
- \mathbf{C} - матрица выхода;
- \mathbf{D} - матрица прямой связи (feed-forward control), часто нулевая;
- \mathbf{H} - матрица входа стохастических сигналов;
- \mathbf{G} - матрица входа измерительных шумов.

Описание системы в переменных состояния:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) \end{cases}$$

можно представить в следующем виде:

$$z \mathbf{x}(z) - z \mathbf{x}(0) = \mathbf{A} \mathbf{x}(z) + \mathbf{B} \mathbf{u}(z)$$

и выразив $\mathbf{x}(z)$ получим:

$$\mathbf{x}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z \mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(z)$$

где при нулевых начальных условиях и $\mathbf{y}(z) = \mathbf{C} \mathbf{x}(z)$:

$$W(z) = \frac{\mathbf{y}(z)}{\mathbf{u}(z)} = \mathbf{C} (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$$

Динамика дискретной системы:

$$W(z) = \frac{x(z)}{u(z)} = \frac{c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$

Моделирование заключается в аналитическом решении алгебраических уравнений относительно $x(z)$, например:

$$x(z) = W(z) u(z)$$

после чего с использованием обратного Z-преобразования получаем решение относительно $x(k)$:

$$x(z) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ W(z) u(z) \right\}$$

Вектор состояния на каждом шаге можно записать следующим образом:

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(0) + \mathbf{B} \mathbf{u}(0)$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A} \mathbf{x}(1) + \mathbf{B} \mathbf{u}(1)$$

$$= \mathbf{A} (\mathbf{A} \mathbf{x}(0) + \mathbf{B} \mathbf{u}(0)) + \mathbf{B} \mathbf{u}(1)$$

$$= \mathbf{A}^2 \mathbf{x}(0) + \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u}(0) + \mathbf{B} \mathbf{u}(1)$$

$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{A} \mathbf{x}(2) + \mathbf{B} \mathbf{u}(2)$$

$$= \mathbf{A} (\mathbf{A}^2 \mathbf{x}(0) + \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u}(0) + \mathbf{B} \mathbf{u}(1)) + \mathbf{B} \mathbf{u}(2)$$

$$= \mathbf{A}^3 \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \mathbf{u}(0) + \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u}(1) + \mathbf{B} \mathbf{u}(2)$$

...

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-i} \mathbf{B} \mathbf{u}(i)$$

В этом случае решение в общем виде в момент времени k имеет вид:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-i} \mathbf{B} \mathbf{u}(i),$$

где фундаментальная матрица решений (матрица перехода):

$$\Phi(k) = \mathbf{A}^k$$

Решение всей системы в момент времени k :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k) = \Phi(k) \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k-1-i) \mathbf{B} \mathbf{u}(i) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \Phi(k) \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{C} \Phi(k-1-i) \mathbf{B} \mathbf{u}(i) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) \end{cases}$$

Системы с дискретизацией данных (sampled data system)

Системы, в которых управление непрерывным объектом осуществляется через цифровую систему. Оцифровка сигналов осуществляется аналогово-цифровыми преобразователями, а восстановление непрерывного сигнала - цифро-аналоговыми преобразователями.

Для анализа и синтеза подобных систем нужно:

- представить непрерывную часть ее дискретным эквивалентом;
- представить дискретную часть ее непрерывным эквивалентом.

Т.к. управление формируется в цифре, то непрерывная часть представляется ее дискретным эквивалентом

Методы получения эквивалентной дискретной системы:

- методы отображения дифференциалов:
 - метод правых прямоугольников
 - метод левых прямоугольников
 - метод трапеций;
(метод аппроксимации Тастина)
- метод инвариантности импульсной характеристики;
(стандартное Z-преобразование)
- метод согласованного Z-преобразования;
(полюса непрерывной системы в полюса дискретной)
- эквивалентная запись в переменных состояния.

