




Московский государственный технический университет
Кафедра “Системы автоматического управления”






Математические основы теории автоматического управления

Детерминированный математический аппарат

Андрей Леонидович Масленников

-  Численные методы линейной алгебры. Лабораторный практикум.
Белов С.А., Злотых Н.Ю.
И.: Нижегородский государственный университет, 2005, 58 с.
-  Матрицы и вычисления.
Воеводин В.В., Кузнецов А.Ю.
М.: Наука, 1984, 320 с.
-  Случайные процессы.
Волков И.К., С.М. Зуев, Г.М. Цветкова.
И.: МГТУ имени Н.Э. Баумана, 1999, 448 с.
-  Теория вероятностей и математическая статистика.
Гмурман В.Е.
9-е издание. И.: Высшая школа, 2003, 479 с.

-  Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения.
Деммель Дж.
И.: Мир, 2001, 430с.
-  Математические основы теории автоматического управления. В трех томах.
Иванов В.А., Медведев В.С., Чемоданов Б.К., Ющенко А.С.
3-е издание. И.: Высшая школа, 2008.
-  Математические основы теории систем.
Певзнер Л.Д., Чураков Е.П.
И.: Высшая школа, 2009, 506 с.
-  Probability, statistics, and random processes for electrical engineering.
Leon-Garcia A.
3th Edition. Pearson Education, 2017, 818 p.

1. Дифференциальные уравнения	4
1.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.....	9
1.2. Нелинейные дифференциальные уравнения.....	29
1.3. Дифференциальные уравнения в частных производных.....	37
2. Разностные уравнения и решетчатые функции.....	43
3. Векторно-матричные преобразования.....	52
4. Числовые и функциональные ряды.....	117
5. Интегральные преобразования.....	133
6. Устойчивость.....	180
7. Линеаризация.....	212

Дифференциальные уравнения

Математический аппарат, используемый для описания физических процессов в окружающем мире. Основные виды дифференциальных уравнений:

- обыкновенные дифференциальные уравнения;
- дифференциальные уравнения в частных производных;
- стохастические дифференциальные уравнения.

Дифференциальные уравнения также классифицируют на:

- однородные и неоднородные;
- линейные и нелинейные.

Основной задачей при работе с дифференциальными уравнениями является поиск их решения.

Порядок дифференциального уравнения

Порядок дифференциального уравнения - это наивысшая степень производной. В случае системы дифференциальных уравнений речь идет о наивысшей степени каждого уравнения. В случае дифференциального уравнения в частных производных речь идет о максимальной производной по каждой координате.

Задача Коши

Задача Коши - это задача поиска решения любого дифференциального уравнения, которая может решаться как аналитическим способом, так и численным, однако в большинстве задач поиск аналитического решения существенно затруднен, а иногда и невозможен.

Обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = 0$$

Дифференциальные уравнения в частных производных:

$$f\left(t, x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots\right) = 0$$

Стохастические дифференциальные уравнения:

$$f\left(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, \xi\right) = 0$$

где ξ имеет случайную природу.

Линейность/нелинейность дифференциальных уравнений

Дифференциальное уравнение является линейным, если неизвестная функция и её производные входят в уравнение только в первой степени (и не перемножаются друг с другом). В противном случае дифференциальное уравнение - нелинейное.

Однородность/неоднородность дифференциальных уравнений

Линейные дифференциальные уравнения могут быть как однородными, так и неоднородными. Однородные дифференциальные уравнения не содержат свободного члена (правые части равны нулю). В противном случае дифференциальное уравнение - неоднородное.

Обыкновенное дифференциальное уравнение

Обыкновенное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = 0,$$

и если его можно разрешить относительно старшей производной, то:

$$x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n можно (методом замены переменных) привести к системе из n дифференциальных уравнений первой степени, т.е.:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),$$

решением которой будет n неизвестных функций.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений

В общем случае, если в дифференциальное уравнение входит m неизвестных функций x_1, \dots, x_m , то получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{f} \left(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)} \right) = 0,$$

где \mathbf{n} - вектор порядков производных каждой неизвестной функции.

Каноническая система обыкновенных дифференциальных уравнений

Каноническая система дифференциальных уравнений - это система, которую можно разрешить относительно старших производных:

$$\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{f} \left(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n-1)} \right)$$

Если $n_i = n$, то система дифференциальных уравнений - нормальная.

Нормальная линейная система дифференциальных уравнений

Нормальная линейная система из n дифференциальных уравнений может быть записана в следующем поэлементном виде:

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{jk}(t) x_k(t) + u_j(t)$$

где $a_{jk}(t)$ и $u_j(t)$ некоторые непрерывные функции на интервале (a, b) . Эта система может быть записана в матричном виде:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)$$

и при $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ будет однородной системой:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t)$$

Общее решение однородной нормальной линейной системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t)$$

имеет вид:

$$\xi(t) = c_1 \xi_1(t) + c_2 \xi_2(t) + \dots + c_n \xi_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k \xi_k(t)$$

и является фундаментальной системой решений.

Общее решение неоднородной системы:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)$$

может быть получено как сумма общего решения однородной системы и частного (произвольного) решения $\varphi(t)$ неоднородной системы:

$$\mathbf{x}(t) = \xi(t) + \varphi(t) = \sum_{k=1}^n c_k \xi_k(t) + \varphi(t)$$

Частное (произвольное) решение может быть найдено методом вариации произвольных постоянных или с использованием формул Коши.

Метод вариации произвольных постоянных

Метод определения частного решения неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)$$

в предположении, что c_k являются некоторыми функциями времени.

Частное решение ищется в виде:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) \xi_k(t),$$

Произведя подстановку $\varphi(t)$ в уравнение системы получим:

$$\sum_{k=1}^n \dot{c}_k(t) \xi_k(t) + \sum_{k=1}^n c_k(t) \dot{\xi}_k(t) = \mathbf{A}(t) \sum_{k=1}^n c_k(t) \xi_k(t) + \mathbf{u}(t)$$

Так как $\xi_k(t)$ являются решением однородной системы, то

$$\sum_{k=1}^n c_k(t) \dot{\xi}_k(t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) \mathbf{A}(t) \xi_k(t) = \mathbf{A}(t) \sum_{k=1}^n c_k(t) \xi_k(t)$$

уравнение

$$\sum_{k=1}^n \dot{c}_k(t) \xi_k(t) + \sum_{k=1}^n c_k(t) \dot{\xi}_k(t) = \mathbf{A}(t) \sum_{k=1}^n c_k(t) \xi_k(t) + \mathbf{u}(t)$$

можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^n \dot{c}_k(t) \xi_k(t) = \mathbf{u}(t),$$

В итоге получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно $\dot{c}_k(t)$, которая имеет единственное решение:

$$\dot{c}_k(t) = \Psi_k(t),$$

интегрируя эту систему:

$$c_k(t) = \int \Psi_k(t) dt$$

получаем частное решение:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n \xi_k(t) \int \Psi_k(t) dt$$

и общее решение неоднородной системы:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \xi_k(t) + \sum_{k=1}^n \xi_k(t) \int \Psi_k(t) dt$$

Пусть для однородной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t)$$

фундаментальная система решений $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ образует матрицу

$$\Phi_1(t) = \begin{bmatrix} \xi_{11}(t) & \cdots & \xi_{n1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{1n}(t) & \cdots & \xi_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

определитель которой представляет собой определитель Вронского, который отличен от нуля на интервале $t \in [a, b]$, следовательно, существует обратная матрица $\Phi_1^{-1}(t)$. Тогда можно составить матрицу:

$$\Phi(t, t_0) = \Phi_1(t) \Phi_1^{-1}(t_0),$$

где $\Phi(t, t_0)$ - фундаментальная матрица.

Фундаментальная матрица

$$\Phi(t, t_0) = \Phi_1(t) \Phi_1^{-1}(t_0)$$

удовлетворяет матричному однородному уравнению

$$\dot{\mathbf{x}}(t, t_0) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t, t_0)$$

Решение неоднородной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t),$$

удовлетворяющее начальным условиям $\mathbf{x}(t_0)$ получится в виде:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Если матрица \mathbf{A} является стационарной, то справедливо равенство:

$$\frac{d}{dt} \left(e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \right) = \mathbf{A} \left(e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \right)$$

где матричная экспонента

$$e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k (t-t_0)^k}{k!} = \Phi(t)$$

является фундаментальной матрицей решения для системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t),$$

а само решение можно записать в виде:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Формула Коши

Формула нахождения решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющего заданным начальным условиям $\mathbf{x}(t_0)$.

В случае нестационарной системы формула Коши имеет вид:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

В случае стационарной системы формула Коши имеет вид:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Для нормальной линейной однородной (и неоднородной) системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вычислить фундаментальную матрицу решения можно приведя матрицу \mathbf{A} к канонической форме Жордана, т.е. сделав замену

$$\eta = \mathbf{T} \mathbf{x}$$

получим систему:

$$\dot{\eta} = \mathbf{T} \mathbf{J} \mathbf{T}^{-1} \eta$$

и учитывая свойства матричной экспоненты:

$$e^{\mathbf{T} \mathbf{J} \mathbf{T}^{-1}} = \mathbf{T} e^{\mathbf{J}} \mathbf{T}^{-1}$$

получим выражение для фундаментальной матрицы решений:

$$\Phi(t - t_0) = e^{\mathbf{T} \mathbf{J} \mathbf{T}^{-1} (t - t_0)} = \mathbf{T} e^{\mathbf{J} (t - t_0)} \mathbf{T}^{-1}$$

Для q Жордановых блоков:

$$\begin{aligned}
 e^{\mathbf{J}(t-t_0)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{J}_q \end{bmatrix}^k \frac{(t-t_0)^k}{k!} \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{J}_1^k \frac{(t-t_0)^k}{k!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{J}_2^k \frac{(t-t_0)^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{J}_q^k \frac{(t-t_0)^k}{k!} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

В случае, если количество Жордановых блоков равно n , т.е. все собственные значения матрицы \mathbf{A} имеют кратность единицы, то каждый Жорданов блок является скалярным значением, а как следствие матричная экспонента становится диагональной, т.е.

$$e^{\mathbf{J}(t-t_0)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-t_0)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{bmatrix}$$

Как результат, вычисление матричной экспоненты и всей фундаментальной матрицы решений существенно упрощается.

В случае не единичной кратности собственных значений матрицы \mathbf{A} , каждый блок матричной экспоненты, соответствующий своему Жорданову блоку (размером q_i), будет определяться следующим образом (при $t_0 = 0$):

$$e^{\mathbf{J}_i(t)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{q_i-1}}{(q_i-1)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{q_i-2}}{(q_i-2)!} e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

Закон радиоактивного распада

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

где:

N - число атомов;

λ - постоянная распада.

Решение имеет вид:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Скорость распада можно определить как:

$$I(t) = -\frac{dN}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(N_0 e^{-\lambda t} \right) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = I_0 e^{-\lambda t}$$

Осцилятор Ван дер Поля

Осцилятор Ван дер Поля - это модель осцилятора с нелинейным затуханием, которая в общем виде записывается следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0$$

где:

x - координата, зависящая от времени;

μ - коэффициент, характеризующий нелинейность затухания.

В зависимости от значения μ :

$\mu < 0$ - не существует, т.к. трение не может быть отрицательным;

$\mu = 0$ - гармонический осцилятор;

$\mu > 0$ - система имеет предельный цикл.

Пример. Осцилятор Ван дер Поля

Гармонический осцилятор, с позиции механики, может быть представлен как груз массой m , подвешенный к неподвижному основанию через пружину с жесткостью k , и совершающий колебания, что математически можно записать как:

$$m \ddot{x} = -k x$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m} x$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\omega_0 x$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0 x = 0$$

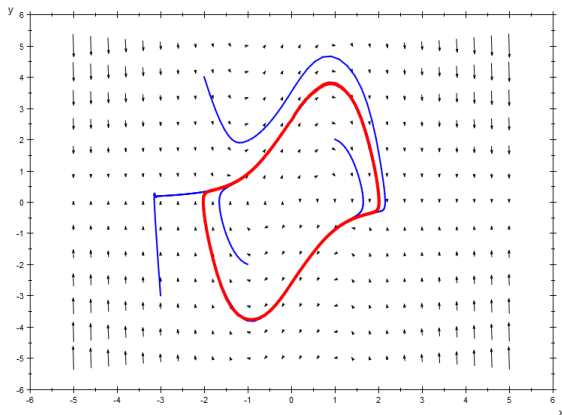
Последнее уравнение - уравнение гармонического осцилятора, решение которого записывается следующим образом:

$$x(t) = a \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Пример. Осцилятор Ван дер Поля

При $\mu > 0$ в системе появляется предельный цикл и начинаются нелинейные колебания. Чем больше значение μ , тем сильнее выражена нелинейность системы.

Предельный цикл на фазовом портрете выглядит следующим образом:



Нелинейные дифференциальные уравнения

В общем случае не имеют разработанных обобщенных методов решения. Как правило, решения получены для отдельных видов нелинейных дифференциальных уравнений или систем.

Методы решения нелинейных дифференциальных уравнений:

- метод последовательных приближений;
- метод степенных рядов;
- метод ломанных Эйлера;
(по сути, численный метод)
- метод понижения порядка;
(лагранжева механика - через первые интегралы)
- метод фазовой плоскости;
(графический - не интересен)
- метод гармонической линеаризации.
(рассмотрим позже)

Метод последовательных приближений

Заключается в формировании итерационного процесса в результате которого получается решение, по сути, наилучшим образом аппроксимирующее истинное решение нелинейного дифференциального уравнения, т.е.

$$\xi_n(t) \rightarrow \xi(t) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

Метод применим во многих случаях, однако имеет ряд недостатков:

- на k -ой итерации может не вычисляться интеграл, в результате чего процесс решения останавливается;
- в зависимости от характера истинного решения и выбранных начальных условий, метод может иметь большую скорость сходимости;
- почти всегда решение получается в виде бесконечного ряда.

Для дифференциального уравнения первого порядка:

$$\ddot{x} = f(t, x)$$

решение $\xi(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $x(t_0)$, имеет вид:

$$\xi(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, \xi(\tau)) d\tau$$

Для решения дифференциального уравнения методом последовательных приближений выберем некоторую удобную функцию $\xi_0(t)$ и вычислим решение на первой итерации:

$$\xi_1(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, \xi_0(\tau)) d\tau$$

Используя полученное первое приближение $\xi_1(t)$, вычислим второе приближение аналогичным образом:

$$\xi_2(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, \xi_1(\tau)) d\tau$$

и так далее, что в общем случае записывается как:

$$\xi_n(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, \xi_{n-1}(\tau)) d\tau$$

Теоретически $n \rightarrow \infty$, однако на практике вычисляется конечное количество приближений.

Метод ломанных Эйлера

По сути, представляет собой простейший численный метод решения дифференциальных уравнений, в основе которых лежит аппроксимация (пусть и нелинейной) функции производной первого порядка на небольшом по времени участке решения $[t_k, t_{k+1}]$.

В случае метода Эйлера производная аппроксимируется как:

$$\frac{x - x_0}{t - t_0} = f(t_0, x_0)$$

Метод степенных рядов

В основе метода идея разложения правых частей дифференциальных уравнений в степенной ряд с неопределенными коэффициентами, определение которых и является предметом вычислений.