Первая производная через конечные разности:

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{\Delta x}{T} = \frac{x[k+1] - x[k]}{T}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{\nabla x}{T} = \frac{x[k] - x[k-1]}{T}$$

Вторая производная через конечные разности:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \approx \frac{\Delta^2 x}{T^2} = \frac{x[k+2] - 2x[k+1] + x[k]}{T^2}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \approx \frac{\nabla^2 x}{T^2} = \frac{x[k] - 2x[k-1] + x[k-2]}{T^2}$$

Производная выражается как через прямые так и обратные разности

Аппроксимация производной (по сути, методами интегрирования):

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=t_k} \approx \frac{x[k+1] - x[k]}{T} \quad \text{правые прямоугольники}$$

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=t_{k+1}} \approx \frac{x[k+1] - x[k]}{T} \quad \text{левые прямоугольники}$$

Применяя преобразование Лапласа и Z-преобразование:

$$s \quad \leftarrow \quad \frac{z-1}{T} \quad \text{правые прямоугольники}$$

$$s z \quad \leftarrow \quad \frac{z-1}{T} \quad \text{левые прямоугольники}$$

Аппроксимация производной (по сути, методом трапеций):

$$\frac{\frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=t_k} + \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=t_{k+1}}}{2} = \frac{x[k+1] - x[k]}{T} + \frac{x[k+1] - x[k]}{T}$$

$$= \frac{x[k+1] - x[k]}{T}$$

Применяя преобразование Лапласа и Z-преобразование:

$$\frac{s + s z}{2} \leftarrow \frac{z - 1}{T} \rightarrow z = \frac{1 - Ts/2}{1 + Ts/2}$$

Преобразование по правилу трапеций - аппроксимация Тастина, где дискретная система устойчива ТТТ когда устойчива непрерывная

Упростив получим выражения:

$s \rightarrow z$			$z \rightarrow s$	
s	$\leftarrow \frac{z-1}{T}$	правые прямоугольники	z	$= sT + 1$
s	$\leftarrow \frac{z-1}{Tz}$	левые прямоугольники	z	$= \frac{1}{1-Ts}$
s	$\leftarrow \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$	трапеции	z	$= \frac{1+Ts/2}{1-Ts/2}$

Используем следующую замену:

$$W(z) = W(s) \Big|_{s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}} = W\left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)}\right)$$

при

$$s = \frac{1}{T} \ln(z) = \frac{2}{T} \left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \dots \right] \approx \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \approx \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}$$

При аппроксимации Тастина АЧХ и ФЧХ непрерывной и эквивалентной дискретной системы идентичны, но могут быть смещены по частотам

Получение эквивалентной дискретной системы (при $T = 0.01$):

$$\begin{aligned}W(z) &= \frac{s+1}{s^2+12s+32} \Bigg|_{s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}} = \frac{\frac{2(z-1)}{T(z+1)} + 1}{\left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)}\right)^2 + 12\frac{2(z-1)}{T(z+1)} + 32} \\&= \frac{(2T + 2T^2)z^2 + 2T^2z + T^2 - 2T}{(4 + 24T + 32T^2)z^2 + (64T^2 - 8)z + 4 - 24T + 32T^2} \\&= \frac{0.0202z^2 + 2.0 \times 10^{-4}z - 0.0199}{4.2432z^2 - 7.9936z + 3.7632} \\&= \frac{0.00471z^2 + 4.7134 \times 10^{-5}z - 0.00469}{z^2 - 1.8839z + 0.8869}\end{aligned}$$

Используем следующую замену:

$$W(s) = W(z) \Big|_{z = \frac{2+sT}{2-sT}} = W\left(\frac{2+sT}{2-sT}\right)$$

где

$$z = e^{sT} \approx \frac{e^{+sT/2}}{e^{-sT/2}} \approx \frac{1+sT/2}{1-sT/2} \approx \frac{2+sT}{2-sT}$$

Получение непрерывной системы:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{0.00471 z^2 + 4.7134 \times 10^{-5} z - 0.00469}{z^2 - 1.8839 z + 0.8869} \bigg|_{z = \frac{2 + sT}{2 - sT}} \\ &= \frac{0.00471 \left(\frac{2 + sT}{2 - sT} \right)^2 + 4.7134 \times 10^{-5} \left(\frac{2 + sT}{2 - sT} \right) - 0.00469}{\left(\frac{2 + sT}{2 - sT} \right)^2 - 1.8839 \left(\frac{2 + sT}{2 - sT} \right) + 0.8869} \\ &= \frac{s + 1}{s^2 + 12s + 32} \end{aligned}$$

Метод инвариантности импульсной характеристики

В основе метода лежит идея, что импульсная характеристика непрерывной системы и эквивалентной дискретной системы должны совпадать. Метод также носит названия стандартного Z -преобразования.

Передаточная функция непрерывной системы:

$$W(s) = \sum_i^N \frac{c_i}{s + d_i}, \quad \text{где } c_i = W(s)(s + d_i) \Big|_{s = -d_i}$$

Эквивалентная дискретная система:

$$W(z) = \frac{|W(j\omega)|}{|W_d(e^{j\omega T})|} W_d(z)$$

где $W_d(z)$ получена заменой полюсов, а $\omega = 1$ рад/с.

Импульсные характеристики непрерывной и дискретной систем:

$$h(t) = \sum_{i=1}^N c_i e^{-d_i t} u(t), \quad h(kT) = \sum_{i=1}^N c_i e^{-d_i kT} u(kT)$$

Передаточная функция дискретной системы:

$$\begin{aligned} W(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^N c_i z^{-k} e^{-d_i kT} \\ &= \sum_{i=1}^N c_i \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1} e^{-d_i T})^k = \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{1 - z^{-1} e^{-d_i T}} \end{aligned}$$

Замена действительных полюсов:

$$\frac{1}{s + d_j} \rightarrow \frac{1}{1 - z^{-1} e^{-d_j T}}$$

Разложим передаточную функцию в виде простых дробей:

$$W(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 12s + 32}$$

$$c_1 = W(s)(s + 4) = \frac{(s + 1)(s + 4)}{(s + 4)(s + 8)} = \frac{s + 1}{s + 8} \Bigg|_{s = -4} = -0.75$$

$$c_2 = W(s)(s + 8) = \frac{(s + 1)(s + 8)}{(s + 4)(s + 8)} = \frac{s + 1}{s + 4} \Bigg|_{s = -8} = 1.75$$

$$W(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 12s + 32} = \frac{s + 1}{(s + 4)(s + 8)}$$

$$= \frac{c_1}{s + d_1} + \frac{c_2}{s + d_2} = \frac{-0.75}{s + 4} + \frac{1.75}{s + 8}$$

Замена действительных полюсов:

$$\begin{aligned}
 W_d(z) &= \frac{-0.75}{1 - z^{-1} e^{-4T}} + \frac{1.75}{1 - z^{-1} e^{-8T}} \\
 &= \frac{-0.75}{1 - 0.9608 z^{-1}} + \frac{1.75}{1 - 0.9231 z^{-1}} \\
 &= \frac{1 - 0.989 z^{-1}}{1 - 1.884 z^{-1} + 0.8869 z^{-2}} = \frac{z^2 - 0.989 z}{z^2 - 1.884 z + 0.8869}
 \end{aligned}$$

Получение эквивалентной дискретной системы:

$$W(z) = \frac{|W(j\omega)|}{|W_d(e^{j\omega T})|} W_d(z) = 0.0090 W_d(z) = \frac{0.009004 z^2 - 0.008906 z}{z^2 - 1.884 z + 0.8869}$$

В MATLAB W_d получается более высокого порядка, чем есть на самом деле, чтобы это обойти надо к ней применить функцию `minreal`

Замена комплексных полюсов:

$$\frac{c_i}{s + d_i} + \frac{c_i^*}{s + d_i^*} = \frac{(c_i + c_i^*)s + c_i d_i^* + c_i^* d_i}{s^2 + (d_i + d_i^*)s + d_i d_i^*}$$

и при

$$c_i = g_i \pm j h_i, \quad d_i = \sigma_i \pm j \Omega_i$$

получим

$$\frac{(c_i + c_i^*)s + c_i d_i^* + c_i^* d_i}{s^2 + (d_i + d_i^*)s + d_i d_i^*} = \frac{2g_i s + 2(\sigma_i g_i + \Omega_i h_i)}{s^2 + 2\sigma_i s + (\sigma_i^2 + \Omega_i^2)}$$

Заменяя в каждом слагаемом комплексные полюса получим:

$$\frac{c_i}{s + d_i} + \frac{c_i^*}{s + d_i^*} \rightarrow \frac{2g_i - z^{-1} e^{-\sigma_i T} [2g_i \cos(\Omega_i T) - 2h_i \sin(\Omega_i T)]}{1 - 2z^{-1} e^{-\sigma_i T} \cos(\Omega_i T) + z^{-2} e^{-2\sigma_i T}}$$

Разложим передаточную функцию в виде простых дробей:

$$W(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2} = \frac{s+1}{(s+1-j)(s+1+j)}$$

$$c_1 = W(s)(s+1-j) = \frac{s+1}{s+1+j} \Big|_{s=-(1-j)} = 0.5$$

$$c_1^* = W(s)(s+1+j) = \frac{s+1}{s+1-j} \Big|_{s=-(1+j)} = 0.5$$

$$W(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2} = \frac{c_1}{s+d_1} + \frac{c_1^*}{s+d_1^*} = \frac{0.5}{s+1-j} + \frac{0.5}{s+1+j}$$