Например, возьмем дифференциальное уравнение:

$$\ddot{y} - x y = 0$$

с начальными условиями

$$y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0$$

Решение ищем в виде:

$$y(t) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

Для решения, заданного в виде:

$$y(t) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

запишем:

$$\dot{y}(t) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots$$

$$\ddot{y}(t) = 2c_2 + 6c_3 x + \dots$$

Подставив в исходное уравнение, получим:

$$(2c_2 + 6c_3 x + \dots) - x(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) = 0$$

$$2c_2 + x(6c_3 - c_0) + x^2(12c_4 - c_1) + \dots = 0$$

откуда следует, что:

$$2c_2 = 0, \quad 6c_3 - c_0 = 0, \quad 12c_4 - c_1 = 0, \quad \dots$$

Подставив начальные условия в уравнения:

$$\dot{y}(t) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots$$

$$\ddot{y}(t) = 2c_2 + 6c_3 x + \dots$$

определим

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = 1/6, \quad \dots$$

откуда решение получится в виде:

$$y(t) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots = 1 + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Дифференциальные уравнения в частных производных

В общем случае имеют следующий вид:

$$F \left(x_1, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots \right) = 0$$

Дифференциальные уравнения в частных производных бывают линейными и нелинейными, однородными и неоднородными, при этом единственность решения гарантировать нельзя в принципе.

Порядок дифференциального уравнения в частных производных определяется максимальной степенью производной по каждой переменной.

Размерность дифференциального уравнения в частных производных определяется количеством переменных.

Уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

где:

$u(t)$ - температура;

α - постоянная теплопроводности.

Уравнение колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

где:

$u(t, x)$ - перемещение струны;

c - скорость распространения волны.

Уравнение Навье-Стокса

Это дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее движение вязкой ньютоновской жидкости, которое активно применяется в задачах гидродинамики и имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} + \nu \Delta \bar{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \bar{f}$$

где:

- ∇ - оператор набла;
- Δ - векторный оператор Лапласа;
- ρ - плотность;
- p - давление;
- \bar{f} - поле массовых сил;
- ν - коэффициент кинематической вязкости;
- \bar{v} - векторное поле скоростей.

Уравнение Эйлера-Лагранжа

Это дифференциальное уравнение в частных производных используется в задачах оптимизации и лагранжевой механики и является основой вариационного исчисления.

Пусть задан функционал

$$J = \int_a^b F(x, f(x), \dot{f}(x)) dx$$

где $F(\cdot)$ функция Лагранжа (лагранжиан) с непрерывными частными производными. Если J достигает экстремума на некоторой $f(\cdot)$ тогда справедливо уравнение Эйлера-Лагранжа, которое имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{f}} = 0$$

Уравнение Пуассона

Это дифференциальное уравнение в частных производных используется в задачах электростатики, гидродинамики и др., и имеет вид:

$$\Delta \varphi = f$$

В Евклидовом пространстве в декартовых координатах:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi(x, y, z) = f(x, y, z)$$

Аналитические подходы на практике не используются, за очень редким исключением, ввиду сложности решения.

Основными численными методами решения дифференциальных уравнений в частных производных можно записать:

- метод конечных разностей;

(основная идея в замене производной разностной схемой - классический подход методов численного дифференцирования)

- метод конечных элементов;

(задачи механики сплошной среды с разбиением области решения на подобласти и аппроксимацией решения, как правило полиномиальной функцией)

- метод конечных объемов.

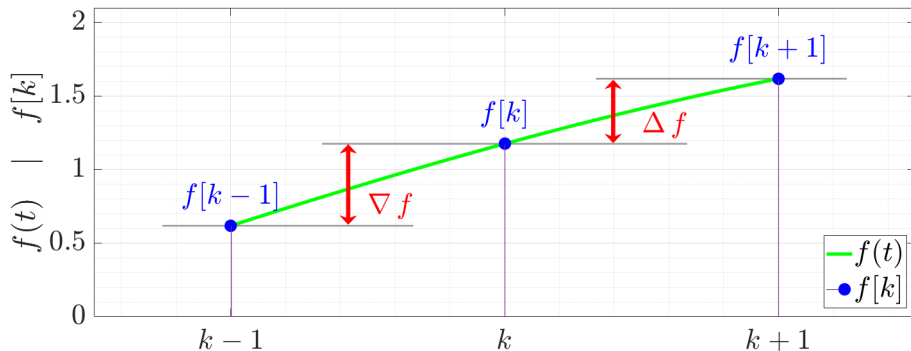
(задачи термо- и газодинамики)

1. Дифференциальные уравнения.....	4
2. Разностные уравнения и решетчатые функции.....	43
3. Векторно-матричные преобразования.....	52
4. Числовые и функциональные ряды.....	117
5. Интегральные преобразования.....	133
6. Устойчивость.....	180
7. Линеаризация.....	212

Решетчатая функция

Функция, значения которой определены в моменты времени kT .

$$f[k] = f(t) \Big|_{t = kT}$$



Обратная разность первого порядка:

$$\nabla f[k] = f[k] - f[k - 1]$$

Прямая разность первого порядка:

$$\Delta f[k] = f[k + 1] - f[k]$$

Обратная разность второго порядка:

$$\nabla^2 f[k] = \nabla f[k] - \nabla f[k - 1] = f[k] - 2f[k - 1] + f[k - 2]$$

Прямая разность второго порядка:

$$\Delta^2 f[k] = \Delta f[k + 1] - \Delta f[k] = f[k + 2] - 2f[k + 1] + f[k]$$

Обратная разность n -го порядка:

$$\nabla^n f[k] = \nabla^{n-1} f[k] - \nabla^{n-1} f[k-1]$$

Прямая разность n -го порядка:

$$\Delta^n f[k] = \Delta^{n-1} f[k+1] - \Delta^{n-1} f[k]$$

Вычисление обратной разности n -го порядка:

$$\nabla^n f[k] = \sum_{v=0}^n (-1)^v C_n^v f[k-v], \quad C_n^v = \frac{n!}{v!(n-v)!}$$

Вычисление прямой разности n -го порядка:

$$\Delta^n f[k] = \sum_{v=0}^n (-1)^v C_n^v f[k+n-v]$$

Неполная сумма:

$$\sigma_0[k] = \sum_{i=0}^{k-1} f[i] = \sum_{v=1}^k f[k-v]$$

Полная сумма:

$$\sigma[k] = \sigma_0[k] + f[k] = \sum_{v=1}^k f[k-v] + f[k] = \sum_{v=0}^k f[v]$$

Прямая/обратная разности являются аналогом производной
Неполная/полная суммы являются аналогом интеграла
Разностные уравнения являются аналогом дифференциальных

В виде разностной схемы:

$$\alpha_0 \nabla^n f[k] + \alpha_1 \nabla^{n-1} f[k] + \dots + \alpha_n f[k] = 0$$

В каноническом виде:

$$a_0 f[k] + a_1 f[k-1] + \dots + a_n f[k-n] = 0$$

где

$$a_{n-r} = \sum_{i=0}^r (-1)^{n-r} \alpha_i C_{n-i}^{r-i}, \quad C_{n-i}^{r-i} = \frac{(n-i)!}{(r-i)! (n-r)!}$$

Вычисляем $f[k]$ по известным $f[k-1], f[k-2], \dots, f[k-n]$

В виде разностной схемы:

$$\alpha_n \Delta^n f[k] + \alpha_{n-1} \Delta^{n-1} f[k] + \dots + \alpha_0 f[k] = 0$$

В каноническом виде:

$$a_n f[k+n] + a_{n-1} f[k+n-1] + \dots + a_0 f[k] = 0$$

где

$$a_{n-r} = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \alpha_i C_{n-i}^{r-i}, \quad C_{n-i}^{r-i} = \frac{(n-i)!}{(r-i)! (m-r)!}$$

Вычисляем $f[k+n]$ по известным $f[k+n-1], f[k+n-2], \dots, f[k]$

Однородные:

$$a_0 y[k] + a_1 y[k - 1] + \dots + a_n y[k - n] = 0$$

$$a_n y[k + n] + a_{n-1} y[k + n - 1] + \dots + a_0 y[k] = 0$$

Неоднородные:

$$\begin{aligned} a_0 y[k] + a_1 y[k - 1] + \dots + a_n y[k - n] &= \\ &= c_0 u[k] + c_1 u[k - 1] + \dots + c_m u[k - m] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n y[k + n] + a_{n-1} y[k + n - 1] + \dots + a_0 y[k] &= \\ &= c_m u[k + m] + c_{m-1} u[k + m - 1] + \dots + c_0 u[k] \end{aligned}$$

Решение разностного уравнения в общем виде:

$$y[k] = \gamma_1 \lambda_1 + \gamma_2 \lambda_2 + \dots + \gamma_n \lambda_n$$

где λ_i - корни характеристического уравнения

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

а $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ - произвольные постоянные

Условие затухающего решения:

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Решение можно получить через дискретное преобразование Лапласа
(аналогично решению задачи Коши для непрерывного случая)

1. Дифференциальные уравнения.....	4
2. Разностные уравнения и решетчатые функции.....	43
3. Векторно-матричные преобразования.....	52
3.1. Матрицы, их свойства и основные операции.....	53
3.2. Матричные разложения.....	78
3.2.1. Спектральное разложение.....	79
3.2.2. Разложение Жордана.....	80
3.2.3. Разложение Шура.....	82
3.2.4. Сингулярное разложение.....	83
3.2.5. LU -разложение.....	85
3.2.6. LL -разложение.....	91
3.2.7. QR -разложение.....	101
4. Числовые и функциональные ряды.....	117
5. Интегральные преобразования.....	133
6. Устойчивость.....	180
7. Линеаризация.....	212

Вектор:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Матрица:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Квадратная матрица

Квадратная матрица - это матрица, количество строк и столбцов которой одинаково и равно n :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Верхняя и нижняя треугольные матрицы

Верхней треугольной или нижней треугольной называются матрицы следующего вида (диагональные элементы - ненулевые):

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Обратная матрица

Обратной матрицей \mathbf{A}^{-1} для квадратной матрицы \mathbf{A} является матрица, произведение которой на исходную равно единичной матрице:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Невырожденная матрица

Невырожденная (неособенная, обратимая) матрица - это матрица, для которой существует обратная матрица. Невырожденность обеспечивается следующими условиями:

- строки и столбцы матрицы линейно независимы;
- ранг матрицы равен ее размерности;
- определитель матрицы не равен нулю.

Матрица, не удовлетворяющая этим условиям, называется вырожденной (сингулярной, необратимой).

Транспонированная матрица

Для матрицы \mathbf{A} размерностью $n \times m$ транспонированной матрицей \mathbf{A}^T будет матрица с размерностью $m \times n$, где каждый элемент матрицы \mathbf{A}^T определяется следующим образом:

$$\mathbf{A}_{ij}^T = \mathbf{A}_{ji}$$

Симметричная матрица

Квадратная матрица \mathbf{A} является симметричной, если:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$$

Кососимметричная матрица

Квадратная матрица \mathbf{A} является кососимметричной (при условии, что диагональные элементы равны нулю), если:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$$

- двойное транспонирование:

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

- транспонирование суммы:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

- транспонирование произведения:

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

- транспонирование матрицы умноженной на скаляр:

$$(\mathbf{A} \lambda)^T = \lambda \mathbf{A}^T$$

- транспонирование обратной матрицы:

$$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$$

- определитель транспонированной матрицы:

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$$

Эрмитова матрица

Эрмитова матрица - это квадратная матрица, в общем случае состоящая из комплексных чисел, которая равна своей эрмитово-сопряженной (сопряженно-транспонированной матрице) и равна транспонированной комплексно-сопряженной матрице, т.е.:

$$\mathbf{A} = (\bar{\mathbf{A}})^T = \mathbf{A}^*,$$

где $\bar{z} = a - jb$ - комплексно-сопряженное число для $z = a + jb$, применяемый к каждому элементу матрицы.

Пример:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2+j \\ 2-j & 7 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 2-j \\ 2+j & 7 \end{bmatrix} \quad (\bar{\mathbf{A}})^T = \begin{bmatrix} 5 & 2+j \\ 2-j & 7 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^*$$

\mathbf{A}^* это и транспонирование и поэлементное комплексное сопряжение

Унитарная матрица

Унитарная матрица - это квадратная матрица, в общем случае состоящая из комплексных чисел, произведение которой на эрмитово-сопряженную матрицу равно единичной матрице, т.е.:

$$\mathbf{U}^* \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^* = \mathbf{I}$$

Ортогональная матрица

Ортогональная матрица - это унитарная матрица, но только с вещественными числами, для которой справедливо:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I},$$

и как следствие:

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$$

Нормальная матрица

Нормальная матрица - это квадратная матрица \mathbf{A} , в общем случае состоящая из комплексных чисел, для которой справедливо следующее соотношение:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^*,$$

где \mathbf{A}^* - сопряженно-транспонированная матрица, а для матрицы с исключительно вещественными числами:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T$$

Основные свойства нормальной матрицы:

- нормальная матрица диагонализуема через унитарные матрицы, т.е. представима в виде:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}$$

где \mathbf{D} - диагональная матрица.

- нормальная матрица с действительными собственными значениями является эрмитовой матрицей.

Разреженная матрица

Разреженная матрица - это матрица, которая преимущественно состоит из нулевых значений, что зачастую проявляется в задачах решения систем дифференциальных уравнений в частных производных. Такие системы называются плохо обусловленными или некорректно поставленными.

“Разреженность” существенно усложняет процесс поиска решения (может приводить к конфликту больших и малых чисел и/или вырожденности матрицы), а также требует большого объема оперативной памяти для своего хранения.

В качестве решения проблемы использования разреженных матриц является применение метода регуляризации Тихонова, который используется в задачах поиска численного решения СЛАУ и оптимизационных задачах.

Матричная экспонента

Матричная экспонента (экспоненциальная матрица) $e^{\mathbf{A}}$ - это матричная функция от квадратной матрицы, которая определяется степенным рядом следующим образом:

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k$$

Матричная экспонента обладает рядом свойств:

- $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$
- $e^{\mathbf{A}^T} = (e^{\mathbf{A}})^T$
- $e^{\mathbf{YX} \mathbf{Y}^{-1}} = \mathbf{Y} e^{\mathbf{X}} \mathbf{Y}^{-1}$, если \mathbf{Y} - невырожденная

Квадратный корень из матрицы

Матрица **B** называется квадратным корнем из матрицы **A**, если:

$$\mathbf{B}\mathbf{B} = \mathbf{A}$$

Методы вычисления квадратного корня из матрицы **A**:

- через явные формулы;
(только для малых порядков)
- с использованием спектрального разложения матрицы, а затем:

$$\sqrt{\mathbf{A}} = \mathbf{V}\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{V}^{-1}$$

(проблемы нахождения спектрального разложения)

- с использованием разложения в форму Жордана;
- метод Денмана-Биверса;
(сходимость не гарантирована)
- вавилонский метод.
(сходимость не гарантирована)
- и др.

Метод Денмана-Биверса

Итерационный метод вычисления квадратного корня (в том числе и для матрицы), т.е. матрицы \mathbf{B} для матрицы \mathbf{A} , для которого после инициализации:

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{I}$$

запускается итерационный процесс (с фиксированным, т.е. заданным максимальным количеством итераций), на каждой итерации которого вычисляются:

$$\mathbf{Y}_{k+1} = 0.5 (\mathbf{Y}_k + \mathbf{Z}_k^{-1})$$

$$\mathbf{Z}_{k+1} = 0.5 (\mathbf{Z}_k + \mathbf{Y}_k^{-1})$$

$$\mathbf{B}_{k+1} = 2\mathbf{B}_{k-1} - \mathbf{X}_k \mathbf{Z}_k \mathbf{B}_k$$

где $\mathbf{B}_0 = \mathbf{Z}_{k-1}^{-1}$.

Вавилонский метод

Итерационный метод вычисления квадратного корня (в том числе и для матрицы), т.е. матрицы \mathbf{B} для матрицы \mathbf{A} , для которого после инициализации:

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{I}$$

запускается итерационный процесс (с фиксированным, т.е. заданным максимальным количеством итераций), на каждой итерации которого вычисляется:

$$\mathbf{B}_{k+1} = 0.5 (\mathbf{B}_k + \mathbf{A} + \mathbf{B}_k^{-1})$$

Преимуществом вавилонского метода является вычисление только одной обратной матрицы на каждом шаге, однако его устойчивость и сходимость существенно хуже, чем у метода Денмана-Биверса.

Минор

Минор M порядка k матрицы \mathbf{A} - это определитель квадратной матрицы, составленной из элементов матрицы \mathbf{A} с номерами строк и столбцов от 1 до k включительно, например для $k = 3$:

$$M = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix} = 104$$

Главный минор

Главный минор M матрицы \mathbf{A} - это минор матрицы \mathbf{A} для которого совпадают выбранные номера строк и столбцов.

Угловой минор

Угловой минор M матрицы \mathbf{A} порядка k - это минор, состоящий из первых k строк и k столбцов матрицы \mathbf{A} .

Базисный минор

Базисным минором матрицы \mathbf{A} называется не равный нулю минор максимального порядка (т.е. все миноры более высокого порядка равным нулю). Важным следствием является то, что все строки (столбцы), формирующие этот минор, являются линейно независимыми.

Ранг матрицы

Ранг матрицы $r = \text{rang}(\mathbf{A})$ - это скалярное значение, соответствующее порядку базисного минора матрицы \mathbf{A} . Если ранг матрицы больше нуля, то в ней r линейно независимых столбцов и строк.

Линейная независимость

Система векторов $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ является линейно независимой, т.е. ни один вектор не может быть выражен через другой, в том случае, если уравнение:

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

имеет тривиальное решение только при

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Дополнительный минор

Дополнительный минор \bar{M}_{ij} квадратной матрицы \mathbf{A} - это определитель, составленный из элементов матрицы \mathbf{A} путем удаления строк и столбцов, например, при удалении второй строки и третьего столбца:

$$\bar{M}_{23} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & \square \\ \square & \square & \square \\ 7 & 8 & \square \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = 8 - 4 = 4$$

Алгебраическое дополнение

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} матрицы \mathbf{A} это скалярное значение, определяемое следующим образом:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \bar{M}_{ij}$$

Присоединенная матрица

Присоединенная матрица $\text{adj } \mathbf{C}$ - это квадратная матрица, составленная из алгебраических дополнений матрицы \mathbf{A}^T , т.е.:

$$\text{adj } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Используя присоединенную матрицу можно вычислить обратную матрицу:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj } \mathbf{C},$$

однако, этот способ вычислительно не эффективен и на практике заменяется другими методами.

Собственные вектора и собственные значения матрицы

Собственным вектором \mathbf{x} и соответствующим ему собственным значением λ матрицы \mathbf{A} называются величины, для которых следующее равенство имеет ненулевое решение:

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

Сигнулярные значения матрицы

Сингулярные значения σ матрицы \mathbf{A} - это вещественные неотрицательные числа, которые удовлетворяют следующему равенству при векторах \mathbf{v} и \mathbf{u} единичной длины:

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \sigma \mathbf{u}$$

В общем случае определение собственных значений и собственных векторов требует решения матричного уравнения:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

что аналитически решается только для малых матриц, а численные алгоритмы не решают задачу целиком, а находят либо несколько собственных значений, либо применимы только для определенного типа матриц.

Можно использовать спектральное разложение:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^*,$$

но этот подход не всегда применим. Альтернативой могут быть другие виды разложения матриц.

Положительно определенная матрица

Положительно определенной матрицей $\mathbf{A} \succ 0$ называется эрмитова матрица, которая удовлетворяет любому из следующих условий (приведены не все возможные):

- для всех ненулевых комплексных векторов:

$$\mathbf{z}^* \mathbf{A} \mathbf{z} > 0$$

- все собственные значения матрицы \mathbf{A} положительны, т.е.

$$\lambda_i(\mathbf{A}) > 0$$

- определители всех угловых миноров положительны.
(критерий Сильвестра)

Положительная определенность очень важна для решения оптимизационных задач с матричной функцией потерь

Положительно полуопределенная матрица

Положительно полуопределенной матрицей $\mathbf{A} \succcurlyeq 0$ называется эрмитова матрица, которая удовлетворяет аналогичным условиям, но со знаком “ \succcurlyeq ” в критериях.

Отрицательно определенная матрица

Отрицательно определенной матрицей $\mathbf{A} \prec 0$ называется эрмитова матрица, которая удовлетворяет аналогичным условиям, но со знаком “ \prec ” в критериях.

Отрицательно полуопределенная матрица

Отрицательно полуопределенной матрицей $\mathbf{A} \preccurlyeq 0$ называется эрмитова матрица, которая удовлетворяет аналогичным условиям, но со знаком “ \preccurlyeq ” в критериях.

Норма матрицы

Норма матрицы - это скалярное значение, характеризующее меру объема матрицы (насколько в ней большие значения), по аналогии с нормой вектора, которая показывает длину этого вектора.

Операторная норма

Максимальная сумма значений в столбцах:

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Максимальная сумма значений в строках:

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$$

Спектральная норма $\|\mathbf{A}\|_2$ связана с $\max \sigma(\mathbf{A})$.

Векторная p -норма

В общем виде определяется следующим образом:

$$\|\mathbf{A}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^p \right)^{1/p}$$

Норма Фробениуса (евклидова норма)

Это частный случай p -нормы с $p = 2$, т.е.:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2}$$

при этом

$$\|\mathbf{A}\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^*) = \sum_k \sigma_k^2(\mathbf{A})$$

След матрицы

След матрицы $\text{tr}(\mathbf{A})$ - это скалярное значение (по факту, операция), которое равно сумме всех диагональных элементов этой матрицы, т.е.

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ii}$$

След матрицы обладает рядом свойств:

- след матрицы - это линейная операция:

$$\text{tr}(\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) = \alpha \text{tr}(\mathbf{A}) + \beta \text{tr}(\mathbf{B})$$

- след матрицы равен следу транспонированной матрицы:

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}^T)$$

- след матрицы равен сумме ее собственных значений:

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_i \lambda_i$$

- `eig` - собственные значения и собственные вектора матрицы;
- `eigs` - собственные значения и собственные вектора матрицы;
- `svds` - сингулярные значения и сингулярные вектора матрицы;
- `expm` - экспоненциальная матрица;
- `sqrtm` - квадратный корень из матрицы;
- `inv` - вычисление обратной матрицы (не рекомендуется);
- `diag` - диагональная матрица (или диагональные элементы матрицы);
- `eye` - единичная матрица;
- `gallery` - генерация особых (специфических) матриц;
- `tril` - нижняя треугольная часть матрицы;
- `triu` - верхняя треугольная часть матрицы;
- `norm` - норма матрицы или вектора;
- `sum` - суммирование элементов вектора;
- `nnz` - количество ненулевых элементов в матрице или векторе.

Матричные разложения

Разложение (декомпозиция) матрицы - это получение представления исходной матрицы в виде других матриц. Использование полученных разложений может существенно сократить объемы матричных вычислений в практических задачах.

Основные виды матричных разложений:

- на базе собственных значений и векторов;
 - спектральное разложение;
 - разложение в Жорданову нормальную форму;
 - разложение Шура (с вариациями);
 - сингулярное разложение.
- получаемые специальными алгоритмами.
(QR-, LL-, LU-разложения и др.)

Спектральное разложение матрицы

Спектральное разложение матрицы \mathbf{A} - это ее представление в виде произведения трех матриц:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^{-1},$$

где:

- \mathbf{V} - матрица с собственными векторами матрицы \mathbf{A} ;
- $\mathbf{\Lambda}$ - диагональная матрица с собственными значениями $\lambda(\mathbf{A})$.

Только матрицы, имеющие полный набор собственных значений, могут быть представлены в виде спектрального разложения.

Существует несколько подходов вычисления спектрального разложения матрицы, которые требуют больших вычислительных ресурсов.

Каноническая форма Жордана

Каноническая форма Жордана - это представление квадратной матрицы **A** в виде:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} \mathbf{J} \mathbf{C}^{-1},$$

где:

C - матрица перехода к новому базису;

J - матрица Жордана.

По сути, это разложение - обобщение спектрального разложения на случай кратных собственных значений.

Если кратность всех собственных значений матрицы **A** равна единице, то матрица **J** - диагональная. В противном случае матрица **J** является блок-диагональной и состоит из Жордановых блоков.

Каноническая форма Жордана \mathbf{J} может иметь следующий вид:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{J}_3 \end{bmatrix},$$

где соответствующие Жордановы блоки определены следующим образом:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = [\lambda_2], \quad \mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} \lambda_3 & 1 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Разложение Шура

Разложение Шура матрицы **A** - это ее представление в виде произведения трех матриц:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^*,$$

где:

U - унитарная матрица;

U* - эрмитово-сопряженная матрица;

T - верхняя треугольная матрица с $t_{ii} = \lambda_i(\mathbf{A})$.

Для случая вещественных чисел разложение имеет вид:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{T}\mathbf{V}^T,$$

где:

V - ортогональная матрица.

Сингулярное разложение

Сингулярное разложение (SVD) матрицы \mathbf{A} - это ее представление в виде произведения трех матриц:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^*,$$

где:

\mathbf{U} - унитарная матрица;

\mathbf{V} - унитарная матрица;

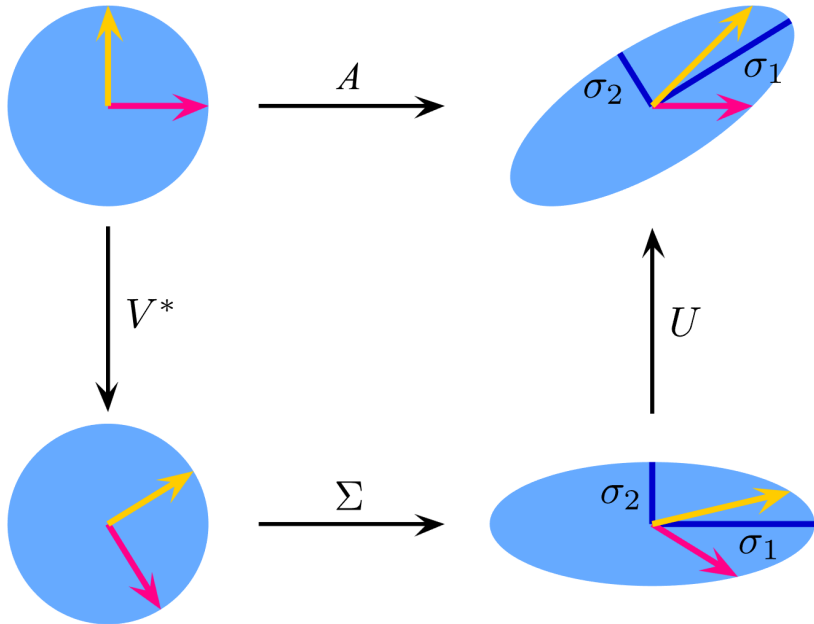
$\mathbf{\Sigma}$ - диагональная матрица с сингулярными значениями \mathbf{A} .

\mathbf{U} состоит из левых сингулярных векторов матрицы $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$

\mathbf{V} состоит из правых сингулярных векторов матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$

SVD может использоваться для нахождения псевдо обратных матриц

Алгоритмы вычисления сингулярного разложения сложны



LU-разложение

LU-разложение матрицы **A** - это ее представление в виде произведения двух матриц:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U},$$

Разложение существует при неравенстве нулю всех главных миноров матрицы **A**.

Методы вычисления LU-разложения:

- метод Гаусса;
(низкая точность для разреженных матриц, большой объем вычислений)
- алгоритм Дулиттла;
(L - унитреугольная, U - верхняя треугольная)
- алгоритм Кроута.
(L - нижняя треугольная, U - унитреугольная)

Алгоритм Дулиттла:

В результате применения алгоритма **L** получается нижняя унитарная, а **U** - верхней треугольной. Для $i = 1 \dots n$ вычисляем элементы матриц **U** и **L**:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \quad j = i, \dots, n$$

$$l_{ji} = 1$$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right), \quad j = i + 1, \dots, n$$

 Method employed in the solution of normal equations and the adjustment of a triangularization.

Doolittle, M.H.

U.S. Coast and Geodetic Survey, Report. pp. 115–120. 1878

Алгоритм Кроута:

В результате применения алгоритма **L** получается нижней треугольной, а **U** - верхней унитреугольной. Для $i = 1 \dots n$ вычисляем элементы матриц **U** и **L**:

$$l_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki}, \quad j = i, \dots, n$$

$$u_{ii} = 1$$

$$u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right), \quad j = i+1, \dots, n$$

Вычисление определителя:

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{LU}) = \det(\mathbf{L}) \det(\mathbf{U}) = \left(\prod_{i=1}^n l_{ii} \right) \left(\prod_{i=1}^n u_{ii} \right)$$

Для решения СЛАУ:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{LU} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

последовательно решаем два уравнения (методом подстановки):

$$\mathbf{L} \mathbf{y} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{U} \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Считая \mathbf{x} матрицей \mathbf{X} и \mathbf{b} единичной матрицей \mathbf{I} можно определить обратную матрицу \mathbf{A}^{-1} , но это не самый эффективный способ

LUP-разложение

LUP-разложение это LU-разложения матрицы **A** с частичным выбором ведущего элемента (перестановка по строкам), которое записывается следующим образом:

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU},$$

а, в случае перестановок по столбцам LUP-разложение записывается в виде:

$$\mathbf{AQ} = \mathbf{LU},$$

а, в наиболее общем виде:

$$\mathbf{PAQ} = \mathbf{LU},$$

где:

- P** - матрица перестановок по строкам;
- Q** - матрица перестановок по столбцам;
- L** - нижняя унитреугольная матрица;
- U** - верхняя треугольная матрица.

LDU-разложение

LDU-разложение матрицы **A** - это ее представление в виде произведения трех матриц:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LDU},$$

где:

- D** - диагональная матрица;
- L** - нижняя унитреугольная матрица;
- U** - верхняя унитреугольная матрица.

***LL*-разложение**

LL-разложение положительно определенной матрицы **A** - это ее представление в виде произведений двух матриц:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^*$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^*\mathbf{U}$$

где:

L - нижняя треугольная матрица;

U - верхняя треугольная матрица.

Для вещественных матриц: $\mathbf{L}^* = \mathbf{L}^T$ и $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^T$.

Положительная определенность матрицы **A** является необходимым условием для получения разложения, а симметричность матрицы **A** позволяет получить единственно верное разложение, при котором результат $\mathbf{L}\mathbf{L}^*$ будет равен исходной матрице **A**.

Существует несколько алгоритмов получения разложения Холецкого:

- классический алгоритм Холецкого;
(в его основе метод исключения Гаусса при приведении исходной матрицы к нижнетреугольному виду)
- алгоритм Холецкого-Банахевича;
(алгоритм вычисления матрицы L начиная с первой строки и далее итерационно по каждой строке)
- алгоритм Холецкого-Кроута;
(алгоритм вычисления матрицы U начиная с первого столбца и далее итерационно по каждому столбцу)

Алгоритм Кроута в обобщенном виде является алгоритмом вычисления LU -разложения, где L - нижняя треугольная, а U - унитарная верхняя треугольная.