Замена комплексных полюсов:

$$\begin{aligned}
 W_d(z) &= \frac{0.5}{s+1-j} + \frac{0.5}{s+1+j} \\
 &= \frac{2g_i - z^{-1} e^{-\sigma_i T} [2g_i \cos(\Omega_i T) - 2h_i \sin(\Omega_i T)]}{1 - 2z^{-1} e^{-\sigma_i T} \cos(\Omega_i T) + z^{-2} e^{-2\sigma_i T}} \\
 &\text{при } g_1 = 0.5, \quad h_1 = 0.0, \quad \sigma_1 = 1.0, \quad \Omega_1 = 1.0 \\
 &= \frac{1 - 0.99z^{-1}}{1 - 1.98z^{-1} + 0.9802z^{-2}} = \frac{z^2 - 0.99z}{z^2 - 1.98z + 0.9802}
 \end{aligned}$$

Получение эквивалентной дискретной системы:

$$W(z) = \frac{|W(j\omega)|}{|W_d(e^{j\omega T})|} W_d(z) = 0.0099 W_d(z) = \frac{0.01z^2 - 0.0099z}{z^2 - 1.98z + 0.9802}$$

Метод согласованного Z-преобразования

Непосредственное отображение нулей и полюсов непрерывной системы в нули и полюса эквивалентной дискретной системы.

Передаточная функция непрерывной системы:

$$W(s) = \prod_{i=1}^m (s + q_i) / \prod_{j=1}^n (s + p_j)$$

Эквивалентная дискретная система:

$$W(z) = \frac{|W(j\omega)|}{|W_d(e^{j\omega T})|} W_d(z)$$

где $W_d(z)$ получена заменой нулей и полюсов, а $\omega = 1$ рад/с.

Замена действительных нулей и полюсов:

$$s + a_j \rightarrow 1 - z^{-1} e^{-a_j T}$$

Замена комплексных нулей и полюсов:

$$\begin{aligned}(s + a_j - j b_j)(s + a_j + j b_j) &\rightarrow (1 - z^{-1} e^{-(a_j - j b_j) T}) (1 - z^{-1} e^{-(a_j + j b_j) T}) \\ &\rightarrow 1 - z^{-1} e^{-a_j T} (e^{-b_j j T} + e^{b_j j T}) + z^{-2} e^{-2 a_j T} \\ &\rightarrow 1 - 2 z^{-1} e^{-a_j T} \cos(b_j T) + z^{-2} e^{-2 a_j T}\end{aligned}$$

Метод не всегда применим, несмотря на простоту

(например, если нули непрерывной системы соответствуют частотам больше частоты Найквиста)

Замена действительных нулей и полюсов:

$$\begin{aligned}
 W_d(z) &= \frac{s+1}{s^2+12s+32} = \frac{s+1}{(s+4)(s+8)} = \frac{1-z^{-1}e^{-1T}}{(1-z^{-1}e^{-4T})(1-z^{-1}e^{-8T})} \\
 &= \frac{1-e^{-1T}z^{-1}}{1-(e^{-4T}+e^{-8T})z^{-1}-e^{-4T}e^{-8T}z^{-2}} \\
 &= \frac{1-0.99z^{-1}}{1-1.8839z^{-1}-0.8869z^{-2}} = \frac{z^2-0.99z}{z^2-1.8839z-0.8869}
 \end{aligned}$$

Получение эквивалентной дискретной системы:

$$W(z) = \frac{|W(j\omega)|}{|W_d(e^{j\omega T})|} W_d(z) = 0.0095 W_d(z) = \frac{0.009468z^2 - 0.009374z}{z^2 - 1.8839z - 0.8869}$$

Замена действительных нулей и комплексных полюсов:

$$\begin{aligned}
 W_d(z) &= \frac{s+1}{s^2+2s+2} = \frac{s+1}{(s+1+1j)(s+1-1j)} \\
 &= \frac{1-z^{-1}e^{-1T}}{\left(1-2z^{-1}e^{-1T}\cos(1T)+z^{-2}e^{-2T}\right)} \\
 &= \frac{1-0.99z^{-1}}{1-1.98z^{-1}+0.9802z^{-2}} = \frac{z^2-0.99z}{z^2-1.98z+0.9802}
 \end{aligned}$$

Получение эквивалентной дискретной системы:

$$W(z) = \frac{|W(j\omega)|}{|W_d(e^{j\omega T})|} W_d(z) = 0.01 W_d(z) = \frac{0.00995z^2 - 0.009851z}{z^2 - 1.98z + 0.9802}$$

Непрерывная система:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \omega(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) + v(t) \end{cases}$$

где

$$\omega(t) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q})$$

$$v(t) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R})$$

Эквивалентная дискретная система:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k) + \omega(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_d \mathbf{u}(k) + v(k) \end{cases}$$

где

$$\omega(k) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_d)$$

$$v(k) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_d)$$

Допущения:

- входной и выходные сигналы квантуются по времени;
- v интегрируем.

Решение дифференциального уравнения:

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_{\tau=0}^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

при $\Phi(t) = e^{-\mathbf{A}t}$

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}(0) + \int_{\tau=0}^t \Phi(t - \tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

где:

$\Phi(t)$ - фундаментальная матрица решений (переходная матрица).

Считаем что входной сигнал постоянен на шаге квантования:

$$u(t) = u(kT_0) \quad \text{на интервале} \quad kT_0 \leq t < (k+1)T_0$$

Уравнение состояния на интервале $kT_0 \leq t < (k+1)T_0$:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - kT_0) \mathbf{x}(kT_0) + u(kT_0) \int_{\tau=0}^t \Phi(t - \tau) \mathbf{B} \, d\tau$$

В момент времени $t = (k+1)T_0$ состояние:

$$\mathbf{x}((k+1)T_0) = \Phi(T_0) \mathbf{x}(kT_0) + u(kT_0) \int_{kT_0}^{(k+1)T_0} \Phi((k+1)T_0 - \tau) \mathbf{B} \, d\tau$$

Проведя замену $q = (k + 1)T_0 - \tau$ получим:

$$\mathbf{x}(k + 1) = \Phi(T_0) \mathbf{x}(k) + u(k) \int_0^{T_0} \Phi(q) \mathbf{B} dq$$

В итоге получим соответствие:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d &= \Phi(T_0) = e^{\mathbf{A}T_0} & \mathbf{B}_d &= \int_0^{T_0} \Phi(q) dq \\ \mathbf{C}_d &= \mathbf{C} & \mathbf{D}_d &= \mathbf{D} \\ \mathbf{Q}_d &= \int_0^{T_0} \Phi(q) \mathbf{Q} \Phi^T(q) dq & \mathbf{R}_d &= \frac{1}{T} \mathbf{R} \end{aligned}$$

Передаточная функция с действительными полюсами:

$$W(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 12s + 32}$$

В переменных состояния:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -12 & -32 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_d &= \begin{bmatrix} 0.8854 & -0.3017 \\ 0.009427 & 0.9985 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_d &= \begin{bmatrix} 0.009427 \\ 4.713 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{C}_d &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \mathbf{D}_d &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Передаточная функция с комплексными полюсами:

$$W(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 2}$$

В переменных состояния:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_d &= \begin{bmatrix} 0.9801 & -0.0198 \\ 0.0099 & 0.9999 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_d &= \begin{bmatrix} 0.0099 \\ 4.967 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{C}_d &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \mathbf{D}_d &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- `tf2ss` - получение формы записи системы в переменных состояния из передаточной функции;
- `ss2tf` - получение формы записи системы в виде передаточной функции из пространства состояний;
- `tfdata` - получение векторов с коэффициентами полинома числителя и знаменателя передаточной функции;
- `c2d` - получение эквивалентной дискретной системы;
- `d2c` - получение эквивалентной непрерывной системы;
- `zpk` - задание передаточной функции по значениям нулей, полюсов и коэффициента усиления;
- `minreal` - редуцирование модели путем сокращения нулей и полюсов системы близких по значению.

Частотная характеристика

Частотная характеристика $W(j\omega)$ это реакция системы на гармоническое $x(t) = \cos(\omega t)$ входное воздействие с нулевыми начальными условиями, и аналитически может быть записана как:

$$W(j\omega) = W(s) \Big|_{s = j\omega}$$

Численно представляет собой вектор комплексных значений, соответствующих заданному вектору частот ω :

$$W(j\omega) = U(\omega) + j V(\omega)$$

Хотим получить аналогичное и для дискретных систем

Вещественная гармоническая последовательность:

$$\begin{aligned}x[k] = x(t) \Big|_{t = kT} &= \cos(\omega t + \phi) \Big|_{t = kT} \\ &= \cos(\omega kT + \phi) \\ &= \cos(\Omega k + \phi)\end{aligned}$$

где:

$\Omega = \omega T$ - дискретная частота.