Формулы для нахождения **L** в комплексном случае:

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}^* \right)$$
$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{ik}^*}$$

Формулы для нахождения **L** в вещественном случае:

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right)$$
$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$$

Исходные данные:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.4 & 1 & 1 \\ 1 & 0.9 & 1 \\ 1 & 1 & 1.4 \end{bmatrix}$$

Полученный результат:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.18 & 0 & 0 \\ 0.85 & 0.43 & 0 \\ 0.85 & 0.66 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Процесс решения:

- $i = 1, j = 0 \Rightarrow \dots$ - считать нечего;
- $l_{11} = \sqrt{1.4 - 0} = 1.18$
- $l_{21} = \frac{1}{1.18}(1 - 0) = 0.85$
- $l_{22} = \sqrt{0.9 - 0.85^2} = 0.43$
- $l_{31} = \frac{1}{1.18}(1 - 0) = 0.85$
- $l_{32} = \frac{1}{0.43}(1 - 0.85^2) = 0.66$
- $l_{33} = \sqrt{1.4 - (0.85^2 + 0.66^2)} = 0.5$

Для несимметричной матрицы \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.4 & 1 & 2 \\ 1 & 0.9 & 1 \\ 1 & 1 & 1.4 \end{bmatrix}$$

Матрица \mathbf{L} получится в виде:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.18 & 0 & 0 \\ 0.85 & 0.43 & 0 \\ 0.85 & 0.66 & 0.5 \end{bmatrix}$$

А результат разложения

$$\mathbf{LL}^T = \begin{bmatrix} 1.4 & 1 & 1 \\ 1 & 0.9 & 1 \\ 1 & 1 & 1.4 \end{bmatrix} \neq \mathbf{A}$$

Для несимметричных матрицы разложение Холецкого принципиально можно получить, но оно не будет соответствовать исходной матрице \mathbf{A}

LDL-разложение

LDL-разложение (модификация *LL*-разложения) положительно определенной матрицы **A** - это ее представление в виде произведения трех матриц:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^*$$

где:

- D** - диагональная матрица;
- L** - нижняя унитреугольная матрица.

При вычислении *LDL*-разложения, в отличие от *LL*-разложения, не требуется вычисление квадратных корней, а условием существования разложения является отличие от нуля всех угловых миноров исходной матрицы **A**.

Формулы для нахождения **L** и **D** в комплексном случае:

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk}^*}{d_{jj}}$$

$$d_{jj} = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{kj} l_{kj}^* d_{kk}$$

Формулы для нахождения **L** и **D** в вещественном случае:

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk}}{d_{jj}}$$

$$d_{jj} = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{kj}^2 d_{kk}$$

Исходные данные:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.4 & 1 & 1 \\ 1 & 0.9 & 1 \\ 1 & 1 & 1.4 \end{bmatrix}$$

Полученный результат:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0.7143 & 1.0 & 0 \\ 0.7143 & 1.5385 & 1.0 \end{bmatrix}$$


$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1857 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2462 \end{bmatrix}$$


Процесс решения:

- $l_{11} = 1.0$
- $d_{11} = 1.4 - 0 = 1.4$
- $l_{22} = 1.0$
- $l_{21} = \frac{1.0 - 0}{1.4} = 0.7143$
- $d_{22} = 0.9 - 0.7143 = 0.1857$
- $l_{33} = 1.0$
- $l_{31} = \frac{1.0 - 0}{1.4} = 0.7143$
- $l_{32} = \frac{1.0 - 0.7143}{0.1857} = 1.5385$
- $d_{33} = 1.4 - 0.7143 - 0.4396 = 0.2462$

Разложение Холецкого очень часто используется при решении следующих задач:

- при решении систем линейных алгебраических уравнений, где подход аналогичен рассмотренному ранее с LU -разложением;
(точное решение гарантировано только при симметричной A)
- в нелинейных методах оптимизации для получения положительно определенных матриц в процессе поиска решений;
- в методах моделирования Монте-Карло для генерации случайных величин коррелируемых, между собой;
(в методах, где необходимо получать ковариационную матрицу, которая должна быть положительно определенной и симметричной)
- как более эффективный метод вычисления обратной матрицы для не эрмитовой матрицы, при чем результат - обратная матрица, получится эрмитовой;

-  Principes d'une nouvelle technique de la méthode des moindres carrés; Méthode de résolution numérique des équations linéaires, du calcul des déterminants et des inverses et de réduction des formes quadratiques.
Banachiewicz, T.
Bull. Inter. Acad. Polon. Sci., Sér. A, 393–404 p. 1938

-  The life and work of André Cholesky.
Brezinski, C.
Numerical Algorithms, vol. 43, no. 3, pp 279-288. 2006

QR-разложение

QR-разложение матрицы **A** (не обязательно квадратной) - это ее представление в виде произведения двух матриц:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$$

где:

- Q** - унитарная матрица;
- R** - верхняя треугольная матрица.

Единственное разложение можно получить, только если наложить ограничение положительности диагональных элементов матрицы **R**.

Классический алгоритм Грама-Шмидта

Матрица \mathbf{A} рассматривается в виде:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]$$

Оператор проекции определяется следующим образом:

$$\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \mathbf{b}$$

Алгоритм начинается с последовательного вычисления векторов \mathbf{b}_k :

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \text{proj}_{\mathbf{b}_1} \mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \text{proj}_{\mathbf{b}_1} \mathbf{a}_3 - \text{proj}_{\mathbf{b}_2} \mathbf{a}_3$$

...

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \text{proj}_{\mathbf{b}_j} \mathbf{a}_k$$

Затем вычисляется матрица \mathbf{Q} , каждый столбец которой представляет собой нормированный вектор \mathbf{b}_k :

$$\mathbf{Q} = \left[\frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|}, \frac{\mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_2\|}, \dots, \frac{\mathbf{b}_n}{\|\mathbf{b}_n\|} \right]$$

После чего вычисляется матрица \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A}$$

Ввиду наличия ошибок округления при вычислении векторов \mathbf{b}_j ; эти вектора становятся не точно ортогональными, в следствии чего, процедура ортогонализации теряет свой смысл и применение классического алгоритма Грама-Шмидта приводит к существенным ошибкам, а он сам считается вычисленно неустойчивым. В качестве альтернативы можно использовать:

- модифицированный алгоритм Грама-Шмидта;
- метод Хаусхолдера (метода разложений);
- метод Гивенса (метод вращений).

Для заданной матрицы \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Последовательно вычисляем вектора \mathbf{b}_k :

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \text{proj}_{\mathbf{b}_1} \mathbf{a}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 1 \cdot 1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{4}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.6 \\ 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

Вычисляем нормы векторов \mathbf{b}_k :

$$\|\mathbf{b}_1\| = 2.2361, \quad \|\mathbf{b}_2\| = 1.3416$$

С использованием полученных векторов \mathbf{b}_k :

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

И их норм:

$$\|\mathbf{b}_1\| = 2.2361, \quad \|\mathbf{b}_2\| = 1.3416$$

Вычисляем матрицу \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.8944 & -0.4472 \\ 0.4472 & 0.8944 \end{bmatrix}$$

Вычисляем матрицу \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.2361 & 1.7889 \\ 0.0000 & 1.3416 \end{bmatrix}$$

В модифицированном алгоритме Грама-Шмидта повышается вычислительная устойчивость за счет изменения способа вычисления векторов \mathbf{b}_j .

Исходный вариант:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \text{proj}_{\mathbf{b}_1} \mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \text{proj}_{\mathbf{b}_1} \mathbf{a}_3 - \text{proj}_{\mathbf{b}_2} \mathbf{a}_3$$

...

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \text{proj}_{\mathbf{b}_j} \mathbf{a}_k$$

Модифицированный вариант:

$$\mathbf{b}_k^{(1)} = \mathbf{a}_k - \text{proj}_{\mathbf{b}_1} \mathbf{a}_k$$

$$\mathbf{b}_k^{(2)} = \mathbf{b}_k^{(1)} - \text{proj}_{\mathbf{b}_2} \mathbf{b}_k^{(1)}$$

...

$$\mathbf{b}_k^{(k-1)} = \mathbf{b}_k^{(k-2)} - \text{proj}_{\mathbf{b}_{k-1}} \mathbf{b}_k^{(k-2)}$$

$$\mathbf{b}_k = \frac{\mathbf{b}_k^{(k-1)}}{\|\mathbf{b}_k^{(k-1)}\|}$$

Каждый вектор $\mathbf{b}_k^{(j)}$ ортогонален вектору $\mathbf{b}_k^{(j-1)}$ независимо от ошибок округления. Набор векторов \mathbf{b}_k сразу формируют матрицу \mathbf{Q} .

Метод Хаусхолдера

В основе метода Хаусхолдера (метод отражений) лежит преобразование Хаусхолдера - это такое линейное преобразование матрицы **A** (векторного пространства, образуемого столбцами матрицы), которое описывает отражение (векторного пространства) относительно некоторой гиперплоскости, проходящей через начало координат.

Преобразование может использоваться также для получения преобразования исходной матрицы в трехдиагональную.

Метод Хаусхолдера более вычислительно устойчив по сравнению с ортогонализацией Грама-Шмидта, но менее вычислительно эффективен чем метод Гивенса.

Инициализация:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}$$

На каждой итерации для $k = 1, \dots, n - 1$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}_k$$

$$x_{1, \dots, k-1} = 0$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \|\mathbf{x}\| \cdot \mathbf{e}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{2 \mathbf{u} \mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{P}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}$$

где \mathbf{e} - орт, у которого на каждой итерации только k -ый элемент равен единице.

На $k - 1$ -ой итерации в \mathbf{A} всегда получаются нули ниже главной диагонали во всех столбцах до $k - 1$ включительно, т.е. преобразования необходимо продолжать только над главным минором k, \dots, n , что можно реализовать через обнуление элементов вектора \mathbf{x} :

Для исходной матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.4 & 1 & 1 \\ 1 & 0.9 & 1 \\ 1 & 1 & 1.4 \end{bmatrix}$$

для $k = 1$ и вычислим:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{x}\| = 1.99$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1.99 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.59 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

для $k = 1$ получим значения матриц:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|^2} = \begin{bmatrix} 0.7035 & 0.5025 & 0.5025 \\ 0.5025 & 0.1482 & -0.8518 \\ 0.5025 & -0.8518 & 0.1482 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{P} = \mathbf{I}\mathbf{P} = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.7035 & 0.5025 & 0.5025 \\ 0.5025 & 0.1482 & -0.8518 \\ 0.5025 & -0.8518 & 0.1482 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.9900 & 1.6583 & 1.9096 \\ 0 & -0.2158 & -0.5417 \\ 0 & -0.1158 & -0.1417 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}$$

Как видно, первый столбец \mathbf{A} уже приведен к треугольному виду, следовательно нужно преобразовывать только главный минор из 2 и 3 строчек и столбцов.

для $k = 2$ и вычислим:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.6583 \\ -0.2158 \\ -0.1158 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 0$$

т.е.:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2158 \\ -0.1158 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{x}\| = 0.2449$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2158 \\ -0.1158 \end{bmatrix} - 0.2449 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.4608 \\ -0.1158 \end{bmatrix}$$

для $k = 2$ получим значения матриц:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8811 & -0.4729 \\ 0 & -0.4729 & 0.8811 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.7035 & -0.6804 & 0.2052 \\ 0.5025 & 0.2722 & -0.8206 \\ 0.5025 & 0.6804 & 0.5334 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.9900 & 1.6583 & 1.9096 \\ 0 & 0.2449 & 0.5443 \\ 0 & 0 & 0.1313 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}$$

При численном расчете на месте нулей могут быть очень маленькие значения, в том числе и отрицательные, что обусловлено вычислительными ошибками, которыми можно пренебречь.

Метод Гивенса

В основе метода Гивенса (метод вращений) лежит последовательность из нескольких поворотов Гивенса (линейных преобразований матрицы \mathbf{A}), которые, например для $n = 3$ можно записать в виде:

$$\mathbf{G}_{22} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Формируя определенным образом последовательность подобных поворотов можно вычислить требуемые матрицы \mathbf{Q} и \mathbf{R} следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{G}_{1,2}^T \cdots \mathbf{G}_{1,n}^T \cdots \mathbf{G}_{2,3}^T \cdots \mathbf{G}_{2,n}^T \cdots \mathbf{G}_{n-2,n}^T \mathbf{G}_{n-1,n}^T \\ \mathbf{R} &= \mathbf{G}_{n-1,n} \mathbf{G}_{n-2,n} \mathbf{G}_{n-2,n-1} \cdots \mathbf{G}_{1,3} \mathbf{G}_{1,2} \mathbf{A} \end{aligned}$$

Последовательность поворотов формируется при $i = 1, \dots, n-1$ и $j = i+1, \dots, n$ в ходе итерационного процесса.

Инициализация:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}$$

На каждой итерации соответствующей пары (i, j) вычисляем:

$$\mathbf{G}_{n \times n} = \mathbf{I}_{n \times n}$$

$$g_{ii} = g_{jj} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}};$$

$$g_{ij} = \frac{a_{ji}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}};$$

$$g_{ji} = -\frac{a_{ji}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}};$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{G}^T$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{G} \mathbf{R}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}$$

Используется для эффективного вычисления обратной матрицы:

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{QR})^{-1} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T$$

Обратную матрицу \mathbf{R}^{-1} легко считать, т.к. она треугольная, что существенно уменьшает количество операций при вычислении обратной матрицы \mathbf{A}^{-1} .

- `eig` - спектральное разложение;
- `eigs` - собственные значения и собственные вектора матрицы;
- `svd` - сингулярное разложение;
- `svds` - сингулярные значения и сингулярные вектора матрицы;
- `lu` - LU -разложение, LUP -разложение;
- `chol` - LL -разложение;
- `ldl` - LDL -разложение;
- `schur` - разложение Шура;
- `qr` - QR -разложение;

1. Дифференциальные уравнения.....	4
2. Разностные уравнения и решетчатые функции.....	43
3. Векторно-матричные преобразования.....	52
4. Числовые и функциональные ряды.....	117
5. Интегральные преобразования.....	133
6. Устойчивость.....	180
7. Линеаризация.....	212

Числовой ряд

Числовым рядом S называется следующее выражение:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

где $z_k = a_k + j b_k$ - комплексные числа.

Частичная сумма числового ряда

Частичная сумма S_N числового ряда S :

$$S_N = \sum_{k=1}^N z_k$$

Основным вопросом при анализе рядов является анализ сходимости ряда

Сходимость числового ряда

Числовой ряд S является сходящимся, если существует предел последовательности его частичных сумм, т.е.:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$$

Числовой ряд S имеет абсолютную сходимость, если сходится ряд, составленный из модулей $|z_k|$, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| < \infty$$

Из абсолютной сходимости следует сходимость ряда, но обратное утверждение не справедливо.

Признак Даламбера:

$$\text{Если } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q$$

то при $q < 1$ ряд сходится, а при $q > 1$ расходится.

Признак Коши:

$$\text{Если } \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = q$$

то при $q < 1$ ряд сходится, а при $q > 1$ расходится.

Признак Раабе:

$$\text{Если } \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) = p$$

то при $p > 1$ ряд сходится, а при $p < 1$ расходится.

Функциональный ряд

Функциональным рядом S_f называется сумма бесконечной последовательности функций $\{f_k(z)\}$ комплексного переменного, определенных в некоторой области G :

$$S_f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

где $z_k = a_k + j b_k$ - комплексные числа.

Частичная сумма S_N функционального ряда S_f :

$$S_N = \sum_{k=1}^N f_k(z)$$

Для функциональных рядов определено несколько видов сходимости: равномерная, поточечная, абсолютная и почти “всюду”.

Сходимость функционального ряда

Последовательность функций $\{f_k(z)\}$ сходится в области G равномерно к функции $f(z)$, если для $\varepsilon > 0$ найдется $n(\varepsilon) > 0$, что при $k > n$ будет выполнено:

$$\left| f(z) - f_k(z) \right| < \varepsilon$$

Функциональный ряд S_f равномерно сходится в области G , если равномерно сходится последовательность $\{S_N\}$ его частичных сумм.

Для случая поточечной сходимости последовательности функций и функционального ряда условие имеет вид:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(z) \rightarrow f(z)$$

Абсолютная сходимость аналогична случаю числовых рядов

Признак Вейерштрасса

Если функциональный ряд S_f мажорируется в области G некоторым сходящимся числовым рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \text{при } a_k > 0,$$

т.е. всюду в области G справедливо:

$$|f_k(z)| < a_k,$$

то он сходится равномерно.

Существуют и другие признаки сходимости: признак сравнения, признак Дирихле и признак Абеля.

Степенной ряд

Степенной ряд - это ряд вида:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

где a_k некоторые комплексные числа.

Теорема Коши-Адамара

Степенной ряд S сходится абсолютно в каждой точке круга $|z - z_0| < R$, сходится равномерно в каждом круге $|z - z_0| \leq R_1 < R$ и расходится в области $|z - z_0| > R$, где

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Ряд Тейлора

Полином Тейлора:

$$\sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k = f(a) + f^{(1)}(a) (z - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2} (z - a)^2 + \dots$$

Ряд Тейлора в точке a бесконечно дифференцируемой функции $f(z)$ это степенной ряд вида:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k$$

При $a = 0$ ряд Тейлора становится рядом Маклорена.

Ряд Тейлора используется как метод полиномиальной аппроксимации функции, а также в задачах линеаризации.

Сходимость ряда Тейлора

Сходимость ряда Тейлора как степенного ряда определяется на интервале (для вещественных чисел) с центром в a и в круге (для комплексных чисел) с центром в a .

Радиус сходимости по формуле Даламбера:

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{f^{(k)}(a)}{k!}}{\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(k)}(a)}{f^{(k+1)}(a)} (k+1) \right|$$

Например для e^x область сходимости включает в себя всю ось x :

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{e^a}{e^a} (k+1) \right| = \infty$$

Определим сходимость ряда Тейлора для функции $f(z)$, разложение в ряд Тейлора которой соответствует:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Очевидно, что сходиться данный ряд будет только при условии $|x| < 1$.

В более общем случае при $a \neq 0$ получим

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x-a}{1-a} \right)^k$$

и например для $a = 0.5$ область сходимости ряда будет $x \in (0, 1)$.

Ряд Лорана

Ряд Лорана это степенной ряд вида:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

где $\sum_{k=-\infty}^{-1}$ называется правильной частью, а $\sum_{k=0}^{+\infty}$ главной частью.

Ряд Лорана сходится при $0 < r < |z - z_0| < R \leq \infty$.

Z-преобразование - частный случай ряда Лорана, а при $z = e^{j\pi\omega}$ ряд Лорана становится рядом Фурье.

Ряд Лорана используется для исследования особых точек или в тех ситуациях, когда ряд Тейлора не применим.

Тригонометрический ряд

Тригонометрический ряд - это ряд вида:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) ,$$

который становится рядом Фурье при:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

где $f(x)$ - Фурье функция.

Ряд Фурье

Ряд Фурье - как разложение функции на ортонормированные функции по базису из ортогональных функций имеет вид:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[A_k \cos \left(k \frac{2\pi}{T} x + \varphi_k \right) \right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k e^{2\pi j x k / T}$$

где:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$
$$\varphi_k = \text{atan}(a_k/b_k)$$

Ряд Фурье обладает хорошей среднеквадратичной сходимостью, но не обязательно сходится поточечно. В задачах управления, как правило, считается что ряд Фурье сходится везде.

Ряд Винера

Ряд Винера - это ортогональное разложение нелинейной функции в функционал следующего вида:

$$Y(x_1, \dots, x_n) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \sum_{k=j}^n a_{ijk} x_i x_j x_k + \dots$$

Ряд Винера является основой прогнозирующих фильтров Колмогорова-Винера, Габора (с самонастройкой в процессе обучения). Этот же подход использован Ивахненко в методе группового учета аргументов (МГУА).

В отличие от ряда Тейлора, ряд Винера - фильтр с памятью.

Ряд Вольтерры

Ряд Вольтерры - это, по сути, ряд Винера для случая непрерывных функций, который, правда, был сформулирован ранее ряда Винера, и имеет вид:

$$y(t) = h_0 + \sum_{k=1}^N \int_a^b h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \prod_{j=1}^k x(t - \tau_j) d\tau_j$$

Ряд Вольтерры и ряд Виннера, как правило, используются в качестве аппроксиматора нелинейных функционалов (непрерывных и дискретных, соответственно). В теории идентификации на их базе строятся методы непараметрической идентификации нелинейных систем, где основная задача - определение коэффициентов h_k или a_k . Эта задача требует существенных вычислительных ресурсов.

1. Дифференциальные уравнения.....	4
2. Разностные уравнения и решетчатые функции.....	43
3. Векторно-матричные преобразования.....	52
4. Числовые и функциональные ряды.....	117
5. Интегральные преобразования.....	133
5.1. Преобразование Лапласа.....	138
5.2. Дискретное преобразование Лапласа.....	152
5.3. Z-преобразование.....	155
5.4. Преобразование Фурье.....	168
6. Устойчивость.....	180
7. Линеаризация.....	212

Дельта-функция Дирака

Обобщенная функция для описания точечного воздействия:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

Дельта-функция Дирака обладает важными свойствами:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

Функция Хевисайда

Кусочно-непрерывная функция, которая, как правило, считается “ступенчатым” воздействием. Для непрерывного случая имеет два математических определения:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Функция Хевисайда - первообразная дельта-функции Дирака:

$$H(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

Интегральное преобразование

Интегральное преобразование - это преобразование (перевод) функции из одной области применения (например, временной) в другую область применения (например, частотную), осуществляемое интегрированием заданной функции.

Как правило, в теории управления применяют преобразование из временной в частотную область, которое либо позволяет более простым образом получать решения различных видов дифференциальных уравнений, либо дает возможность исследовать сигнал или систему в частотной области.

Виды интегральных преобразований:

- преобразование Лапласа;
- преобразование Фурье (непрерывное);
- и др.

Прямое преобразование:

$$f(\omega) = \mathcal{T} \left\{ f(t) \right\} = \int_{t_1}^{t_2} K(t, \omega) f(t) dt$$

Обратное преобразование:

$$f(t) = \mathcal{T}^{-1} \left\{ f(\omega) \right\} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} K^{-1}(t, \omega) f(\omega) d\omega$$

где:

- $f(t)$ - оригинал;
- $f(\omega)$ - изображение;
- \mathcal{T} - обозначение преобразования;
- $K(t, \omega)$ - ядро интегрального преобразования.

Преобразование Лапласа

Интегральное преобразование Лапласа - это интегральное преобразование функции, определенной во временной области $f(t)$, в функцию, определенную в частотной области $f(s)$ (при $s = j\omega$). Основное назначение - аналитическое решение дифференциальных уравнений.

Прямое преобразование:

$$f(s) = \mathcal{L} \left\{ f(t) \right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Обратное преобразование:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ f(s) \right\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{st} f(s) ds$$

- линейность:

$$\mathcal{L} \left\{ a f(t) + b g(t) \right\} = a \mathcal{L} \left\{ f(t) \right\} + b \mathcal{L} \left\{ g(t) \right\}$$

- подобие:

$$\mathcal{L} \left\{ f(at) \right\} = \frac{1}{a} f \left(\frac{s}{a} \right)$$

- абсолютная сходимость:

Если интеграл Лапласа абсолютно сходится при $\sigma = \sigma_0$, то

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b |f(t)| e^{-\sigma_0 t} dt = \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma_0 t} dt$$

существует и сходится равномерно и абсолютно для $\sigma \geq \sigma_0$.

- дифференцирование оригинала:

Если $f(t), f^{(1)}(t), \dots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то:

$$\mathcal{L} \left\{ f^{(0)}(t) \right\} = f(s)$$

$$\mathcal{L} \left\{ f^{(1)}(t) \right\} = s f(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L} \left\{ f^{(2)}(t) \right\} = s^2 f(s) - s f(0) - f^{(1)}(0)$$

⋮

$$\mathcal{L} \left\{ f^{(n)}(t) \right\} = s^n f(s) - \sum_{i=1}^{n-1} s^i f^{(i)}(0) - \sum_{i=1}^{n-1} f^{(i)}(0)$$

- интегрирование оригинала:

Если $f(t)$ - оригинал, а $f(s)$ его изображением по Лапласу, то

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{f(s)}{s}$$

- запаздывание оригинала:

Если $f(t)$ - оригинал, а $f(s)$ его изображением по Лапласу, то

$$\mathcal{L} \left\{ f(t - \tau) \right\} = f(s) e^{-s\tau}$$

- дифференцирование изображения:

Если $f(t)$ - оригинал, а $f(s)$ его изображением по Лапласу, то

$$\mathcal{L} \left\{ (-1)^n t^n f(t) \right\} = f^{(n)}(s)$$

- интегрирование изображения:

Если $f(t)/t$ - оригинал, то

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_s^{\infty} f(z) dz$$

- теорема о начальном и конечном значениях:

дает возможность определить значение оригинала функции при $t \rightarrow \infty$ и при $t = 0$ по известному изображению.

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s f(s)$$

Если существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$$

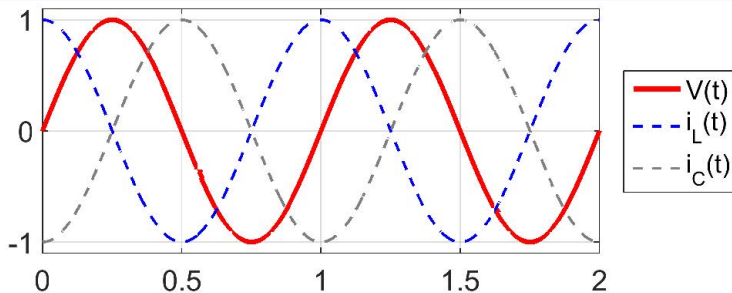
тогда

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s f(s)$$

$$V(t) = \sin(\omega t)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t V(t) dt$$

$$i_C(t) = C \frac{dV(t)}{dt}$$



Найдем токи:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{1}{L} \int_0^t \sin(\omega t) dt = \frac{1}{\omega L} \left(-\cos(\omega t) \right) = \frac{1}{\omega L} \cos(\omega t - \pi) \\ &= \frac{1}{\omega L} \sin \left(\omega t - \pi + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\omega L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \\ i_C(t) &= C \frac{d \sin(\omega t)}{dt} = \omega C \cos(\omega t) = \omega C \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$f(t)$	$f(s)$	$f(t)$	$f(s)$
$\delta(t)$	1	$\delta(t - \tau)$	$e^{-s\tau}$
$H(t)$	$\frac{1}{s}$	$H(t - \tau)$	$\frac{e^{-s\tau}}{s}$
$e^{-a\tau} H(t)$	$\frac{1}{s + a}$	$(1 - e^{-a\tau}) H(t)$	$\frac{a}{s(s + a)}$
$t H(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$t e^{-at} H(t)$	$\frac{1}{(s + a)^2}$
$\frac{t^n}{n!} H(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!} e^{-at} H(t)$	$\frac{1}{(s + a)^{n+1}}$

$f(t)$	$f(s)$	$f(t)$	$f(s)$
$\sin(\omega t) H(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t) e^{-at} H(t)$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t) H(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t) e^{-at} H(t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$\text{sh}(at) H(t)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$		
$\text{ch}(at) H(t)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$		

для дифференциального уравнения:

$$x^{(2)}(t) + a_1 x^{(1)}(t) + a_2 x(t) = f(t)$$

удовлетворяющего начальным условиям:

$$x(0) = x_0, \quad x^{(1)}(0) = x_1$$

запишем производные, используя преобразование Лапласа:

$$\mathcal{L} \left\{ x^{(0)}(t) \right\} = x(s)$$

$$\mathcal{L} \left\{ x^{(1)}(t) \right\} = s x(s) - x(0) = s x(s) - x_0$$

$$\mathcal{L} \left\{ x^{(2)}(t) \right\} = s^2 x(s) - s x(0) - x^{(1)}(0) = s^2 x(s) - s x_0 - x_1$$

перепишем исходное дифференциальное уравнение в виде:

$$(s^2 + a_1 s + a_2)x(s) = f(s) + x_0(s + a) + x_1$$

решая алгебраическое уравнение относительно $x(s)$:

$$(s^2 + a_1 s + a_2) x(s) = f(s) + x_0 (s + a) + x_1$$

получим:

$$x(s) = \frac{f(s) + x_0 (s + a) + x_1}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

раскладывая $x(s)$ на элементарные дроби $g_i(s)$ и применяя обратное преобразование Лапласа, находим решение относительно $x(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ x(s) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_i g_i(s) \right\} = \sum_i \mathcal{L}^{-1} \left\{ g_i(s) \right\} \\ &= \sum_i g_i(t) \end{aligned}$$

Разложение на элементарные дроби позволяет использовать таблицы преобразований Лапласа

для дифференциального уравнения:

$$x^{(2)}(t) + 2x^{(1)}(t) + 2x(t) = te^{-t}$$

удовлетворяющего начальным условиям:

$$x(0) = 0, \quad x^{(1)}(0) = 0$$

запишем производные и $f(t)$, используя преобразование Лапласа:

$$\mathcal{L} \left\{ x^{(0)}(t) \right\} = x(s)$$

$$\mathcal{L} \left\{ x^{(1)}(t) \right\} = s x(s) - x(0) = s x(s)$$

$$\mathcal{L} \left\{ x^{(2)}(t) \right\} = s^2 x(s) - s x(0) - x^{(1)}(0) = s^2 x(s)$$

$$\mathcal{L} \left\{ te^{-t} \right\} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

получим алгебраическое уравнение:

$$x(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s^2+2s+2)}$$

разложив на элементарные дроби получим:

$$x(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s^2+2s+2)} = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

используя соотношения из таблицы преобразования Лапласа:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2} \right\} = t e^{-t}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2+1} \right\} = e^{-t} \sin(t)$$

запишем решение $x(t)$:

$$x(t) = t e^{-t} - e^{-t} \sin(t) = e^{-t} (t - \sin(t))$$

Связь с преобразованием Фурье:

$$f(\omega) = \mathcal{F} \left\{ f(t) \right\} = \mathcal{L} \left\{ f(t) \right\} \Big|_{s = j\omega} = f(s) \Big|_{s = j\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt$$

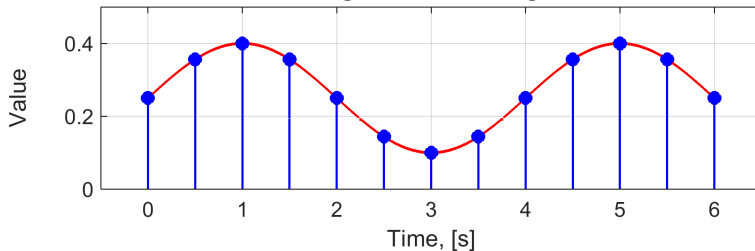
Тут не учтен коэффициент $1/\sqrt{2\pi}$

Связь с Z-преобразованием:

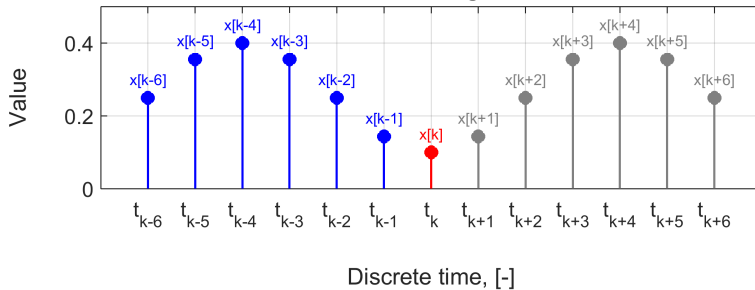
$$x_d(s) = \mathcal{L}_d \left\{ f(t) \right\} = \mathcal{Z} \left\{ f(t) \right\} \Big|_{z = e^{st}} = x(z) \Big|_{z = e^{st}}$$

$\mathcal{L}_d \left\{ \cdot \right\}$ - дискретное преобразование Лапласа

Analog and Discrete signals



Discrete signal



“Математическая” дискретизация сигнала может быть записана как:

$$\begin{aligned} s(kT) &= s(0)\delta(t) + s(T)\delta(t-T) + \dots + s(nT)\delta(t-nT) \\ &= \sum_{k=0}^n s(kT)\delta(t-kT) = \sum_{k=0}^n s[k]\delta(t-kT) \end{aligned}$$

где:

- T - период дискретизации [с];
- $\delta(t - kT)$ - дельта-функция Дирака со сдвигом на kT ;
- $f_d = 1/T$ - частота дискретизации [Гц].