Комплексная гармоническая последовательность:

$$x[k] = e^{j\Omega k} = \cos(\Omega k) + j \sin(\Omega k)$$

Переходим к частотной характеристике следующей заменой:

$$W(z) \Big|_{z = e^{j\omega T}} = W(e^{j\omega T}) = W(e^{j\Omega})$$

Частотная характеристика (дискретной системы)

Частотная характеристика $W(e^{j\Omega})$ это реакция системы на дискретное гармоническое входное ($x[k] = \cos(\Omega k)$ или $x[k] = e^{j\Omega k}$) воздействие с нулевыми начальными условиями, и аналитически может быть записана как:

$$W(e^{j\Omega}) = W(z) \Big|_{z = e^{j\Omega}}$$

АЧХ и ФЧХ:

$$\begin{aligned} \text{АЧХ} &: \left| W(e^{j\Omega}) \right| \\ \text{ФЧХ} &: \phi = \angle W(e^{j\Omega}) \end{aligned}$$

Выход системы для $x[k] = \cos(\Omega k)$:

$$y[k] = \left| W(e^{j\Omega}) \right| \cos(\Omega k + \phi)$$

Выход системы области для $x[k] = e^{j\Omega k}$:

$$y[k] = \left| W(e^{j\Omega}) \right| e^{j\Omega k} e^{j\phi} = \left| W(e^{j\Omega}) \right| e^{j\Omega k + j\phi}$$

АЧХ и ФЧХ, ЛАФЧХ (диаграмма Боде), АФЧХ (годограф Найквиста)
вычисляются аналогично случаю непрерывных систем

Что же изменится с заменой ω на Ω ?

Аргумент частотной характеристики с $\Omega + 2\pi m$:

$$e^{j(\Omega+2\pi m)} = e^{j\Omega} e^{j2\pi m} = e^{j\Omega}$$

Аргумент $e^{j\Omega}$ частотной характеристики периодичен с периодом 2π , соответственно $W(e^{j\Omega})$, $|W(e^{j\Omega})|$ и $\angle W(e^{j\Omega})$ также периодичны.

Аргумент частотной характеристики с $\pi \pm \Omega$:

$$\begin{aligned} e^{j(\pi+\Omega)} &= e^{j\pi} e^{j\Omega} = -1 \left(\cos(\Omega) + j \sin(\Omega) \right) \\ e^{j(\pi-\Omega)} &= e^{j\pi} e^{-j\Omega} = -1 \left(\cos(-\Omega) + j \sin(-\Omega) \right) \\ &= -1 \left(\cos(\Omega) - j \sin(\Omega) \right) \end{aligned}$$

Дискретная частота Ω симметричная относительно π , и ее значения уникальны на интервале $0 \dots \pi$.

Справедливы следующие неравенства:

$$0 \leq \Omega < \pi$$

$$0 \leq \omega T < \pi$$

$$0 \leq \omega < \pi/T$$

$$0 \leq \omega < f_s \pi$$

$$0 \leq 2\pi f < f_s \pi$$

$$0 \leq f < f_N = f_s/2$$

где:

$f_s = 1/T$ - частота дискретизации (Гц);

$f_N = f_s/2$ - частота Найквиста (Гц).

Дискретная частота Ω определена (в Гц) до частоты Найквиста f_N , все частотные характеристики определены также до частоты Найквиста.

Непрерывные	Дискретные
ω непрерывна	$\Omega = \omega T$ дискретна
ω определена от 0 до $+\infty$	Ω определена от 0 до $+\infty$, периодична с периодом 2π , симметрична относительно π
Частотная характеристика $W(j\omega)$ определена от 0 до $+\infty$	Частотная характеристика $W(e^{j\Omega})$ определена от 0 до π (f_N Гц)

ЗАЧАСТУЮ (ПОЧТИ ВСЕГДА)

$W(e^{j\Omega})$ обозначают $W(e^{j\omega})$, понимая, что ω дискретная частота

Синтез дискретных систем в частотной области, т.е. подбор регулятора по желаемой ЛАХ, по сути, невозможен

1. Моделирование как метод научного познания	4
2. Математическое моделирование непрерывных систем	29
3. Численные методы решения задачи Коши	69
4. Математическое моделирование дискретных систем	102
5. Имитационное моделирование	146

Имитационное моделирование

Алгоритм имитационного моделирования воспроизводит процесс функционирования системы во времени. Применяется для решения сложных задач.