“Математическая” дискретизация - некорректный термин, его суть в математической имитации процесса физической дискретизации сигнала

Дискретное преобразование Лапласа

Дискретное преобразование Лапласа (сформулировано Цыпкиным) - это преобразование Лапласа от импульсной функции следующего вида:

$$x(kT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT)$$

и определяется как:

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sT} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT) dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \int_0^{\infty} e^{-sT} \delta(t - kT) dt = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-skT} \end{aligned}$$

Z-преобразование

Z-преобразование (сформулировано Джури) - это дискретное преобразование Лапласа с заменой e^{sT} на z .

Одностороннее Z-преобразование:

$$x(z) = \mathcal{L}_d \left\{ x(kT) \right\} \Big|_{z = e^{sT}} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

Двустороннее Z-преобразование:

$$x(z) = \mathcal{L}_d \left\{ x(kT) \right\} \Big|_{z = e^{sT}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

z^k означает задержку ($k < 0$) или опережение ($k > 0$) на k тактов

Z-преобразование

Свёртывание исходного сигнала, заданного последовательностью вещественных чисел во временной области, в аналитическую функцию комплексной частоты.

Одностороннее Z-преобразование:

$$x(z) = \mathcal{Z} \left\{ x[k] \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

Обратное Z-преобразование:

$$x[k] = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ x(z) \right\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C x(z) z^{-1} dz$$

где:

C - контур охватывающий область сходимости $x(z)$.

Круг сходимости (Region of Convergence)

Область точек комплексной плоскости, для которых Z-преобразование, как степенной ряд, сходится, т.е.:

$$D = \left\{ z : \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k} \right| < \infty \right\}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Альтернативное определение области сходимости формулируется так: круг сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} x[k] (z - z_0)^k$ это круг вида:

$$D = \left\{ z : |z - z_0| < R \right\}, \quad z \in \mathbb{C}$$

в котором степенной ряд абсолютно сходится (при $|z - z_0| < R$), а вне его (при $|z - z_0| \geq R$) расходится.

Пример #1.

$$x[k] = 0.5^k$$

$$x[k] = \{ \dots, 0.5^{-3}, 0.5^{-2}, 0.5^{-1}, 1.0, 0.5^1, 0.5^2, 0.5^3, \dots \}$$

$$x(z) \rightarrow \infty$$

Пример #2.

$$x[k] = 0.5^k 1(t)$$

$$x[k] = \{ \dots, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.5^1, 0.5^2, 0.5^3, \dots \}$$

$$x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 0.5^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{0.5}{z} \right)^k = \frac{1}{1 - 0.5 z^{-1}}$$

Пример #2. Продолжение.

$$x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 0.5^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{0.5}{z} \right)^k = \frac{1}{1 - 0.5 z^{-1}}$$

где последнее равенство получается с использованием свойства бесконечной геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a r^k = \frac{a}{1 - r}$$

таким образом сходимость будет обеспечена при $|z| > 0.5$ или

$$\left| 0.5 z^{-1} \right| < 1$$

- линейность:

$$\mathcal{Z} \left\{ \alpha x[k] + \beta y[k] \right\} = \alpha \mathcal{Z} \left\{ x[k] \right\} + \beta \mathcal{Z} \left\{ y[k] \right\}$$

- Z-преобразование функции со сдвигом по времени:

$$\mathcal{Z} \left\{ x[k - m] \right\} = z^{-m} \mathcal{Z} \left\{ x[k] \right\}$$

- Z-преобразование свертки двух функций:

$$\mathcal{Z} \left\{ x[k] * y[k] \right\} = \mathcal{Z} \left\{ x[k] \right\} \mathcal{Z} \left\{ y[k] \right\}$$

- Z-преобразование разности первого порядка:

$$\mathcal{Z} \left\{ x[k] - x[k - 1] \right\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ x[k] \right\}$$

- теорема о начальном значении:

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} x(z)$$

Справедлива только для реализуемых дискретных систем.

- теорема о конечном значении:

$$x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)x(z)$$

Справедлива, если все корни $(z - 1)x(z)$ находятся внутри круга единичного радиуса.

Дано уравнение (правая часть - известна в явном виде):

$$a_n y[k+n] + \dots + a_0 y[k] = c_m u[k+m] + \dots + c_0 u[k]$$

Находим Z-преобразование от левой и правой частей уравнения:

$$\mathcal{Z} \left\{ a_n y[k+n] + \dots + a_0 y[k] \right\} = \mathcal{Z} \left\{ c_m u[k+m] + \dots + c_0 u[k] \right\}$$

Используем следующие замены:

$$\mathcal{Z} \left\{ x[k] \right\} = x(z)$$

$$\mathcal{Z} \left\{ x[k+1] \right\} = z x(z) - z x[0]$$

$$\mathcal{Z} \left\{ x[k+2] \right\} = z^2 x(z) - z^2 x[0] - z x[1]$$

Получим алгебраическое уравнение вида:

$$y(z) Q(z) = P(z) u(z)$$

Выражаем $y(z)$:

$$y(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} u(z)$$

Раскладываем на простейшие дроби и вычисляем коэффициенты:

$$y(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2} + \dots$$

Применяем к каждой дроби обратное Z-преобразование:

$$y[k] = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{A}{z} \right\} + \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{B}{z-1} \right\} + \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{C}{(z-1)^2} \right\} + \dots$$

Обратное Z-преобразования находим по таблицам.

Дано разностное уравнение:

$$y[k + 2] - 5 y[k + 1] + 6 y[k] = 1$$

Применим Z-преобразование получим:

$$z^2 y(z) - 5 z y(z) + 6 y(z) = \frac{z}{z - 1}$$

Выразим $y(z)$:

$$y(z) = \frac{z}{z - 1} \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$$

Раскладываем на простейшие дроби и вычисляем коэффициенты:

$$\begin{aligned} y(z) &= \frac{z}{(z - 1)(z - 2)(z - 3)} \\ &= \frac{0.5}{z - 1} - \frac{2}{z - 2} + \frac{1.5}{z - 3} \end{aligned}$$

Применяем к каждой дроби обратное Z-преобразование:

$$y[k] = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{0.5}{z-1} \right\} - \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{2}{z-2} \right\} + \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1.5}{z-3} \right\}$$

Из таблицы:

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{0.5}{z-1} \right\} = 0.5 \cdot \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{z-1} \right\} = 0.5 \cdot 1^k = 0.5$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{2}{z-2} \right\} = 2^k$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1.5}{z-3} \right\} = 0.5 \cdot \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{3}{z-3} \right\} = 0.5 \cdot 3^k$$

Получим решение:

$$y[k] = 0.5 - 2^k + 0.5 \cdot 3^k$$

Дано разностное уравнение:

$$y[k + 2] + 4y[k + 1] + 3y[k] = 1$$

Начальные условия:

$$y[0] = 1$$

$$y[1] = 1$$

Используем следующие замены:

$$\mathcal{Z} \left\{ y[k] \right\} = y(z)$$

$$\mathcal{Z} \left\{ y[k + 1] \right\} = z y(z) - z y[0] = z y(z) - z$$

$$\mathcal{Z} \left\{ y[k + 2] \right\} = z^2 y(z) - z^2 y[0] - z y[1] = z^2 y(z) - z^2 - z$$

Уравнение примет следующий вид:

$$z^2 y(z) - z^2 - z + 4 (z y(z) - z) + 3 y(z) = \frac{z}{z-1}$$

Приведя к дробному виду получим:

$$y(z) = \frac{z^3 + 4z^2 - 4z}{(z-1)(z+1)(z+3)}$$

Представим в виде простейших дробей:

$$y(z) = 1 + \frac{1}{8(z-1)} - \frac{7}{4(z+1)} - \frac{21}{8(z+3)}$$

Используя обратное Z-преобразование получим решение:

$$y[k] = \frac{1}{8} + \frac{7}{4} \cdot (-1)^k - \frac{7}{8} \cdot (-3)^k$$

Преобразование Фурье

Интегральное преобразование функции одной вещественной переменной (в контексте ЦОС - времени) в функцию другой вещественной переменной (в контексте ЦОС - частоты).

Различают следующие виды преобразования Фурье:

- непрерывное преобразование Фурье;
- преобразование Фурье для дискретного времени;
- дискретное преобразование Фурье;
- быстрое преобразование Фурье;
(алгоритмы вычисления ДПФ)
- оконное преобразование Фурье.
(как дискретное так и непрерывное)

Прямое преобразование:

$$S(\omega) = \mathcal{F} \left\{ s(t) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

Обратное преобразование:

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ S(\omega) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

где:

- ω и $S(\omega)$ - непрерывные величина и функция;
- t и $s(t)$ - непрерывные величина и функция;
- $e^{-j\omega t}$ и $e^{j\omega t}$ - непрерывные функции.

$S(\omega)$, по факту, аналитическая функция

Прямое преобразование:

$$S(\omega) = \mathcal{F} \left\{ s(k) \right\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} s[k] e^{-j\omega k}$$

Обратное преобразование:

$$s(k) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ S(\omega) \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} S(\omega) e^{j\omega k} d\omega$$

где:

- ω и $S(\omega)$ - непрерывные величина и функция;
- k и $s(k)$ - дискретные величина и функция;
- $e^{-j\omega k}$ и $e^{j\omega k}$ - непрерывные функции.

$S(\omega)$, по факту, аналитическая функция - сумма непрерывных экспонент

Прямое преобразование:

$$S(n) = \mathcal{F} \left\{ s(k) \right\} = \sum_{k=0}^{K-1} s[k] e^{-2\pi jkn/N}$$

Обратное преобразование:

$$s(k) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ S(n) \right\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S[n] e^{2\pi jkn/N}$$

где:

- K - количество точек в сигнале;
- N - количество частот в спектре;
- $n, S(n), k, s(k)$ - дискретные величины и функции.

Считаем, что дискретный сигнал K -периодичный

Непрерывное преобразование Фурье для дискретного времени:

$$S(\omega) = \mathcal{F} \left\{ s(k) \right\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} s[k] e^{-j\omega k}$$

“Квантуем” частоту ω :

$$\omega = \frac{2\pi n}{N}$$

Получим дискретное преобразование Фурье:

$$S(n) = S(\omega) \Big|_{\omega = \frac{2\pi n}{N}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} s[k] e^{-j\omega k} \Big|_{\omega = \frac{2\pi n}{N}} = \sum_{k=0}^K s[k] e^{-2\pi jkn/N}$$

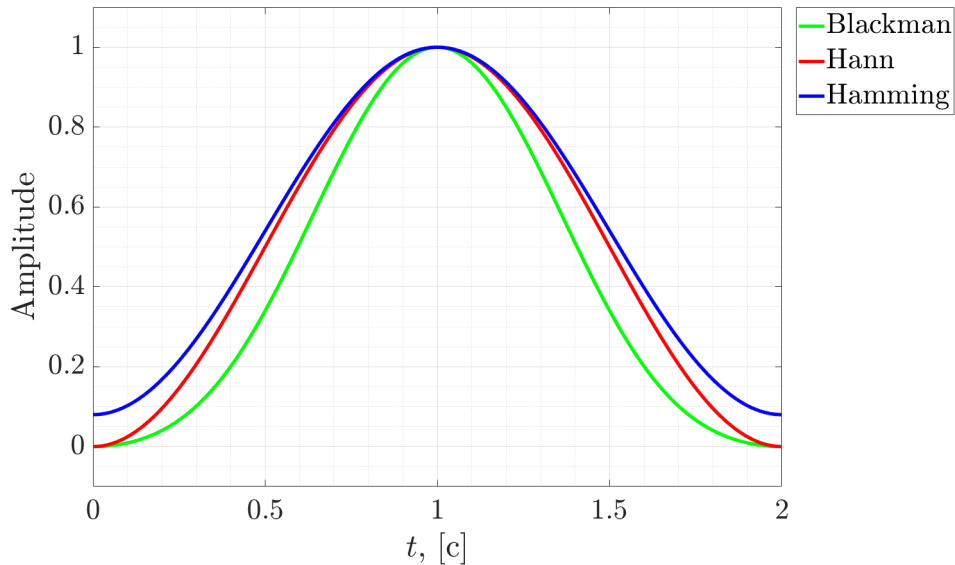
Пределы суммы меняются ввиду конечной длительности сигнала

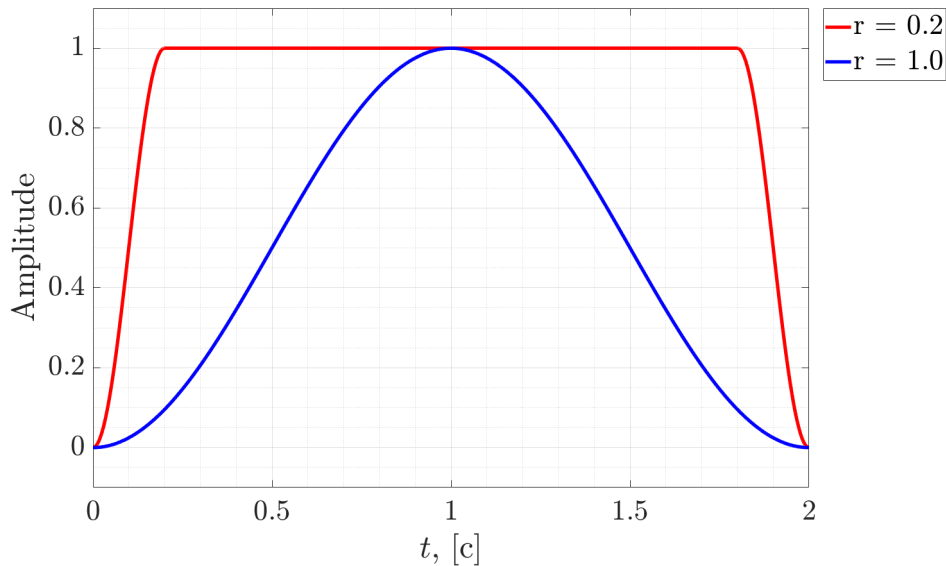
Оконная функция

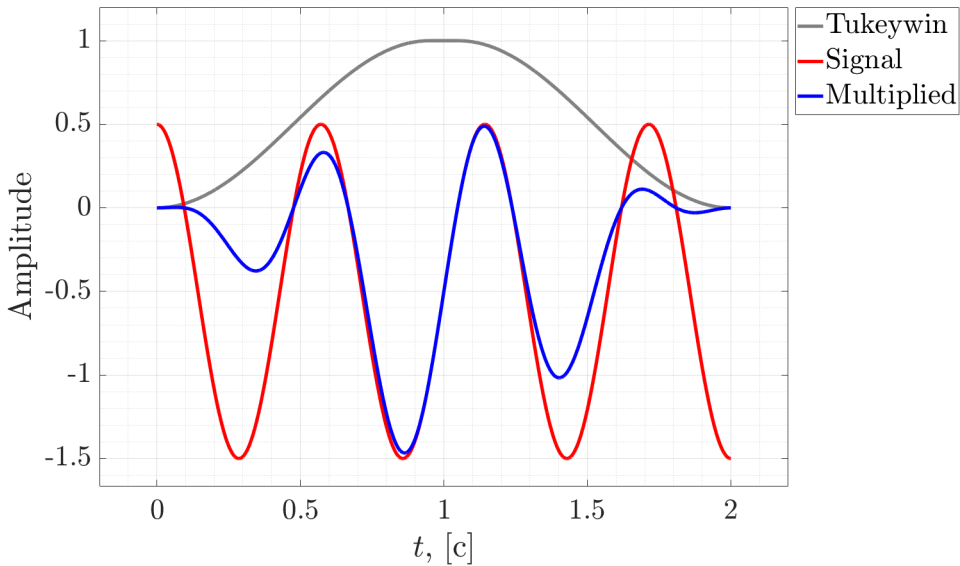
Это весовая функция (определенная на всем временном интервале от $-\infty$ до $+\infty$), которая используется для управления эффектами, обусловленными наличием боковых лепестков в спектральных оценках (растеканием спектра). С практической точки зрения используется для сведения начальных и конечных участков (значений) сигнала к одному уровню, приводит к удалению вычислительной ошибки при определении спектров.

Основные виды оконных функций:

- прямоугольная оконная функция;
- оконная функция Ханна;
- оконная функция Хамминга;
- оконная функция Блэкмана;
- оконная функция Кули-Тьюки.







Оконное преобразование Фурье

Оконное преобразование Фурье - это рассмотренные ранее преобразования Фурье, где сигнал домножается на оконную функцию.

Непрерывное преобразование Фурье:

$$S(\omega, \tau) = \mathcal{F} \left\{ s(t) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) W(t - \tau) e^{-j\omega t} dt$$

Непрерывное преобразование Фурье для дискретного времени:

$$S(\omega, m) = \mathcal{F} \left\{ s(k) \right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k] W(k - m) e^{-j\omega k}$$

Дискретное преобразование Фурье:

$$S(n, m) = \mathcal{F} \left\{ s(k) \right\} = \sum_{k=0}^K s[k] W(k - m) e^{-2\pi jkn/N}$$

Используя формулу Эйлера:

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$$

Дискретное преобразование Фурье:

$$S(n) = \sum_{k=0}^K s[k] e^{-2\pi jkn/N} = \sum_{k=0}^K s[k] \left(\cos(-2\pi kn/N) + j \sin(-2\pi kn/N) \right)$$

Непрерывное преобразование Фурье для дискретного времени:

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k] e^{-j\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k] \left(\cos(-\omega k) + j \sin(-\omega k) \right)$$

Непрерывное преобразование Фурье:

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \left(\cos(-\omega t) + j \sin(-\omega t) \right) dt$$

Дискретное преобразование Фурье:

$$S(n) = \sum_{k=0}^K s[k] e^{-2\pi jkn/N} = \sum_{k=0}^K s[k] \left(\cos(-2\pi kn/N) + j \sin(-2\pi kn/N) \right)$$

Ряд Фурье:

$$s(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cos \left(2\pi kt/T + \varphi_k \right)$$

Для вектора гармоник $n = \{0, 1, \dots, N\}$ получаем вектор значений:

$$S[n] = a_n + j b_n$$

для непрерывного случая вычисляется аналогично с вектором частот ω ;

1. Дифференциальные уравнения.....	4
2. Разностные уравнения и решетчатые функции.....	43
3. Векторно-матричные преобразования.....	52
4. Числовые и функциональные ряды.....	117
5. Интегральные преобразования.....	133
6. Устойчивость.....	180
6.1. Устойчивость по Ляпунову.....	182
6.2. Критерии устойчивости динамических систем.....	190
7. Линеаризация.....	212

Устойчивость динамической системы

Устойчивость - это свойство САР/САУ возвращаться к первоначальному (как правило, устойчивому равновесному) положению после прекращения действия внешнего воздействия на систему.

Математически устойчивость формулируется для непрерывных систем в контексте устойчивости решений дифференциальных уравнений, т.е. в контексте устойчивости по Ляпунову.

Устойчивость динамических систем исследуется с помощью различных критериев, не связанных с непосредственным анализом решений дифференциальных уравнений.

Устойчивость в малом

Система устойчива в малом, когда констатируется факт устойчивости, но границы области устойчивости не определены.

Устойчивость в большом

Система устойчива в большом, если определены границы устойчивости, т.е. определена область отклонений после которых система вернется в устойчивое положение.

Устойчивость в целом

Система устойчива в целом, если границы области устойчивости бесконечны, т.е. система вернется в устойчивое положение из любого отклонения.

Устойчивость в целом для некоторых нелинейных систем связывается с абсолютной устойчивостью.

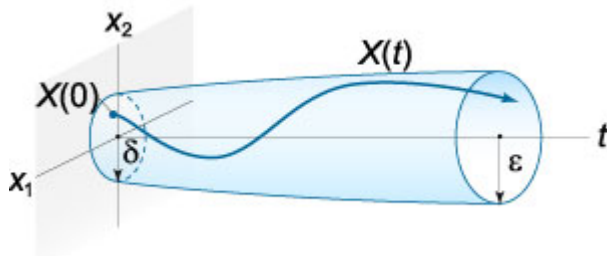
Устойчивость по Ляпунову

Решение $\mathbf{x}(t)$ называется устойчивым по Ляпунову при $t \rightarrow \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$ зависящее от ε и t , что любое решение $\varphi_i(t)$, начинающееся в δ -окрестности, т.е.:

$$\|\varphi_i(t_0) - \mathbf{x}(t_0)\| < \delta,$$

не выходит за пределы ε -окрестности при $t \rightarrow \infty$, т.е.:

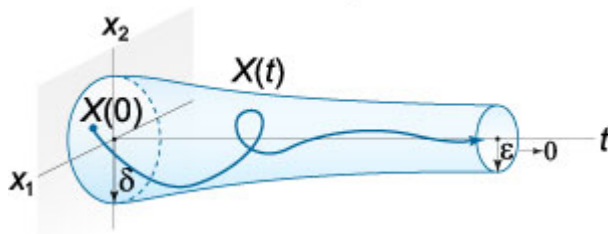
$$\|\varphi_i(t) - \mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$$



Устойчивость по Ляпунову (асимптотическая)

Решение $\mathbf{x}(t)$ называется асимптотически устойчивым по Ляпунову при $t \rightarrow \infty$, если оно устойчиво по Ляпунову и при этом не выходит за пределы уменьшающейся ε -окрестности при $t \rightarrow \infty$, т.е.:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi_i(t) - \mathbf{x}(t)\| = 0$$

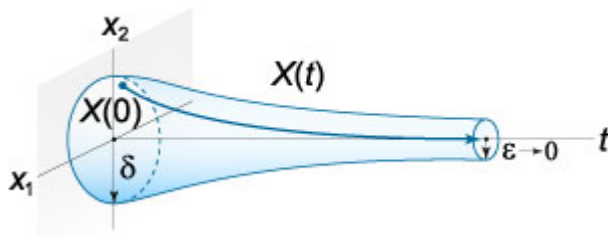


Устойчивость по Ляпунову (экспоненциальная)

Решение $\mathbf{x}(t)$ называется экспоненциально устойчивым по Ляпунову при $t \rightarrow \infty$, если оно асимптотически устойчиво по Ляпунову и при этом сходится со скоростью затухания экспоненциальной функции, т.е.:

$$\|\varphi_i(t) - \mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\varphi_i(t_0) - \mathbf{x}(t_0)\| e^{-\beta(t-t_0)},$$

где α и β некоторые константы.



Первый метод Ляпунова

Первый метод Ляпунова - это способы исследования устойчивости линеаризованной системы дифференциальных уравнений при возмущенном движении, которые подразумевают нахождение решений системы дифференциальных уравнений.

Второй метод Ляпунова

Второй метод Ляпунова - это способы исследования нелинейных систем дифференциальных уравнений при возмущенном движении, которые не требуют нахождения решений системы, а опираются на поиск некоторого функционала, обладающего определенными свойствами.

Второй метод Ляпунова часто называют прямым.

Знакоположительные / знакоотрицательные функции

Функция $V(x)$ называется знакоположительной (знакоотрицательной) в указанной области G , если для любого $x \in G$ функция $V(x) \geq 0$ ($V(x) \leq 0$).

Знакоположительные и знакоотрицательные функции являются знакопостоянными функциями.

Положительно / отрицательно определенные функции

Функция $V(x)$ называется положительно определенной (отрицательно определенной) в указанной области G , если для любого $x \in G$ функция $V(x) \geq 0$ ($V(x) \leq 0$), при этом $V(x) = 0$ только при $x = 0$.

Знакопеременные функции

Функция $V(x)$ называется знакопеременной в указанной области G , если она принимает и положительные и отрицательные значения.

Устойчивость по второму методу Ляпунова

Если для системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

существует (можно подобрать) положительно определенную функцию $V(x)$, производная которой является знакоотрицательной функцией, то решение $\mathbf{x}(t)$ является устойчивым.

Устойчивость по второму методу Ляпунова (асимптотическая)

Если для системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

существует (можно подобрать) положительно определенную функцию $V(x)$, производная которой является отрицательно определенной функцией, то решение $\mathbf{x}(t)$ является асимптотически устойчивым.

Физический смысл устойчивости непрерывных систем:

Устойчивость непрерывных систем непосредственно связана с физическим возвращением системы в исходное (устойчивое равновесное) состояния после прекращения действия внешнего воздействия. Неустойчивость приводит к физическому разрушению исследуемой системы.

Физический смысл устойчивости дискретных систем:

Устойчивость цифровых систем не связана с физической целостностью рассматриваемой системы. Устойчивость в цифровых системах стоит понимать как отсутствие стремления численного значения выхода системы к значениям $\pm \infty$.

Критерии устойчивости динамических систем:

- прямые;
(по графику переходного процесса)
- косвенные:
 - алгебраические;
(по полюсам системы)
 - по полюсам системы;
 - по собственным значениям матрицы состояния;
 - критерий Гурвица (непрерывный случай);
 - критерий Рауса (непрерывный случай);
 - критерий Джюри (дискретный случай);
 - частотные:
(по частотным характеристикам)
 - критерий Михайлова;
 - критерий Найквиста.

Передаточная функция:

$$W(s) = K \prod_{i=1}^m (s + q_i) / \prod_{j=1}^n (s + p_j) = \sum_i^n \frac{c_i s}{s - p_i}$$

В общем случае решение задачи Коши:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_i^n \frac{c_i s}{s - p_i} \right\} = \dots = \sum_i^n c_i e^{p_i t}$$

Решение будет устойчивым если все степени экспонент имеют отрицательную вещественную степень, т.е. все полюса системы находятся в левой полуплоскости комплексной плоскости корней

Критерий Гурвица

Система $W(s)$ является устойчивой, если для полинома знаменателя:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$$

все главные миноры матрицы Гурвица Δ (составленные из коэффициентов этого полинома) и коэффициент a_0 положительны.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

Критерий Рауса

Система $W(s)$ является устойчивой, если для полинома знаменателя:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$$

коэффициенты первого столбца таблицы Рауса одного знака.

r_i	1	2	3	...
—	a_0	a_2	a_4	...
—	a_1	a_3	a_5	...
$r_3 = c_{1,1}/c_{1,2}$	$c_{2,1} - r_3 c_{2,2}$	$c_{3,1} - r_3 c_{3,2}$	$c_{4,1} - r_3 c_{4,2}$...
$r_4 = c_{1,2}/c_{1,3}$	$c_{2,2} - r_4 c_{2,3}$	$c_{3,2} - r_4 c_{3,4}$	$c_{4,2} - r_4 c_{4,3}$...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

Количество строк в таблице Рауса равно $n + 1$.

При формировании таблицы Рауса рассматриваются четыре случая:

1 нулевых элементов в первом столбце нет;

(применяем критерий)

2 в строке нулю равен только коэффициент в первом столбце;

(заменяем этот элемент на $\varepsilon > 0 \ll 1$ и при конечном расчете таблицы устремляем значение ε к нулю)

3 все элементы строки равны нулю;

(вычисляем дополнительный полином и его коэффициенты записываем в таблицу)

4 кратные корни на мнимой оси;

(система неустойчива, критерий Рауса данный вид неустойчивости обнаружить не может)

Устойчивость системы в переменных состояния

Непрерывная система

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Является устойчивой, если все собственные значения матрицы состояния \mathbf{A} имеют отрицательную вещественную часть, т.е.:

$$\Re(\lambda_i(\mathbf{A})) < 0$$

По теореме Кэли-Гамильтона собственные значения матрицы \mathbf{A} непосредственно связаны с полюсами системы - корнями характеристического полинома знаменателя передаточной функции.

Принцип аргумента Коши

Пусть $F(s)$ - отношение двух полиномов, а замкнутая кривая C на s плоскости отображается с помощью $F(s)$ в другую замкнутую кривую на комплексной плоскости. Если $F(s)$ является аналитической функцией и на C , за исключением конечного числа полюсов, и если $F(s)$ не имеет ни нулей ни полюсов на C , то

$$N = Z - P$$

где:

Z - число нулей $F(s)$;

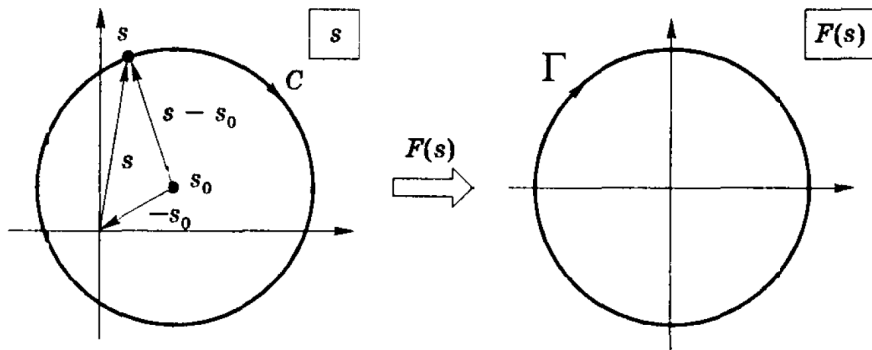
P - число полюсов $F(s)$;

N - число охватов контура начала координат.

Пусть s_0 заданная, в общем случае комплексная величина, тогда для:

$$F(s) = s - s_0$$

отображение кривая C на s -плоскости в контур Γ на плоскости $F(s)$, путем вычисления $F(s)$ для кривой C , имеет вид:

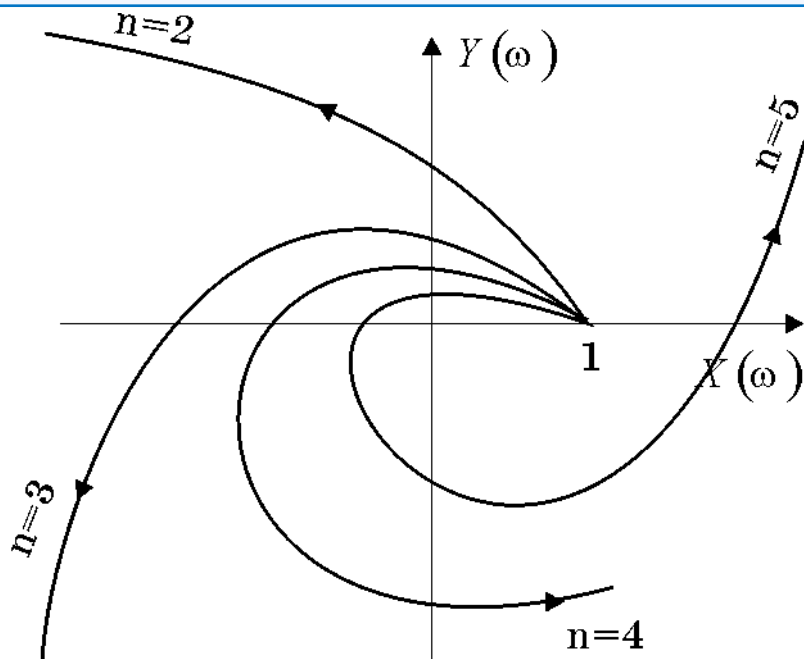


Критерий Михайлова

По критерию Михайлова система является устойчивой, если годограф Михайлова, т.е. кривая $W(j\omega)$ при изменении ω от нуля до ∞ , начинается на положительной части действительной оси и обходит в положительном направлении (против часовой стрелки) последовательно n квадрантов, где n порядок полинома знаменателя передаточной функции.