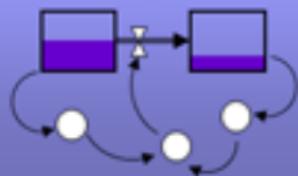
Виды имитационного моделирования:

- системная динамика;
- дискретно-событийное моделирование;
- агентное моделирование;
- методы Монте-Карло (стохастические).

Имитационное моделирование применяют при наличии в системе причинно-следственных связей, стохастических процессов, трудноописываемых нелинейностей.

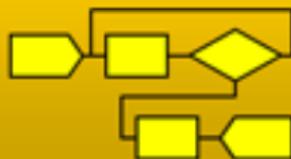
Системная динамика

Связанные переменные,
Накопители, Обратные связи



Дискретно-событийное

Заявки, Ресурсы, Процессы
(последовательности операций)

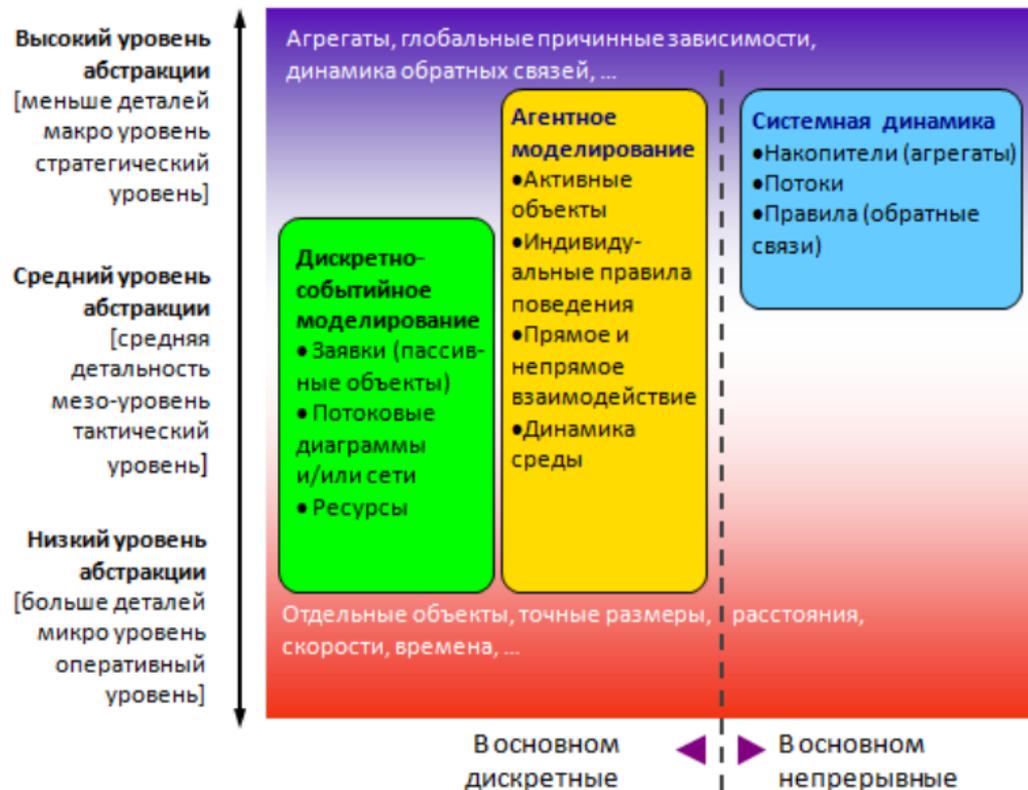


СИСТЕМА

Индивидуальные свойства
и правила поведения.
Прямое или косвенное
взаимодействие



Агентное моделирование

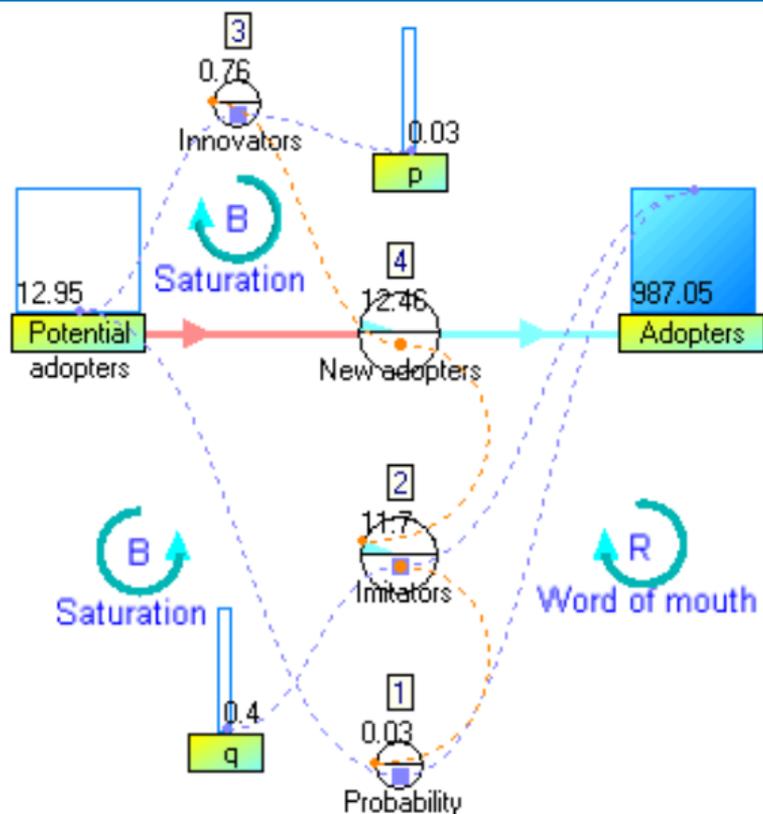


Системная динамика

Вид имитационного моделирования (по факту, подход к исследованию) сложных систем, поведение которых зависит от времени и от структуры элементов системы (модели), включая причинно-следственные связи, цепи обратной связи, элементов запаздывания, и др.

Модель для системной динамики, как правило, состоит из следующих элементов:

- уровни - характеризуют накопление некоторой величины;
- потоки - характеризуют скорости изменения уровней;
- функции решений (вентили) - зависимость потоков от уровней;
- каналы информации - соединяют функции решений с уровнями;
- линии запаздывания;
- вспомогательные переменные.



Дискретно-событийное моделирование

Вид имитационного моделирования для исследования систем, функционирование которых представляется в виде хронологической последовательности событий.

Модель дискретно-событийного моделирования, как правило, состоит из следующих элементов:

- часы;
- список событий;
- генераторы случайных чисел.

Процесс моделирования, как правило, заканчивается либо при возникновении некоторого события либо после прохождения заданного количества времени моделирования.