Критерий Михайлова является графической интерпретацией принципа аргумента Коши.

Годограф Михайлова, т.е. кривая $W(j\omega)$, по сути, является Γ в определении принципа аргумента Коши.



Передаточная функция замкнутой системы с отрицательной ОС:

$$W(s) = \frac{W_{ps}(s)}{1 + W_{ps}(s) W_{os}(s)},$$

устойчивость которой определяется нахождением полюсов системы, путем приравниванием полинома знаменателя к нулю:

$$F(s) = 1 + W_{ps}(s) W_{os}(s) = 0,$$

что в контексте принципа аргумента Коши соответствует исследованию контура на плоскости $F(s)$ относительно точки $(-1, 0j)$, т.к.:

$$W_{ps}(s) W_{os}(s) = -1$$

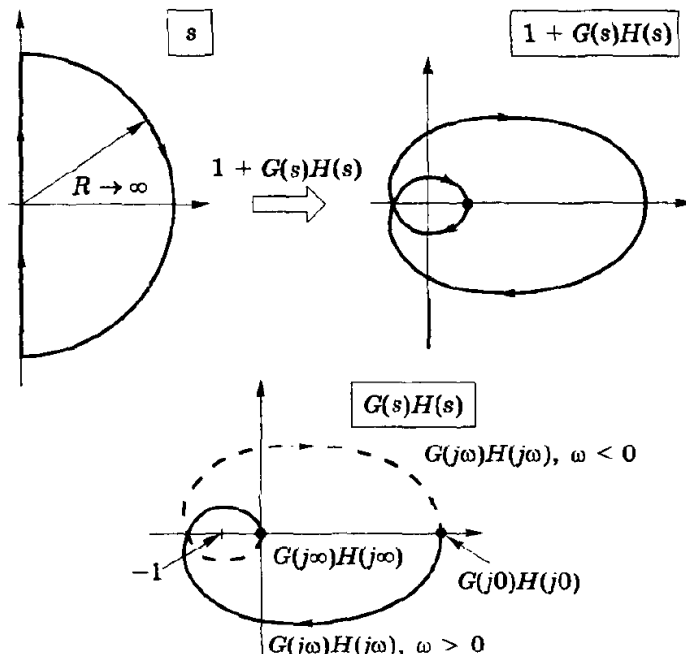
Таким образом, устойчивость замкнутой системы по принципу аргумента определяется охватом контура точки $(-1, 0j)$.

Для отображения контура из s плоскости в диаграмму (годограф) Найквиста, т.е. в контур на плоскости $W_{ps}(s) W_{os}(s)$ справедливо:

$$Z = N + P$$

где:

- Z - количество корней полинома знаменателя замкнутой системы в правой полуплоскости плоскости корней;
- P - количество полюсов передаточной функции разомкнутой системы $W_{ps}(s)$ в правой полуплоскости плоскости корней;
- N - количество охватов по часовой стрелки годографом Найквиста точки $(-1, 0j)$.



Учитывая равенство:

$$Z = N + P$$

Критерий Найквиста

Критерий Найквиста позволяет оценить устойчивость замкнутой системы по устойчивости разомкнутой системы, т.е. замкнутая система $W(s)$ будет устойчивой если:

- количество охватов N годографом Найквиста (против часовой стрелки) точки $(-1, 0j)$ равно количеству полюсов P в правой полуплоскости в плоскости системы (в случае если разомкнутая система неустойчива);
- количество охватов N годографом Найквиста точки $(-1, 0j)$ равно нулю (в случае если разомкнутая система устойчива).

Передаточная функция:

$$W(z) = K \prod_{i=1}^m (z + q_i) / \prod_{j=1}^n (z + p_j) = \sum_i^n \frac{c_i z}{z - p_i}$$

Решение систем через обратное Z-преобразование:

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \sum_i^n \frac{c_i z}{z - p_i} \right\} = \sum_i^n c_i \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z - p_i} \right\} = \sum_i^n c_i (p_i)^k$$

Сходится при условии:

$$|p_i| < 1$$

Другими словами, полюса цифровой системы (в общем случае комплексные) должны лежать в круге единичного радиуса

Критерий Джури

Полином $D(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_0$ не будет иметь корней за кругом единичного радиуса, при выполнении следующих условий:

$$D(1) > 0$$

$$(-1)^n D(-1) > 0$$

$$|a_0| < a_n$$

$$|b_0| > |b_{n-1}|$$

$$|c_0| > |c_{n-2}|$$

$$\vdots$$

$$|g_0| > |g_2|$$

Другими словами, цифровая система с полиномом знаменателя $D(z) = 0$ будет устойчива.

Критерий Джури

Для критерия Джури формируется следующая таблица:

z^0	z^1	z^2	z^3	\dots	z^{n-1}	z^n	n
a_0	a_1	a_2	a_3	\dots	a_{n-1}	a_n	1
a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	\dots	a_1	a_0	2
b_0	b_1	b_2	b_3	\dots	b_{n-1}		2
b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	\dots	b_0		3
c_0	c_1	c_2	c_3	\dots			3
c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	c_{n-5}	\dots			4
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots				\vdots
g_0	g_1	g_2					n

Для системы второго порядка будет только одна строчка
Повышение порядка на единицу добавляет сразу две строки

Расчет коэффициентов осуществляется следующим образом:

$$b_j = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-i} \\ a_n & a_j \end{vmatrix}$$

$$c_j = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-i-1} \\ b_{n-1} & b_j \end{vmatrix}$$

$$d_j = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-i-2} \\ c_{n-2} & c_j \end{vmatrix}$$

...

и т.д.

Пример. Определение устойчивости по критерию Джури

Для заданного $D(z)$ оценить устойчивость по критерию Джури:

$$D(z) = z^3 - 1.8z^2 + 1.05z - 0.2$$

Проверяем первые три пункта критерия:

$$D(1) = 1 - 1.8 + 1.05 - 0.2 = 0.05 > 0 \quad \checkmark$$

$$(-1)^3 D(-1) = -(-1 - 1.8 - 1.05 - 0.2) = 4.05 > 0 \quad \checkmark$$

$$|a_0| = 0.2 < a_3 = 1 \quad \checkmark$$

Формируем таблицу:

z^0	z^1	z^2	z^3
-0.2	1.05	-1.8	1.0
1.0	-1.8	1.05	-0.2
b_0	b_1	b_2	

Пример. Определение устойчивости по критерию Джурри

Вычисляем коэффициенты b_j :

$$b_0 = \begin{vmatrix} -0.2 & 1.0 \\ 1.0 & -0.2 \end{vmatrix} = -0.96, \quad b_1 = \begin{vmatrix} -0.2 & -1.8 \\ 1.0 & 1.05 \end{vmatrix} = 1.59,$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} -0.2 & 1.05 \\ 1.0 & -1.8 \end{vmatrix} = -0.69$$

Получим итоговую таблицу:

z^0	z^1	z^2	z^3
-0.2	1.05	-1.8	1.0
1.0	-1.8	1.05	-0.2
-0.96	1.59	-0.69	
-0.69	1.59	-0.96	
0.45	-0.43		

Пример. Определение устойчивости по критерию Джурри

Все необходимые критерии выполняются:

$$D(1) = 1 - 1.8 + 1.05 - 0.2 = 0.05 > 0 \quad \checkmark$$

$$(-1)^3 D(-1) = -(-1 - 1.8 - 1.05 - 0.2) = 4.05 > 0 \quad \checkmark$$

$$|a_0| = 0.2 < a_3 = 1 \quad \checkmark$$

$$|b_0| = 0.96 > |b_2| = 0.69 \quad \checkmark$$

$$|c_0| = 0.45 > |c_1| = 0.43 \quad \checkmark$$

Вывод: система устойчива.

Полином знаменателя передаточной функции можно переписать:

$$D(z) = (z - 0.5)^2 (z - 0.8)$$

Устойчивость системы в переменных состояния

Дискретная система

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

Является устойчивой, если все собственные значения матрицы состояния \mathbf{A} лежат в круге единичного радиуса, т.е.:

$$|\lambda_i(\mathbf{A})| < 1$$

По теореме Кэли-Гамильтона собственные значения матрицы \mathbf{A} непосредственно связаны с полюсами системы - корнями характеристического полинома знаменателя передаточной функции.

1. Дифференциальные уравнения.....	4
2. Разностные уравнения и решетчатые функции.....	43
3. Векторно-матричные преобразования.....	52
4. Числовые и функциональные ряды.....	117
5. Интегральные преобразования.....	133
6. Устойчивость.....	180
7. Линеаризация.....	212
7.1. Линеаризация разложением в ряд Тейлора.....	214
7.2. Гармоническая линеаризация.....	216
7.3. Линеаризация обратной связью.....	220

Линеаризация

Один из методов исследования нелинейных функционалов или систем, который заключается в замене нелинейного математического описания функционала или системы на линейный с последующим исследованием полученного линейного функционала или системы.

Линеаризация осуществляется относительно некоторой точки состояния системы (как правило равновесной) и, теоретически, справедлива (обладает высокой степенью адекватности) только в небольшой окрестности относительно точки линеаризации.

Некоторые методы линеаризации:

- линеаризация разложением в ряд Тейлора;
- гармоническая линеаризация;
- линеаризация обратной связью.

Линеаризация разложением в ряд Тейлора

Используется для замены нелинейных функционалов и систем линейными и часто применяется в контексте динамических систем. Идея линеаризации заключается в замене нелинейного функционала:

$$y = f(x)$$

разложением в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки x_0 (как правило равновесной) с отбрасыванием членов разложения выше первого порядка, т.е.:

$$y \approx y_0 + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)$$

В случае векторного функционала разложение в ряд Тейлора осуществляется аналогичным образом, а первая производная становится матрицей Якоби.

Непрерывная нелинейная динамическая система

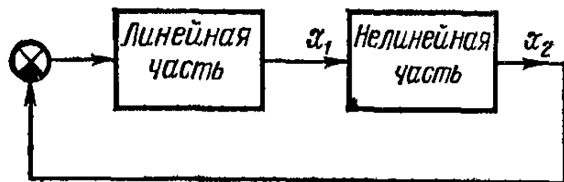
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), t) \end{cases}$$

Может быть описана в переменных состояния с линеаризацией разложением в ряд Тейлора в окрестности точки $(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0))$, используя следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0)}, & \mathbf{B} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0)} \\ \mathbf{C} &= \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0)}, & \mathbf{D} &= \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0)} \end{aligned}$$

Гармоническая линеаризация

Используется для приближенного определения периодических решений (автоколебаний), возникающих в нелинейной системе без внешнего воздействия (предельный цикл).



Полагаем, что на вход НЭ поступает гармонический сигнал $x_1(t) = A \sin(\omega t)$, а на выходе получается периодический сигнал $x_2(t)$ (например, при нелинейности релейного типа), математическое описание которого задано в виде:

$$x_2(t) = f(x_1(t), \dot{x}_1(t)) = f(A \sin(\omega t), A\omega \cos(\omega t))$$

Разложение сигнала $x_2(t)$ в ряд Фурье имеет вид:

$$x_2(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right)$$

где коэффициенты a_k и b_k определяются как:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \left(A \sin(k\omega t), A \omega \cos(k\omega t) \right) \cos(k\omega t) dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \left(A \sin(k\omega t), A \omega \cos(k\omega t) \right) \sin(k\omega t) dt$$

Предполагая, что $x_2(t)$ - симметричный периодический сигнал, а также отбрасывая гармоники выше первой и учитывая, что:

$$\sin(\omega t) = \frac{x_1(t)}{A}, \quad \cos(\omega t) = \frac{\dot{x}_1(t)}{A\omega}$$

получим приближенную запись сигнала $x_2(t)$ на выходе НЭ в виде:

$$x_2(t) = q(A, \omega) x_1(t) + \frac{p(A, \omega)}{\omega} \dot{x}_1(t)$$

где коэффициенты $q(A, \omega)$ и $p(A, \omega)$ определяются как:

$$q(A, \omega) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f\left(A \sin(\psi), A\omega \cos(\psi)\right) \cos(\psi) d\psi$$

$$p(A, \omega) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f\left(A \sin(\psi), A\omega \cos(\psi)\right) \sin(\psi) d\psi$$

где $\psi = \omega t$.

В случае, если предполагаемое описание НЭ не зависит от $\dot{x}_1(t)$ приближенная запись сигнала $x_2(t)$ на выходе НЭ будет иметь вид:

$$x_2(t) = q(A, \omega) x_1(t) + \frac{p(A, \omega)}{\omega} \dot{x}_1(t)$$

где коэффициенты $q(A, \omega)$ и $p(A, \omega)$ определяются как:

$$q(A, \omega) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin(u)) \cos(ku) du$$

$$p(A, \omega) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin(u)) \sin(ku) du$$

Линеаризация обратной связью

Линеаризация обратной связью заключается в замене математического описания нелинейной системы вида (на примере скалярного случая):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, t) + g(x, t) u(t) \\ y(t) = h(x, t) \end{cases}$$

на описание системы, где вектор состояния состоит из измерений $y(t)$ и его производных до $n - 1$ порядка включительно, с новым входным воздействием $v(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \mathbf{v}(t) \\ y(t) = h(x, t) \end{cases}$$

где $\mathbf{v} = -\mathbf{F} \mathbf{z}(t)$.

Производная $y(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \frac{dh(x, t)}{dx} = \frac{dh(x, t)}{dx} \dot{x}(t) = \frac{dh(x, t)}{dx} \left(f(x, t) + g(x, t) u(t) \right) \\ &= \underbrace{\frac{dh(x, t)}{dx} f(x, t)}_{L_f h(x, t)} + \underbrace{\frac{dh(x, t)}{dx} g(x, t)}_{L_g h(x, t)} u(t) = L_f h(x, t) + L_g h(x, t) u(t)\end{aligned}$$

где L_f и L_g - производные Ли, обладающие следующими свойствами

$$\begin{aligned}L_g L_f^k h(x, t) &= 0, \quad k \leq r - 2 \\ L_g L_f^{r-1} h(x, t) &\neq 0\end{aligned}$$

где r - относительная степень системы.

Пусть $r = n$, тогда:

$$\begin{aligned}y(t) &= h(x, t) \\y^{(1)}(t) &= L_f h(x, t) \\&\vdots \\y^{(n-1)}(t) &= L_f^{n-1} h(x, t) \\y^{(n)}(t) &= L_f^n h(x, t) + L_g L_f^{n-1} h(x, t) u(t)\end{aligned}$$

Новый вектор состояния:

$$z(x, t) = T(x) = \begin{bmatrix} z_1(x, t) \\ z_2(x, t) \\ \vdots \\ z_n(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ y^{(1)}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x, t) \\ L_f h(x, t) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x, t) u(t) \end{bmatrix}$$

Производная нового вектора состояния:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{(1)}(t) \\ y^{(2)}(t) \\ \vdots \\ y^{(n)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ L_f^n h(x, t) + L_g L_f^{n-1} h(x, t) u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ v(t) \end{bmatrix}$$

Откуда получаем выражение для $u(t)$:

$$u(t) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x, t)} \left(-L_f^n h(x, t) + v(t) \right)$$

И получаем линеаризованную систему:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \mathbf{v}(t) \\ y(t) = h(x, t) \end{cases}$$

где $\mathbf{v} = -\mathbf{F} \mathbf{z}(t)$.