Агентное моделирование

Вид имитационного моделирования для исследования систем, состоящих из агентов (их поведение описывается), функционирование которой является результатом взаимодействия агентов (т.е. функционирование системы не описывается).

При формировании моделей лежат три основные идеи:

- объектная ориентированность;
- обучаемость агентов (эволюция);
- объем вычислений при моделировании.

Свойства агентов:

- интеллектуальность;
- наличие цели функционирования.

Генератор случайных чисел

Аппаратное устройство и или программный алгоритм или их комбинация для генерации случайных чисел для задач имитационного и математического моделирования.

Генераторы случайных чисел, реализуемые на аппаратном уровне (физическом) называются истинными (или физическими). В данном случае природой случайности является неопределенность физического процесса, протекающего в природе

Генераторы случайных чисел, использующие программные алгоритмы для формирования случайных значений называются генераторами псевдо-случайных чисел.

Требования, предъявляемые к ГСЧ / ГПСЧ:

- ресурсы для настройки и запуска генератора;
(у физических могут быть большими)
- длительность периода без закливания;
(актуально для программных)
- экономическая себестоимость;
(у физических большая себестоимость)
- скорость генерации случайных чисел;
(у программных больше)
- возможность воспроизведения случайных последовательностей;
(у физических отсутствует)
- портируемость.
(для физических неприменимо)

Методы Монте-Карло

Методы Монте-Карло - это наименование подхода для реализации ряда задач имитационного моделирования. Суть подхода заключается в многократном моделировании некоторой модели с различными реализациями случайных процессов. В результате накопления статистики, как правило, определяются стохастические характеристики исследуемой модели или результатов и т.п.